2019年全国高中数学联合竞赛加试（B卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、（本题满分40分） 设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 满足 $a_i\ge a_{101-i}\ (i=1,2,\cdots,50)$．记 $x_k=\dfrac{ka_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\ (k=1,2,\cdots,99)$．证明：$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}\le 1$．

证明： 注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}>0$．对 $k=1,2,\cdots,99$，由平均值不等式知

$$0<\left(\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)^k\le\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k},$$

…………10分

从而有

$$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}=\prod_{k=1}^{99}a_{k+1}^k\left(\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)^k\le\prod_{k=1}^{99}\frac{a_{k+1}^k}{a_1a_2\cdots a_k}. \qquad ①$$

…………20分

记①的右端为 T，则对任意 $i=1,2,\cdots,100$，a_i 在 T 的分子中的次数为 $i-1$，在 T 的分母中的次数为 $100-i$．从而

$$T=\prod_{i=1}^{100}a_i^{2i-101}=\prod_{i=1}^{50}a_i^{2i-101}a_{101-i}^{2(101-i)-101}=\prod_{i=1}^{50}\left(\frac{a_{101-i}}{a_i}\right)^{101-2i}.$$

…………30分

又 $0<a_{101-i}\le a_i\ (i=1,2,\cdots,50)$，故 $T\le 1$，结合①得

$$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}\le T\le 1.$$

…………40分

二、（本题满分40分） 求满足以下条件的所有正整数 n：

(1) n 至少有4个正约数；

(2) 若 $d_1<d_2<\cdots<d_k$ 是 n 的所有正约数，则 $d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots,d_k-d_{k-1}$ 构成等比数列．

解： 由条件可知 $k\ge 4$，且 $\dfrac{d_3-d_2}{d_2-d_1}=\dfrac{d_k-d_{k-1}}{d_{k-1}-d_{k-2}}$． …………10分

易知 $d_1=1,\ d_k=n,\ d_{k-1}=\dfrac{n}{d_2},\ d_{k-2}=\dfrac{n}{d_3}$，代入上式得

$$\frac{d_3-d_2}{d_2-1}=\frac{n-\frac{n}{d_2}}{\frac{n}{d_2}-\frac{n}{d_3}},$$

化简得

$$(d_3-d_2)^2=(d_2-1)^2d_3.$$

…………20分

积取到最大值 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

5. 将 5 个数 $2, 0, 1, 9, 2019$ 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为__________.

答案：95.

解：易知 $2, 0, 1, 9, 2019$ 的所有不以 0 为开头的排列共有 $4\times 4!=96$ 个．其中，除了 $(2, 0, 1, 9, 2019)$ 和 $(2019, 2, 0, 1, 9)$ 这两种排列对应同一个数 20192019，其余的数互不相等．因此满足条件的 8 位数的个数为 $96-1=95$.

6. 设整数 $n>4$，$(x+2\sqrt{y}-1)^n$ 的展开式中 x^{n-4} 与 xy 两项的系数相等，则 n 的值为__________.

答案：51.

解：注意到 $(x+2\sqrt{y}-1)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r x^{n-r}(2\sqrt{y}-1)^r$.

其中 x^{n-4} 项仅出现在求和指标 $r=4$ 时的展开式 $C_n^4 x^{n-4}(2\sqrt{y}-1)^4$ 中，其 x^{n-4} 项系数为 $(-1)^4C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

而 xy 项仅出现在求和指标 $r=n-1$ 时的展开式 $C_n^{n-1}x\cdot(2\sqrt{y}-1)^{n-1}$ 中，其 xy 项系数为 $C_n^{n-1}C_{n-1}^2 4(-1)^{n-3}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$.

因此有 $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$．注意到 $n>4$，化简得 $n-3=(-1)^{n-3}48$，故只能是 n 为奇数且 $n-3=48$．解得 $n=51$.

7. 在平面直角坐标系中，若以 $(r+1, 0)$ 为圆心、r 为半径的圆上存在一点 (a, b) 满足 $b^2\geq 4a$，则 r 的最小值为__________.

答案：4.

解：由条件知 $(a-r-1)^2+b^2=r^2$，故

$$4a\leq b^2=r^2-(a-r-1)^2=2r(a-1)-(a-1)^2.$$

即 $a^2-2(r-1)a+2r+1\leq 0$.

上述关于 a 的一元二次不等式有解，故判别式

$$(2(r-1))^2-4(2r+1)=4r(r-4)\geq 0,$$

解得 $r\geq 4$.

