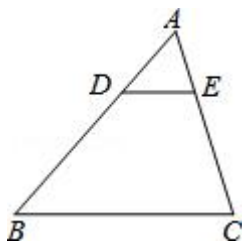




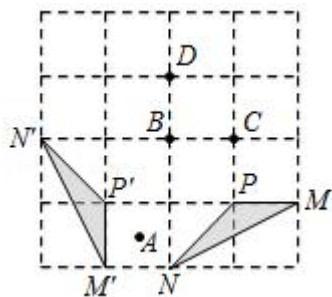
2019-2020 学年北京市朝阳区九年级（上）期末数学试卷

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

- （2 分）下列事件中，随机事件是（ ）
A. 通常温度降到 0°C 以下，纯净的水结冰
B. 随意翻到一本书的某页，这页的页码是偶数
C. 明天太阳从东方升起
D. 三角形的内角和是 360°
- （2 分）抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 的顶点坐标为（ ）
A. (2, 1) B. (2, -1) C. (-2, -1) D. (-2, 1)
- （2 分）只有 1 和它本身两个因数且大于 1 的自然数叫做素数，我国数学家陈景润在有关素数的“哥德巴赫猜想”的研究中取得了世界领先的成果。从 5, 7, 11 这 3 个素数中随机抽取一个，则抽到的数是 7 的概率是（ ）
A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1
- （2 分）把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 三边的长度都扩大为原来的 3 倍，则锐角 A 的余弦值（ ）
A. 不变 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$
C. 扩大为原来的 3 倍 D. 扩大为原来的 9 倍
- （2 分）如图， $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 AB, AC 上， $DE \parallel BC$ 。若 $AD=1, BD=2$ ，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为（ ）

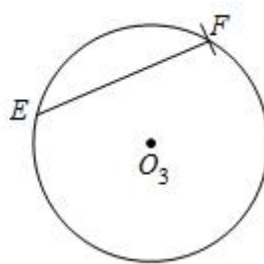
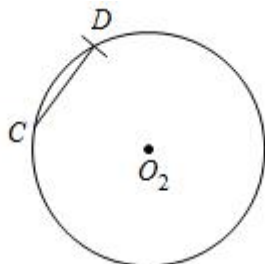
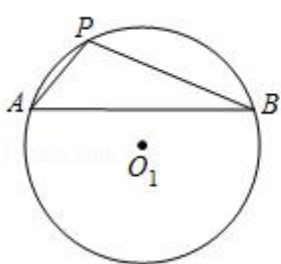


- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 1: 4 D. 1: 9
- （2 分）如图，在正方形网格中， $\triangle MPN$ 绕某一点旋转某一角度得到 $\triangle M' P' N'$ ，则旋转中心可能是（ ）



- A. 点A B. 点B C. 点C D. 点D

7. (2分) 已知 $\odot O_1$, $\odot O_2$, $\odot O_3$ 是等圆, $\triangle ABP$ 内接于 $\odot O_1$, 点C, E分别在 $\odot O_2$, $\odot O_3$ 上. 如图,



- ①以C为圆心, AP长为半径作弧交 $\odot O_2$ 于点D, 连接CD;
②以E为圆心, BP长为半径作弧交 $\odot O_3$ 于点F, 连接EF;

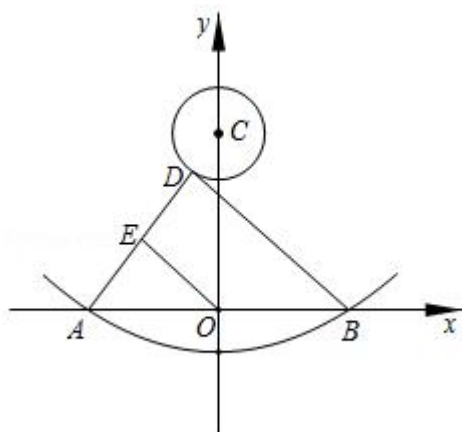
下面有四个结论:

