

2023 北京北师大二附中高一（上）期中

数 学

一、单选题（共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$, 那么 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{0, 3\}$ D. $\{-1, 3\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$
 C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$

3. 已知 $a < b < 0$, 则下列不等式中成立的是 ()

- A. $ab > b^2$ B. $|a| < |b|$ C. $ab < 0$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

4. 函数 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$ 的奇偶性是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数
 C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数，又是偶函数

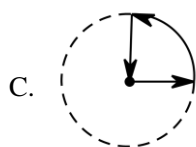
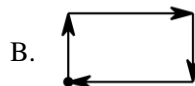
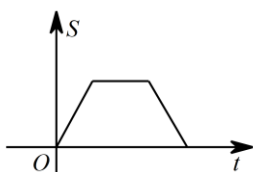
5. 函数 $f(x) = x^3 - x - 5$ 的零点所在的区间是 ()

- A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

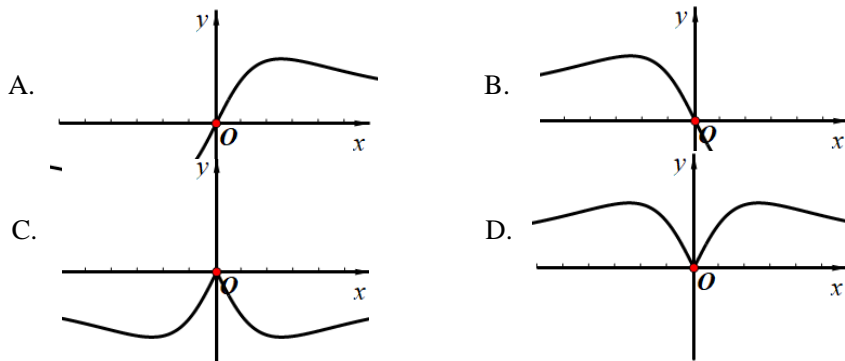
6. “ $m < \frac{1}{4}$ ”是“一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ ”有实数解的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 充分必要条件
 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 下图是王老师锻炼时所走的离家距离 (S) 与行走时间 (t) 之间的函数关系图, 若用黑点表示王老师家的位置, 则王老师行走的路线可能是 ()



21. 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 的图象大致为 ()



9. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 若 $x_1 < 0$ 且 $x_1 + x_2 > 0$, 则 ()

- A. $f(-x_1) > f(-x_2)$ B. $f(-x_1) = f(-x_2)$
 C. $f(-x_1) < f(-x_2)$ D. $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 大小不确定

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+2} - m|x|$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m > 1$ B. $0 < m < 1$ C. $1 < m < 2$ D. $m < -1$

二、填空题 (共 5 小题, 每题 5 分, 共 25 分)

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域是_____.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是_____.

13. 若正实数 x, y 满足: $x + 3y = 1$, 则 xy 的最大值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-1)) =$ _____; 若关于 x 的方程 $|f(x)| = k$ 恰有两个不同的解, 则实数 k 的取值范围是_____.

15. 若使集合 $A(k) = \{x \mid (kx - k^2 - 6)(x - 4) \geq 0, x \in \mathbf{Z}\}$ 中元素个数最少, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

16. (1) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 4\}$.

(1) 求 $(C_U A) \cap B$;

(2) 设非空集合 $D = \{x \mid a < x < 2a + 3, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $D \subseteq C_U A$, 求实数 a 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [2, 5]$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明你的结论;

(2) 求不等式 $f(m+1) < f(2m-1)$ 的解集.

18. 已知 $y = x^2 - x$, 且 $x \in (-1, 1)$.

(1) 求实数 y 的取值集合 M ;

(2) 设不等式 $(x-a)(x+a-2) < 0$ 的解集为 N , 若 $x \in N$ 是 $x \in M$ 的必要条件, 求 a 的取值范围.

19. 近年来, 中美贸易摩擦不断. 特别是美国对我国华为的限制. 尽管美国对华为极力封锁, 百般刁难, 并不断加大对各国的施压, 拉拢他们抵制华为 5G, 然而这并没有让华为却步. 华为在 2018 年不仅净利润创

下记录，海外增长同样强劲。今年，我国华为为了进一步增加市场竞争力，计划在 2023 年利用新技术生产某款新手机。通过市场分析，生产此款手机全年需投入固定成本 250 万，每生产 x （千部）手机，需另投入成本 $R(x)$ 万元，且

$$R(x) = \begin{cases} 10x^2 + 100x, & 0 < x < 40 \\ 701x + \frac{10000}{x} - 9450, & x \geq 40 \end{cases},$$

由市场调研知，每部手机售价 0.7 万元，且全年内生产的手机当年能全部销售完。

- (1) 求出 2020 年的利润 $W(x)$ （万元）关于年产量 x （千部）的函数解析式（利润 = 销售额 - 成本）；
- (2) 2020 年产量为多少（千部）时，企业所获利润最大？最大利润是多少？

20. 已知函数 $f(x)$ 为二次函数， $f(x)$ 的图象过点 $(0,2)$ ，对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$ ，函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上最小值为 $\frac{7}{4}$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式；
- (2) 当 $x \in [m-2, m]$ ， $m \in \mathbf{R}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值（用 m 表示）；
- (3) 若函数 $F(x) = f(x) - ax - 1$ 在 $(0,3)$ 上只有一个零点，求 a 的取值范围。

21. 设整数集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ ，其中 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{100} \leq 205$ ，且对于任意 $i, j (1 \leq i \leq j \leq 100)$ ，若 $i + j \in A$ ，则 $a_i + a_j \in A$ 。

- (1) 请写出一个满足条件的集合 A ；
- (2) 证明：任意 $x \in \{101, 102, \dots, 200\}$ ， $x \notin A$ ；
- (3) 若 $a_{100} = 205$ ，求满足条件的集合 A 的个数。