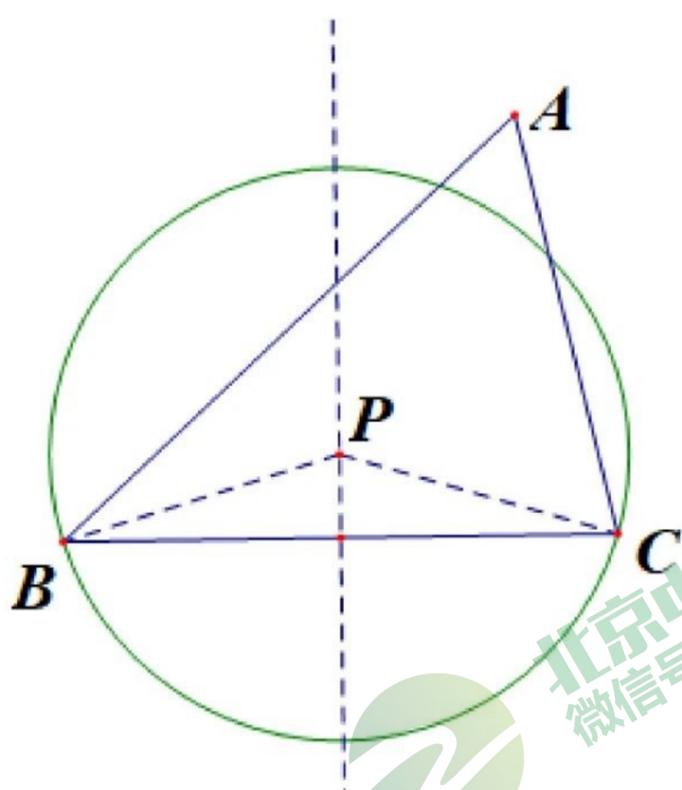




【题目】

在平面直角坐标系 xOy 中，对于 $\triangle ABC$ ，点 P 在 BC 边的垂直平分线上，若以点 P 为圆心， PB 为半径的 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 三条边的公共点个数之和不小于 3，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 关于边 BC 的“Math 点”。

右图所示，点 P 即为 $\triangle ABC$ 关于边 BC 的“Math 点”。



已知点 $P(0, 4)$ ， $Q(a, 0)$

(1) 如图 1， $a = 4$ ，在点 $A(1, 0)$ 、 $B(2, 2)$ 、 $C(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 、 $D(5, 5)$ 中， $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”为_____。

(2) 如图 2， $a = 4\sqrt{3}$ ，

① 已知 $D(0, 8)$ ，点 E 为 $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”，请直接写出线段 DE 的长度的取值范围；

② 将 $\triangle POQ$ 绕原点 O 旋转一周，直线 $y = -\sqrt{3}x + b$ 交 x 轴、 y 轴于点 M 、 N ，若线段 MN 上存在 $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”，求 b 的取值范围。