- ① $CD+EF=AB$
② $\widehat{CD}+\widehat{EF}=\widehat{AB}$
③ $\angle CO_2D+\angle EO_3F=\angle AO_1B$
④ $\angle CDO_2+\angle EFO_3=\angle P$

所有正确结论的序号是 ()

- A. ①②③④ B. ①②③ C. ②④ D. ②③④

8. (2分) 如图, 抛物线 $y=\frac{1}{9}x^2-1$ 与x轴交于A, B两点, D是以点C(0, 4)为圆心, 1为半径的圆上的动点, E是线段AD的中点, 连接OE, BD, 则线段OE的最小值是 ()

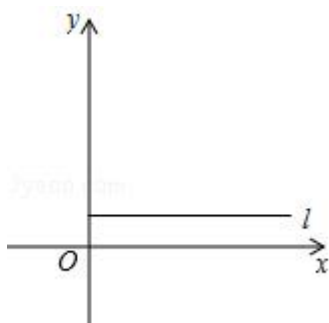


- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

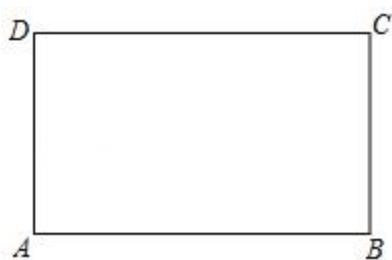
二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. (2分) 点 $(-1, -3)$ 关于原点的对称点的坐标为_____.

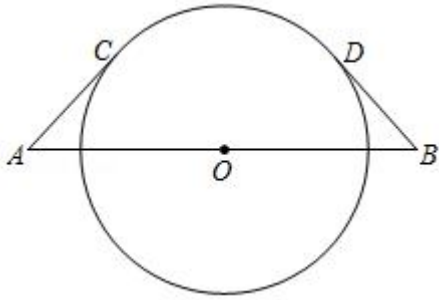
10. (2分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，射线 l 的端点为 $(0, 1)$ ， $l \parallel x$ 轴，请写出一个图象与射线 l 有公共点的反比例函数的表达式：_____.



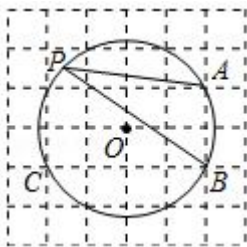
11. (2分) 如果一个矩形的宽与长的比等于黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618)，就称这个矩形为黄金矩形. 如图，矩形 $ABCD$ 为黄金矩形，宽 $AD = \sqrt{5}-1$ ，则长 AB 为_____.



12. (2分) 如图，线段 AB 经过 $\odot O$ 的圆心， AC ， BD 分别与 $\odot O$ 相切于点 C ， D . 若 $AC = BD = 1$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，则 \widehat{CD} 的长度为_____.



13. (2分) 如图, 在正方形网格中, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 并且都是小正方形的顶点, P 是 \widehat{ACB} 上任意一点, 则 $\angle P$ 的正切值为_____.



14. (2分) 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3$ 与 x 轴交于两点, 分别是 $(m, 0), (n, 0)$, 则 $m+n$ 的值为_____.
15. (2分) 为了打赢脱贫攻坚战, 某村计划将该村的特产柑橘运到 A 地进行销售. 由于受道路条件的限制, 需要先将柑橘由公路运到火车站, 再由铁路运到 A 地. 村里负责销售的人员从该村运到火车站的所有柑橘中随机抽取若干柑橘, 进行了“柑橘完好率”统计, 获得的数据记录如下表:

柑橘总质量 n/kg	100	150	200	250	300	350	400	450	500
完好柑橘质量 m/kg	92.40	138.45	183.80	229.50	276.30	322.70	367.20	414.45	459.50
柑橘完好的频率 $\frac{m}{n}$	0.924	0.923	0.919	0.918	0.921	0.922	0.918	0.921	0.919