经检验，当 $r=4$ 时，$(a, b)=(3, 2\sqrt{3})$ 满足条件．因此 r 的最小值为 4.

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，首项 $a_1=2019$，且对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$．这样的数列 $\{a_n\}$ 的个数为________.

答案：5.

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d．由条件知 $a_1+a_2=a_k$（k 是某个正整数），则

$$2a_1+d=a_1+(k-1)d,$$

即 $(k-2)d=a_1$．因此必有 $k\neq 2$，且 $d=\frac{a_1}{k-2}$．这样就有

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+\frac{n-1}{k-2}a_1,$$

而此时对任意正整数 n，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=a_1+(n-1)a_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$
$$=a_1+\left((n-1)(k-2)+\frac{n(n-1)}{2}\right)d，$$

确实为 $\{a_n\}$ 中的一项.

因此，仅需考虑使 $k-2\mid a_1$ 成立的正整数 k 的个数. 注意到2019为两个素数3与673之积，易知 $k-2$ 可取 $-1, 1, 3, 673, 2019$ 这5个值，对应得到5个满足条件的等差数列.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（**本题满分 16 分**）在椭圆 Γ 中，F 为一个焦点，A, B 为两个顶点．若 $|FA|=3, |FB|=2$，求 $|AB|$ 的所有可能值．

解： 不妨设平面直角坐标系中椭圆 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，并记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．由对称性，可设 F 为 Γ 的右焦点．

易知 F 到 Γ 的左顶点的距离为 $a+c$，到右顶点的距离为 $a-c$，到上、下顶点的距离均为 a．分以下情况讨论：

(1) A, B 分别为左、右顶点．此时 $a+c=3, a-c=2$，故 $|AB|=2a=5$（相应地，$b^2=(a+c)(a-c)=6$，Γ 的方程为 $\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$）． ……………………4 分

(2) A 为左顶点，B 为上顶点或下顶点．此时 $a+c=3, a=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$）．

……………………8 分

(3) A 为上顶点或下顶点，B 为右顶点．此时 $a=3, a-c=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=8$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$）．

……………………12 分

综上可知，$|AB|$ 的所有可能值为 $5, \sqrt{7}, \sqrt{17}$． ……………………16 分

10.（**本题满分 20 分**）设 a, b, c 均大于 1，满足

$$\begin{cases}\lg a+\log_b c=3,\\ \lg b+\log_a c=4.\end{cases}$$

求 $\lg a\cdot\lg c$ 的最大值．

解： 设 $\lg a=x, \lg b=y, \lg c=z$，由 $a, b, c>1$ 可知 $x, y, z>0$．

由条件及换底公式知 $x+\frac{z}{y}=3, y+\frac{z}{x}=4$，即 $xy+z=3y=4x$．

……………………5 分

由此，令 $x=3t, y=4t\,(t>0)$，则 $z=4x-xy=12t-12t^2$．其中由 $z>0$ 可知 $t\in(0,1)$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………10 分

因此，结合三元平均值不等式得

$$\lg a\lg c=xz=3t\cdot 12t(1-t)=18\cdot t^2(2-2t)$$

$$\le 18\cdot\left(\frac{t+t+(2-2t)}{3}\right)^3=18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{3}.$$

当 $t=2-2t$，即 $t=\dfrac{2}{3}$（相应的 a,b,c 分别为 $100,10^{\frac{8}{3}},10^{\frac{8}{3}}$）时，$\lg a\lg c$ 取到最大值 $\dfrac{16}{3}$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………20 分

11.（**本题满分 20 分**）设复数数列 $\{z_n\}$ 满足：$|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．证明：对任意正整数 m，均有

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|<\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

证明：归纳地可知 $z_n\neq 0\,(n\in\mathbf{N}^*)$．由条件得

$$4\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)+1=0\,(n\in\mathbf{N}^*),$$

解得 $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\,(n\in\mathbf{N}^*)$．　　　　　　　　　　　　　…………………5 分

因此 $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$，故

$$|z_n|=|z_1|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\,(n\in\mathbf{N}^*).\qquad ①$$

进而有

$$|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|\frac{3\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n}\,(n\in\mathbf{N}^*).\qquad ②$$

…………………10 分

当 m 为偶数时，设 $m=2s\,(s\in\mathbf{N}^*)$．利用②可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

…………………15 分

当 m 为奇数时，设 $m=2s+1\,(s\in\mathbf{N})$．由①、②可知

$$|z_{2s+1}|=\frac{1}{2^{2s}}<\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|,$$

故

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\left(\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|\right)+|z_{2s+1}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上，结论获证．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………20 分