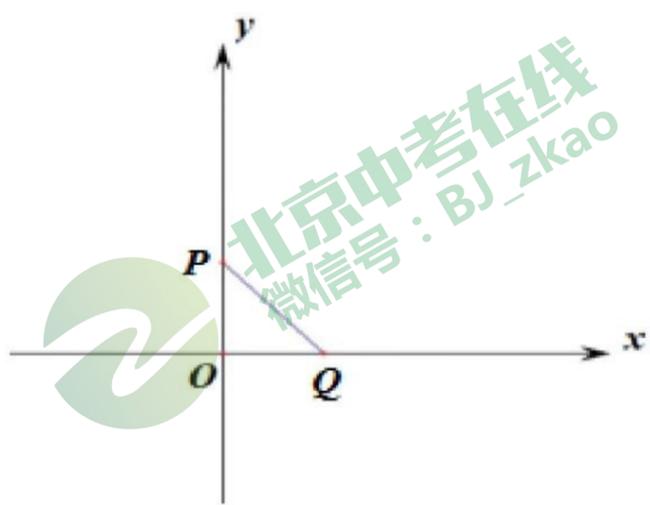


图 1

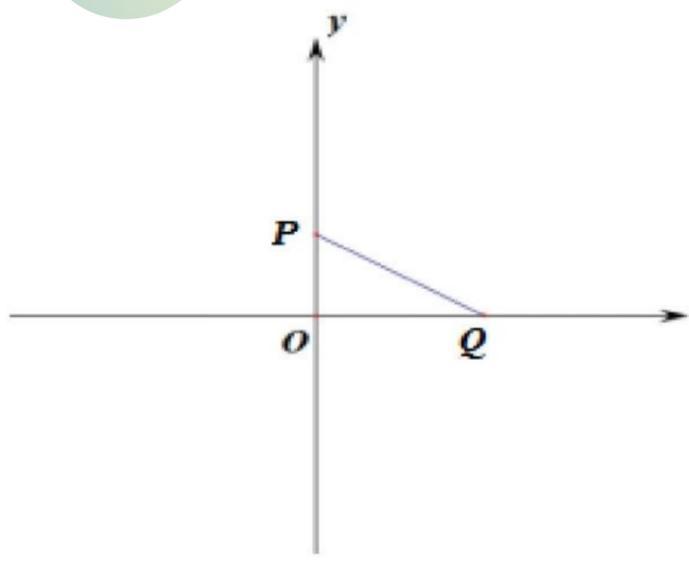


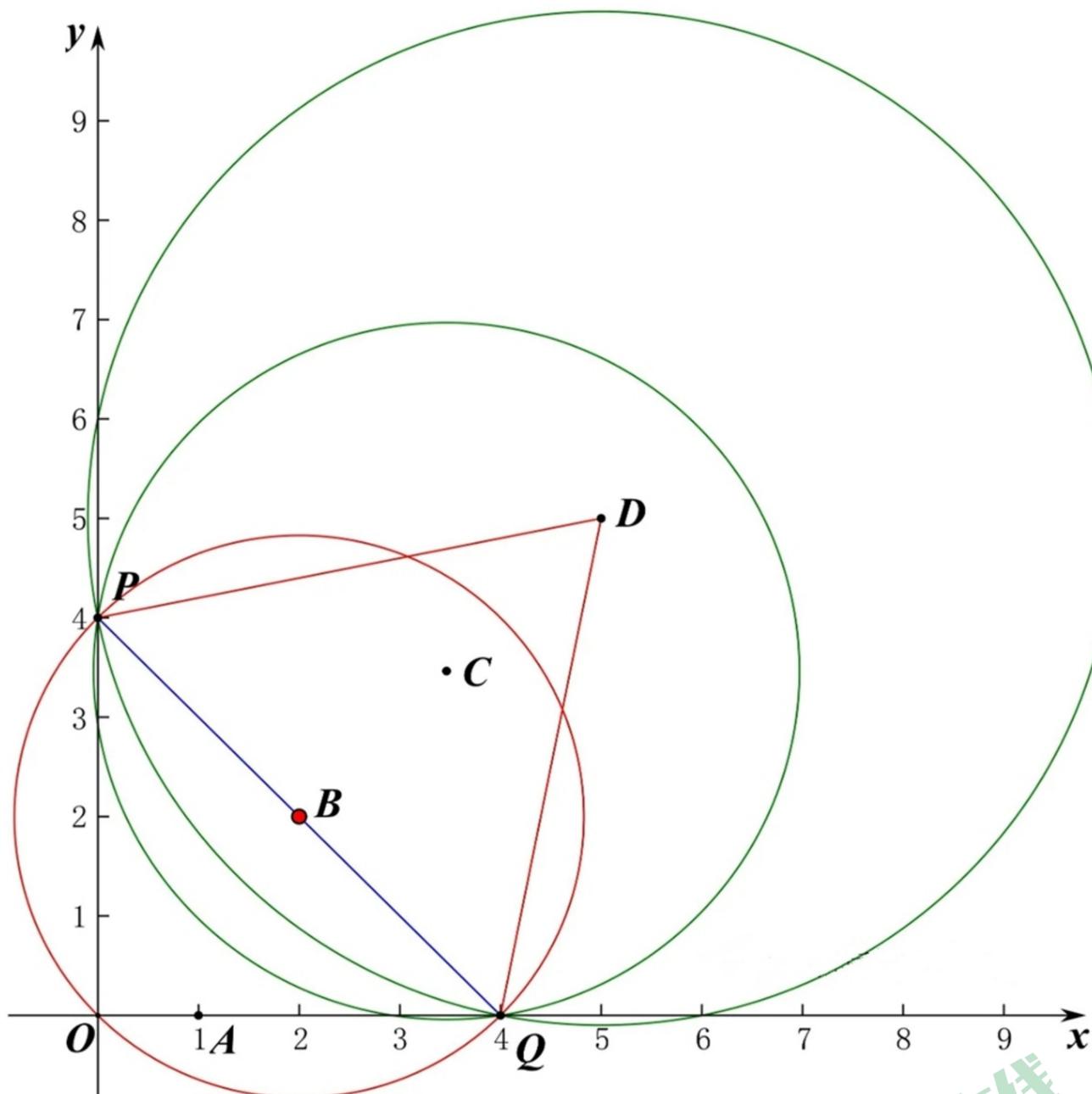
图 2

【读题】

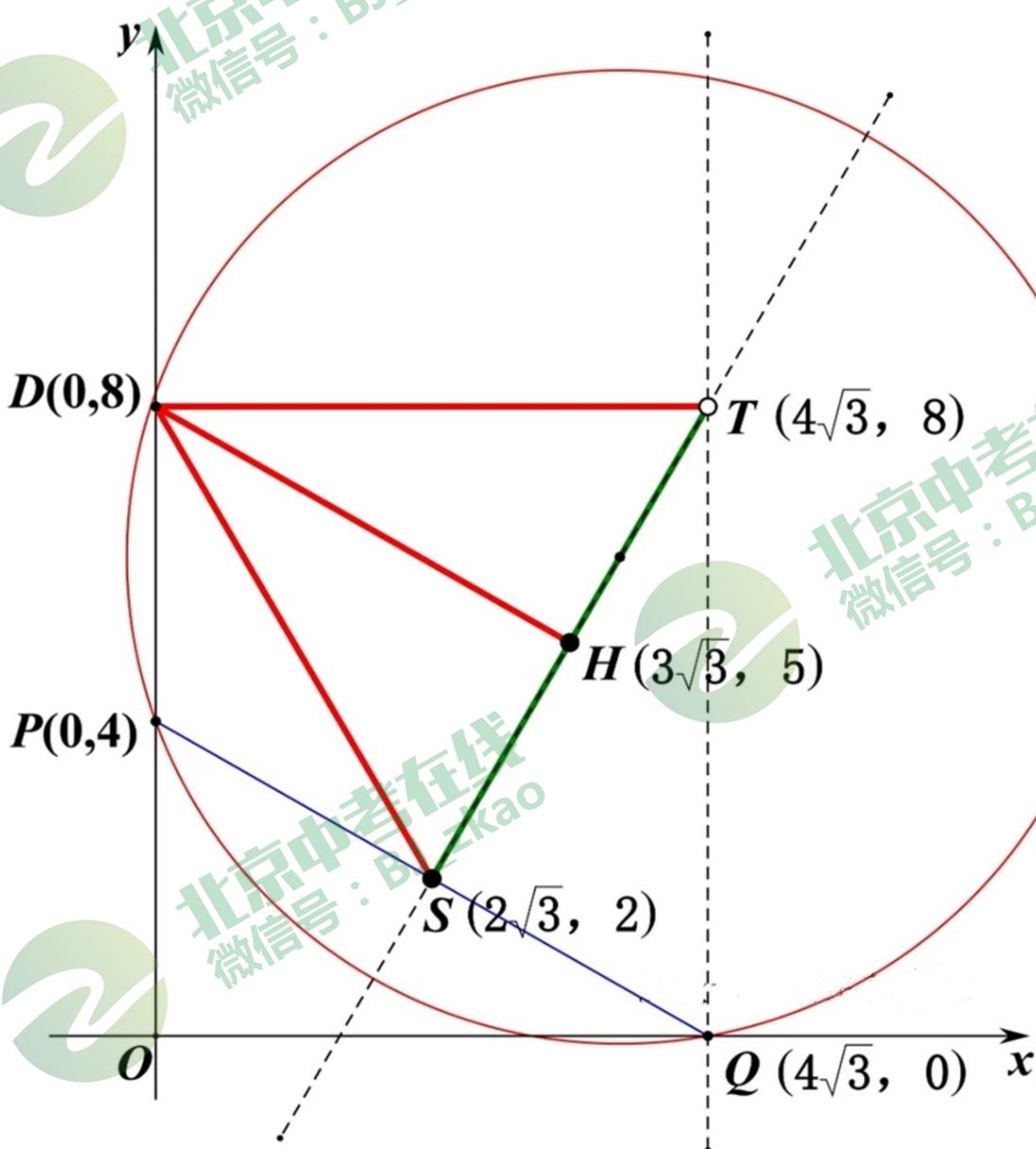
本题的类型属于“画圆或画弧”这一类型，与 2019 年北京中考新定义的风格类似。此类试题，分析时要注意所画的圆弧与三角形各边相切时对定义造成能够的影响。

【分析】

(1) 送分题，如下图所示各个示意图，可知点 B 和点 C 均符合定义要求。



(2) ①在之前的分析上进一步加大难度。分析可知 $\triangle POQ$ 的“Math 点”位于线段 ST 上, 此时, DE 的最小值为 DH , DE 的最大值为 DS , 注意 DT 这个临界位置取不到 (想一想为什么?)。结合图中各点的坐标, 不难计算 DE 的取值范围。