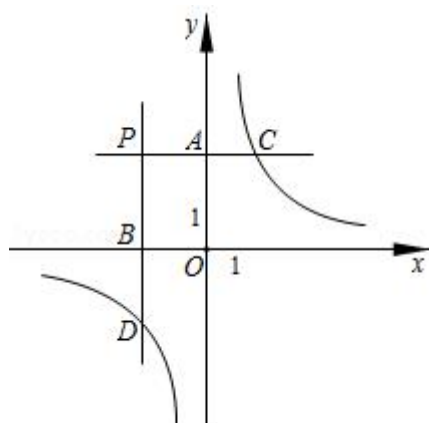
- ①估计从该村运到火车站柑橘完好的概率为_____ (结果保留小数点后三位);
- ②若从该村运到 A 地柑橘完好的概率为 0.880, 估计从火车站运到 A 地柑橘完好的概率为_____.
16. (2分) 如图, 分别过第二象限内的点 P 作 x, y 轴的平行线, 与 y, x 轴分别交于点 $A,$



B ，与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 分别交于点 C, D 。下面三个结论，

- ① 存在无数个点 P 使 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD}$;
- ② 存在无数个点 P 使 $S_{\triangle POA} = S_{\triangle POB}$;
- ③ 存在无数个点 P 使 $S_{\text{四边形} OAPB} = S_{\triangle ACD}$.

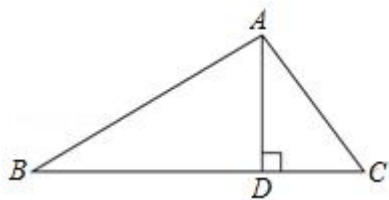
所有正确结论的序号是_____.



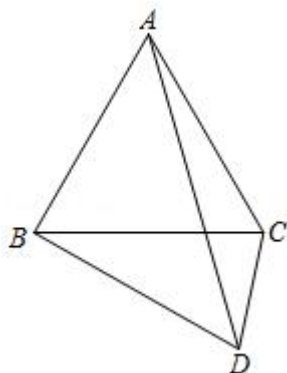
三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27，28 题，每小题 5 分）

17. (5 分) 计算: $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$.

18. (5 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $\tan C = \frac{4}{3}$ ， $AD \perp BC$ 于点 D 。若 $AB = 8$ ，求 BC 的长。



19. (5 分) 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，将 BC 边绕点 B 顺时针旋转 30° ，得到线段 BD ，连接 AD, CD ，求 $\angle ADC$ 的度数。



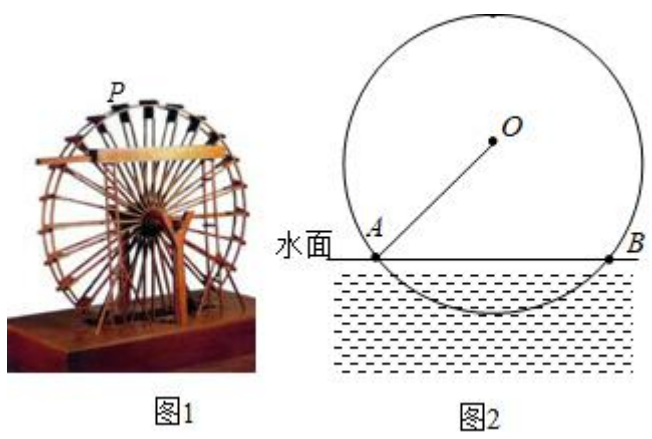


20. (5分) 已知一次函数 $y_1=kx+m$ ($k \neq 0$) 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 部分自变量和对应的函数值如下表:

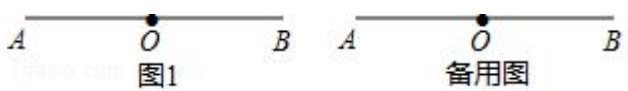
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y_1	...	0	1	2	3	4	...
y_2	...	0	-1	0	3	8	...

- (1) 求 y_2 的表达式;
- (2) 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c > kx+m$ 的解集是_____.

21. (5分) 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 彰显了我国古代劳动人民的智慧, 图1, 点 P 表示筒车的一个盛水桶. 如图2, 当筒车工作时, 盛水桶的运行路径是以轴心 O 为圆心, $5m$ 为半径的圆, 且圆心在水面上方. 若圆被水面截得的弦 AB 长为 $8m$, 求筒车工作时, 盛水桶在水面以下的最大深度.



22. (5分) 在平面内, O 为线段 AB 的中点, 所有到点 O 的距离等于 OA 的点组成图形 W . 取 OA 的中点 C , 过点 C 作 $CD \perp AB$ 交图形 W 于点 D , D 在直线 AB 的上方, 连接 AD , BD .



- (1) 求 $\angle ABD$ 的度数;
- (2) 若点 E 在线段 CA 的延长线上, 且 $\angle ADE = \angle ABD$, 求直线 DE 与图形 W 的公共点个数.

23. (6分) 阅读下面材料:
小军遇到这样一个问题: 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$. 若 $\angle ACB = 45^\circ$, $AP=1$, 求 BP 的长.

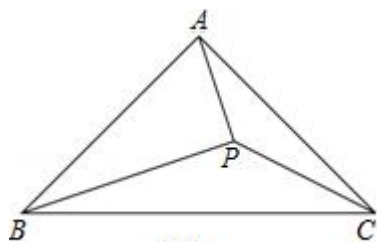


图1

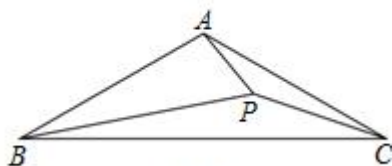


图2

小军的思路是：根据已知条件可以证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，进一步推理可得 BP 的长.

请回答： $\because AB=AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$$

$$\because \angle PCB = \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PCA = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\because \angle PAC = \angle PCB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP.$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB}.$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\because AP = 1,$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}.$$

$$\therefore PB = \underline{\hspace{2cm}}.$$

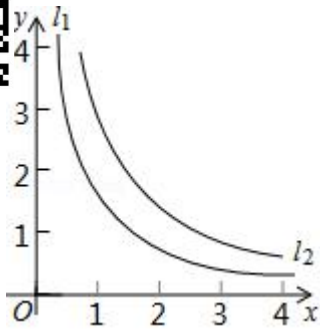
参考小军的思路，解决问题：

如图2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ 。若 $\angle ACB = 30^\circ$ ，求 $\frac{AP}{BP}$ 的值：

24. (6分) 点 A 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_1 上一点，直线 $AB \parallel x$ 轴，交反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_2 于点 B ，直线 $AC \parallel y$ 轴，交 l_2 于点 C ，直线 $CD \parallel x$ 轴，交 l_1 于点 D 。

(1) 若点 $A(1, 1)$ ，求线段 AB 和 CD 的长度；

(2) 对于任意的点 $A(a, b)$ ，判断线段 AB 和 CD 的大小关系，并证明。



25. (6分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 BA 延长线上的定点, M 为 BC 边上的一个动点, 连接 ME , 将射线 ME 绕点 M 顺时针旋转 76° , 交射线 CD 于点 F , 连接 MD .

小东根据学习函数的经验, 对线段 BM , DF , DM 的长度之间的关系进行了探究.

下面是小东探究的过程, 请补充完整:

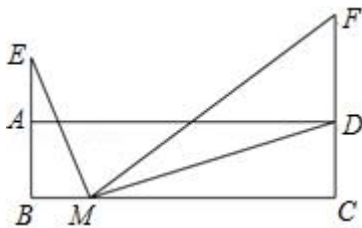
(1) 对于点 M 在 BC 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 BM , DF , DM 的长度的几组值, 如下表:

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8	位置 9
BM/cm	0.00	0.53	1.00	1.69	2.17	2.96	3.46	3.79	4.00
DF/cm	0.00	1.00	1.74	2.49	2.69	2.21	1.14	0.00	1.00
DM/cm	4.12	3.61	3.16	2.52	2.09	1.44	1.14	1.02	1.00

在 BM , DF , DM 的长度这三个量中, 确定_____的长度是自变量, _____的长度和_____的长度都是这个自变量的函数;

(2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;

(3) 结合画出的函数图象, 解决问题: 当 $DF=2cm$ 时, DM 的长度约为_____ cm .