考生做题时, 可以拿着圆规沿着直线 ST 进行画弧, 并在画图的过程中确定临界位置。

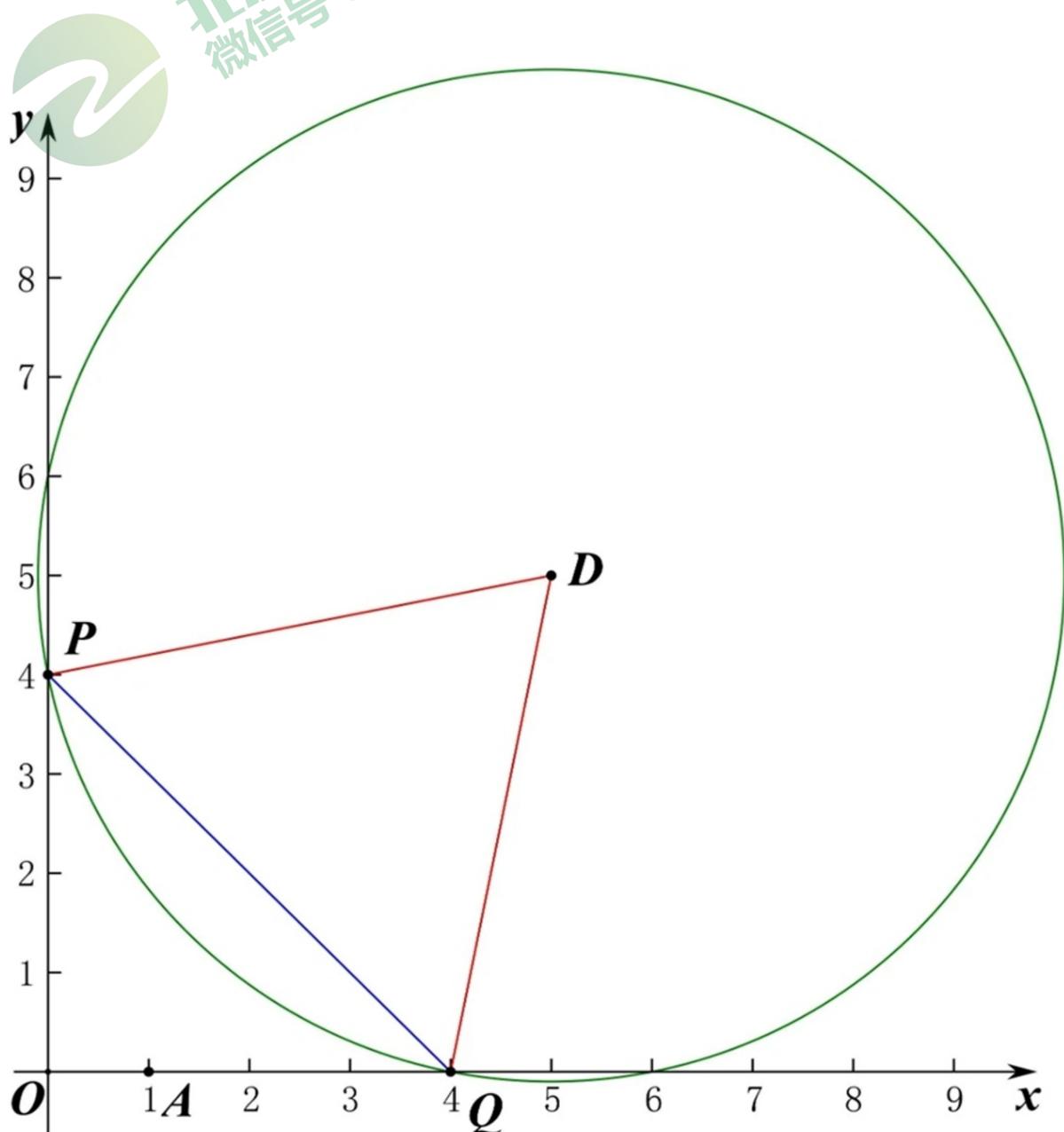
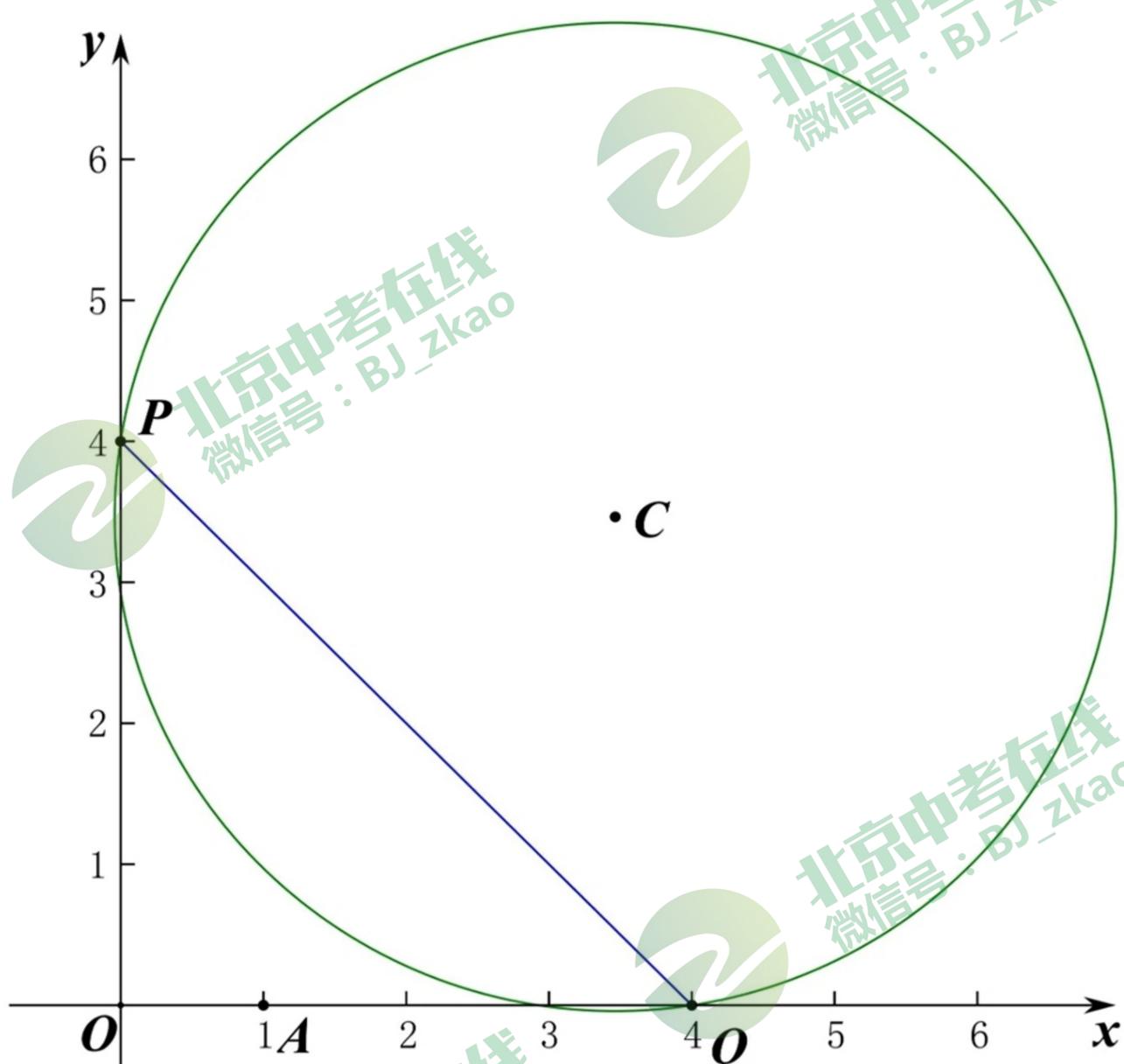
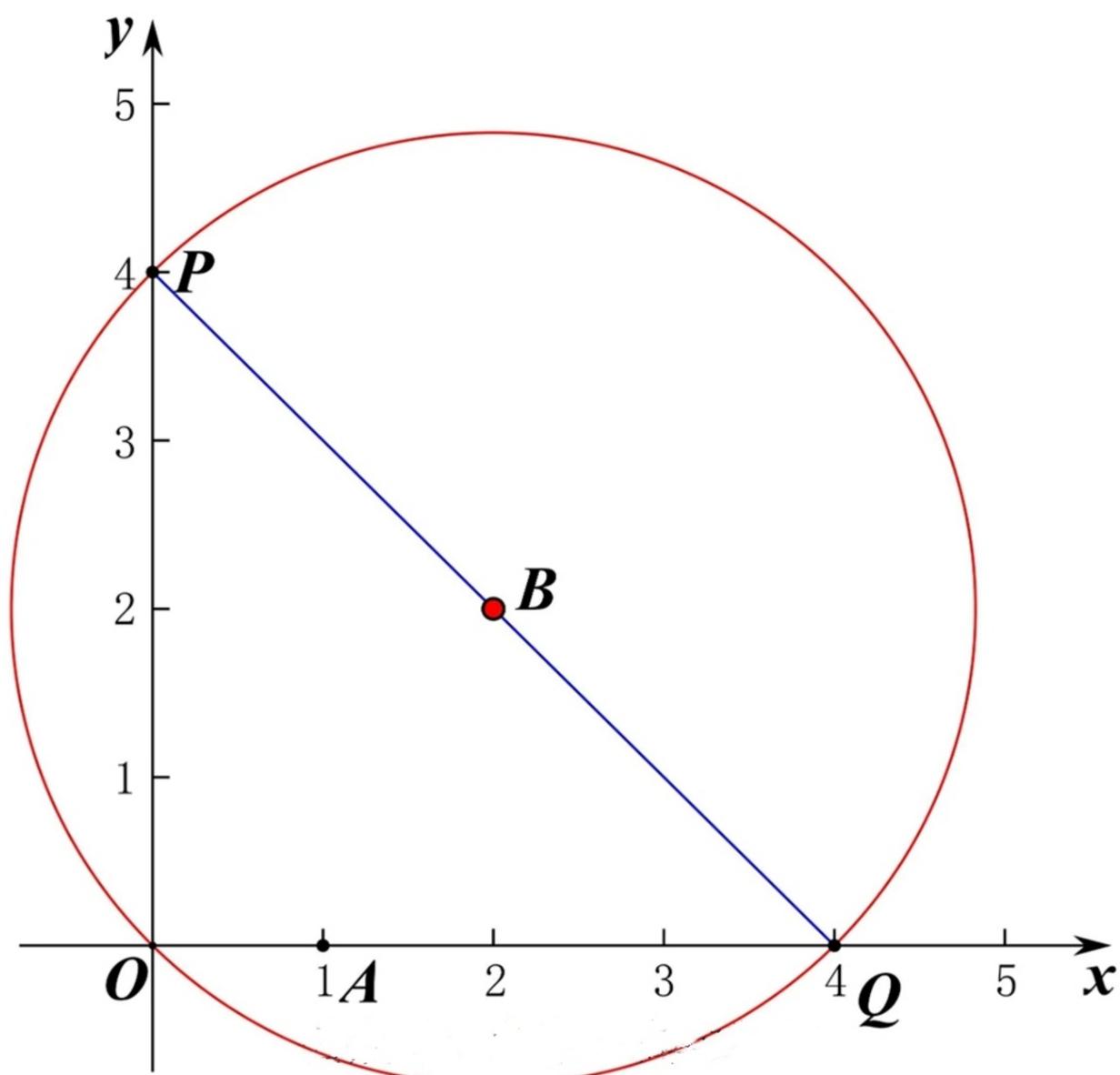
(2) ②将 $\triangle POQ$ 绕原点 O 旋转一周, 直线 $y = -\sqrt{3}x + b$ 交 x 轴、 y 轴于点 M 、 N , 若线段 MN 上存在 $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”, 求 b 的取值范围。