26. (6分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过点 $(3, 3)$.

(1) 用含 a 的式子表示 b ;

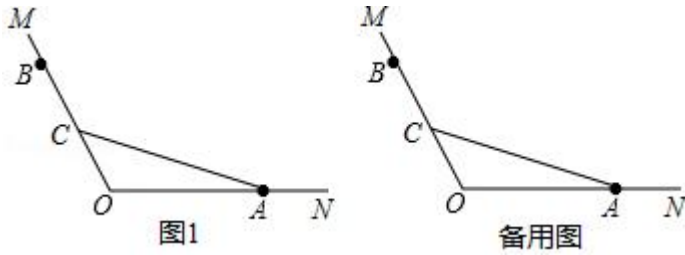
(2) 直线 $y=x+4a+4$ 与直线 $y=4$ 交于点 B , 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示);

(3) 在 (2) 的条件下, 已知点 $A(1, 4)$, 若抛物线与线段 AB 恰有一个公共点, 直接写出 a ($a < 0$) 的取值范围.

27. (7分) 已知 $\angle MON=120^\circ$, 点 A, B 分别在 ON, OM 边上, 且 $OA=OB$, 点 C 在线



段 OB 上 (不与点 O, B 重合), 连接 CA . 将射线 CA 绕点 C 逆时针旋转 120° 得到射线 CA' , 将射线 BO 绕点 B 逆时针旋转 150° 与射线 CA' 交于点 D .



(1) 根据题意补全图 1;

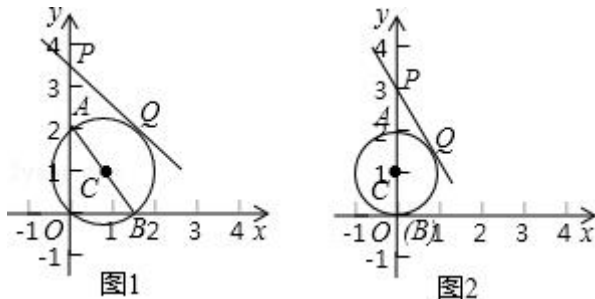
(2) 求证:

① $\angle OAC = \angle DCB$;

② $CD = CA$ (提示: 可以在 OA 上截取 $OE = OC$, 连接 CE);

(3) 点 H 在线段 AO 的延长线上, 当线段 OH, OC, OA 满足什么等量关系时, 对于任意的点 C 都有 $\angle DCH = 2\angle DAH$, 写出你的猜想并证明.

28. (7分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0, 2)$, 点 B 在 x 轴上, 以 AB 为直径作 $\odot C$, 点 P 在 y 轴上, 且在点 A 上方, 过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ , Q 为切点, 如果点 Q 在第一象限, 则称 Q 为点 P 的离点. 例如, 图 1 中的 Q 为点 P 的一个离点.



(1) 已知点 $P(0, 3)$, Q 为 P 的离点.

① 如图 2, 若 $B(0, 0)$, 则圆心 C 的坐标为 _____, 线段 PQ 的长为 _____;

② 若 $B(2, 0)$, 求线段 PQ 的长;

(2) 已知 $1 \leq PA \leq 2$, 直线 $l: y = kx + k + 3$ ($k \neq 0$).

① 当 $k = 1$ 时, 若直线 l 上存在 P 的离点 Q , 则点 Q 纵坐标 t 的最大值为 _____;

② 记直线 $l: y = kx + k + 3$ ($k \neq 0$) 在 $-1 \leq x \leq 1$ 的部分为图形 G , 如果图形 G 上存在 P 的离点, 直接写出 k 的取值范围.