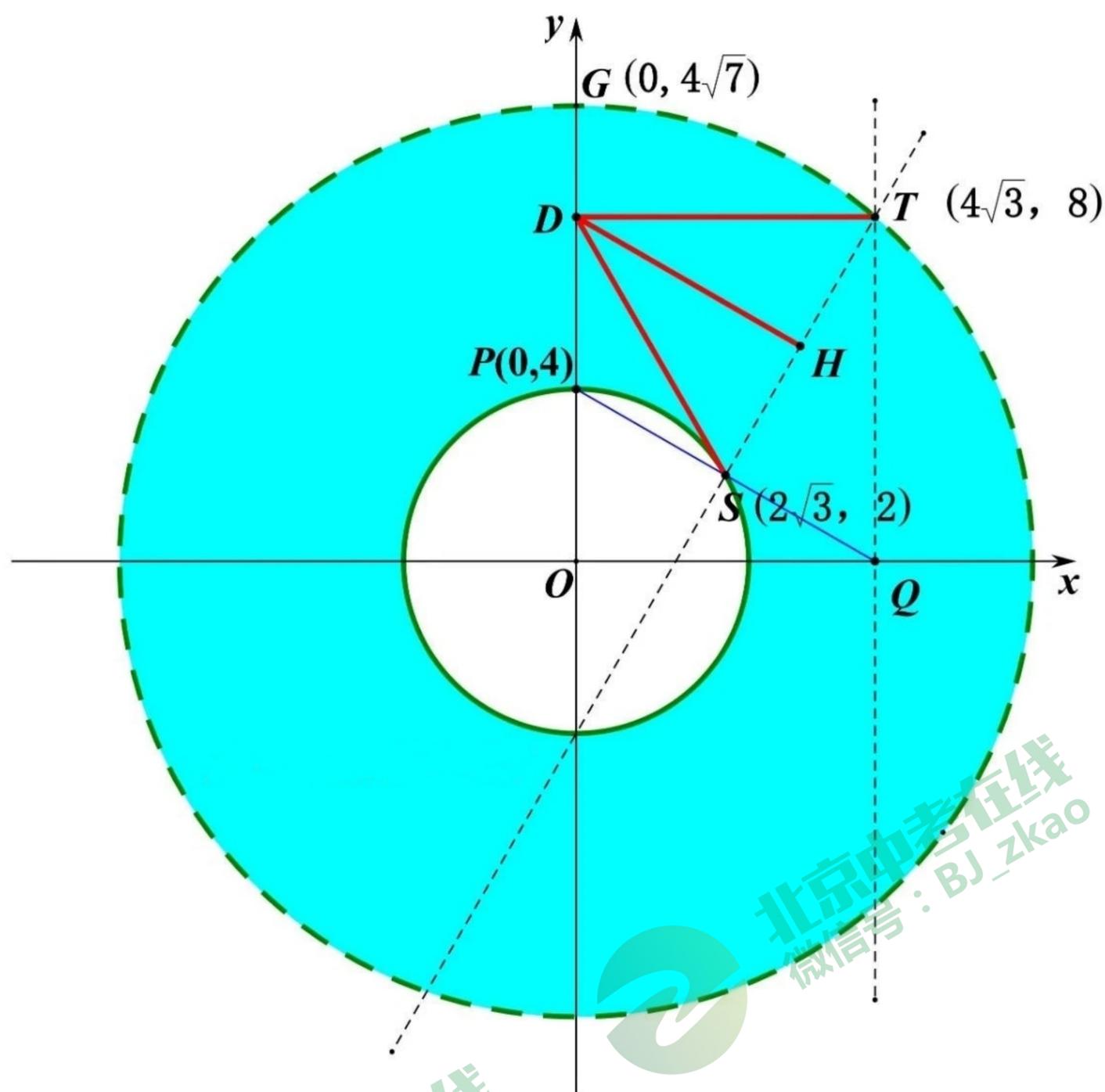
第一步: 确定 $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”

结合上一问的解题经验, 可知 $\triangle POQ$ 关于边 PQ 的“Math 点”的轨迹区域如下图所示阴影区域。

第二步: 求 b 的取值范围

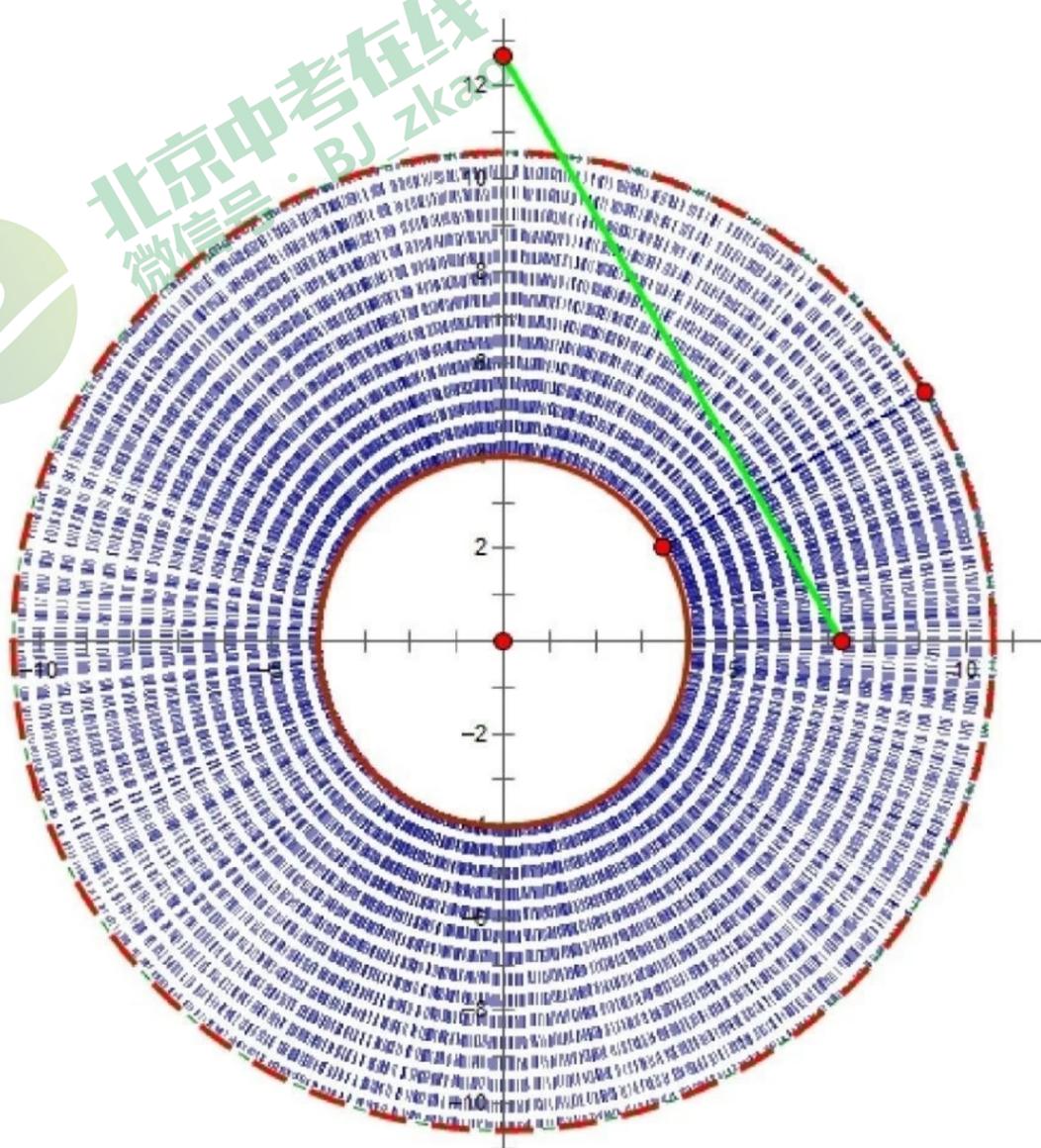
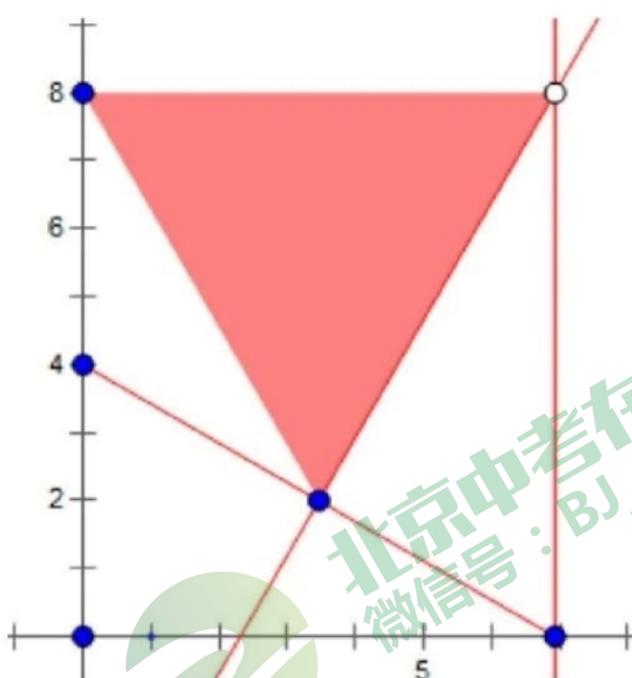
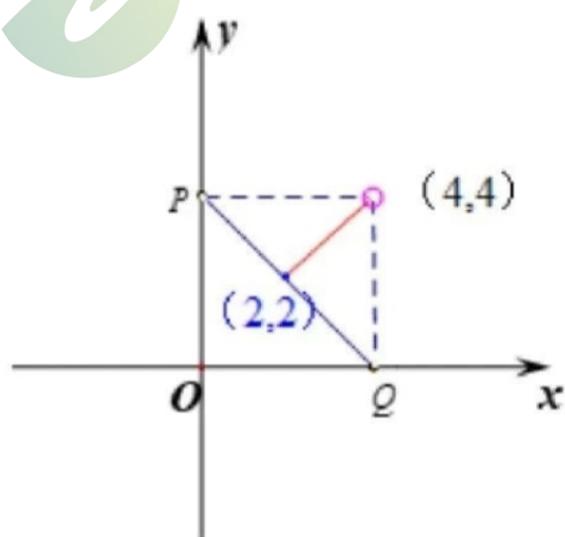
分析可知, 直线 $y = -\sqrt{3}x + b$ 与阴影区域有四个临界值, 结合含 30° 的直角三角形, 可以求得 b 的取值范围 $4 \leq b < 8\sqrt{7}$ 或 $-8\sqrt{7} < b \leq -4$ 。





【答案】

(1) B、C;



(2) $6 \leq DE \leq 4\sqrt{3}$;

(3) $4 \leq b < 8\sqrt{7}$ 或 $-8\sqrt{7} < b \leq -4$.

【反思】

- 1. 读题：**新定义试题重在理解定义，认真读题才能更好地理解题目和问题；
- 2. 画图：**本题属于“画圆或画弧”类型，考生在做题时，需要作出一系列的图形，才能更好地理解定义，并能体会此类试题的分析特点；
- 3. 计算：**此类试题计算量往往不是很大，属于“少算多思”类型。需要注意平面直角坐标系内，两点中点、两点距离等的处理方法；需要注意直线“斜率”对应的直角三角形三边关系；
- 4. 活动经验：**做题时需要注意问题设置之间的联系，要注意上一问对下一问的“提示”作用；
- 5. 易错点：**最后一问，要注意分类讨论，可以结合“对称”简化分析和计算；要注意“等号”能否取到，需要结合临界位置以及定义本身进行单独分析。
- 6. 同类练习：**“画圆或画弧”类型的新定义题目，在2020年的各区模拟试题中多次出现，感兴趣的考生可以参考公众号内的相关文章，趁热打铁，挑战自我，进一步体会此类试题的特点。