2019-2020 学年北京市朝阳区九年级（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. (2 分) 下列事件中，随机事件是 ()

- A. 通常温度降到 0°C 以下，纯净的水结冰
- B. 随意翻到一本书的某页，这页的页码是偶数
- C. 明天太阳从东方升起
- D. 三角形的内角和是 360°

【分析】 根据随机事件的意义，这个选项进行判断即可。

【解答】 解：“通常温度降到 0°C 以下，纯净的水结冰”是必然事件；

“随意翻到一本书的某页，这页的页码可能是偶数，也可能是奇数”因此选项 B 符合题意；

“明天太阳从东方升起”是必然事件，不符合题意；

“三角形的内角和是 180° ”因此“三角形的内角和是 360° ”是确定事件中的不可能事件，不符合题意；

故选：B.

【点评】 考查随机事件的意义，可能发生，也可能不发生的事件是随机事件，理解意义是关键。

2. (2 分) 抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 的顶点坐标为 ()

- A. (2, 1)
- B. (2, -1)
- C. (-2, -1)
- D. (-2, 1)

【分析】 抛物线的顶点式为： $y = a(x - h)^2 + k$ ，其顶点坐标是 (h, k) ，可以确定抛物线的顶点坐标。

【解答】 解：抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 是以抛物线的顶点式给出的，

其顶点坐标为：(2, 1).

故选：A.

【点评】 本题考查的是抛物线的性质，根据抛物线的顶点式确定抛物线的顶点坐标。

3. (2 分) 只有 1 和它本身两个因数且大于 1 的自然数叫做素数，我国数学家陈景润在有关



素数的“哥德巴赫猜想”的研究中取得了世界领先的成果. 从 5, 7, 11 这 3 个素数中随机抽取一个, 则抽到的数是 7 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

【分析】根据概率 = 所求情况数与总情况数之比解答即可.

【解答】解: \because 共 3 个素数, 分别是 5, 7, 11,

\therefore 抽到的数是 7 的概率是 $\frac{1}{3}$;

故选: C.

【点评】本题考查了概率的知识. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

4. (2 分) 把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 三边的长度都扩大为原来的 3 倍, 则锐角 A 的余弦值 ()

- A. 不变 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$
C. 扩大为原来的 3 倍 D. 扩大为原来的 9 倍

【分析】根据相似三角形的性质解答.

【解答】解: 三边的长度都扩大为原来的 3 倍,

则所得的三角形与原三角形相似,

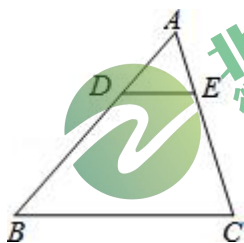
\therefore 锐角 A 的大小不变,

\therefore 锐角 A 的余弦值不变,

故选: A.

【点评】本题考查的是相似三角形的判定和性质、锐角三角函数的定义, 掌握相似三角形的对应角相等是解题的关键.

5. (2 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, $DE \parallel BC$. 若 $AD=1, BD=2$, 则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 ()



- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 1: 4 D. 1: 9

【分析】由 $DE \parallel BC$ 可得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形的性质即可求出 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

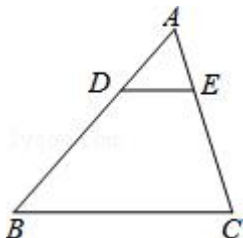
【解答】解: $\because DE \parallel BC$,



$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

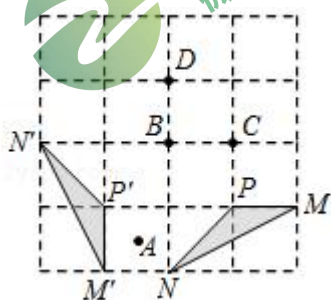
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+2}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

故选：D.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，牢记相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

6. (2分) 如图，在正方形网格中， $\triangle MPN$ 绕某一点旋转某一角度得到 $\triangle M'P'N'$ ，则旋转中心可能是



A. 点 A

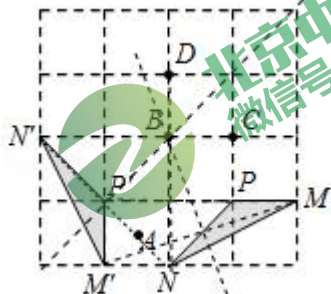
B. 点 B

C. 点 C

D. 点 D

【分析】 连接 PP' 、 NN' 、 MM' ，作 PP' 的垂直平分线，作 NN' 的垂直平分线，作 MM' 的垂直平分线，交点为旋转中心.

【解答】 解：如图，



$\therefore \triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度，得到 $\triangle M'N'P'$ ，

\therefore 连接 PP' 、 NN' 、 MM' ，

作 PP' 的垂直平分线，作 NN' 的垂直平分线，作 MM' 的垂直平分线，



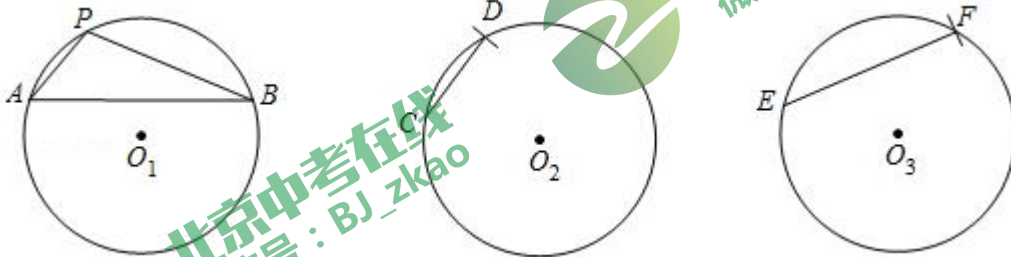
∴三条线段的垂直平分线正好都过 B ,

即旋转中心是 B .

故选: B .

【点评】 本题考查了学生的理解能力和观察图形的能力, 注意: 旋转时, 对应顶点到旋转中心的距离应相等且旋转角也相等, 对称中心在连接对应点线段的垂直平分线上.

7. (2分) 已知 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 是等圆, $\triangle ABP$ 内接于 $\odot O_1$, 点 C, E 分别在 $\odot O_2, \odot O_3$ 上. 如图,



①以 C 为圆心, AP 长为半径作弧交 $\odot O_2$ 于点 D , 连接 CD ;

②以 E 为圆心, BP 长为半径作弧交 $\odot O_3$ 于点 F , 连接 EF ;

下面有四个结论:

① $CD+EF=AB$

② $\widehat{CD}+\widehat{EF}=\widehat{AB}$

③ $\angle CO_2D+\angle EO_3F=\angle AO_1B$

④ $\angle CDO_2+\angle EFO_3=\angle P$

所有正确结论的序号是 ()

A. ①②③④

B. ①②③

C. ②④

D. ②③④

【分析】 根据圆心角、弧、弦的关系; 圆周角定理即可得到结论.

【解答】 解: 由题意得, $AP=CD, BP=EF$,

∵ $AP+BP>AB$,

∴ $CD+EF>AB$;

∵ $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 是等圆,

∴ $\widehat{AP}=\widehat{CD}, \widehat{BP}=\widehat{EF}$,

∴ $\widehat{AP}+\widehat{BP}=\widehat{AB}$,

∴ $\widehat{CD}+\widehat{EF}=\widehat{AB}$;



$$\therefore \angle CO_2D = \angle AO_1P, \quad \angle EO_3F = \angle BO_1P,$$

$$\therefore \angle AO_1P + \angle BO_1P = \angle AOB,$$

$$\therefore \angle CO_2D + \angle EO_3F = \angle AOB;$$

$$\therefore \angle CDO_2 = \angle APO_1, \quad \angle BPO_1 = \angle EFO_3,$$

$$\therefore \angle P = \angle APO_1 + \angle BPO_1,$$

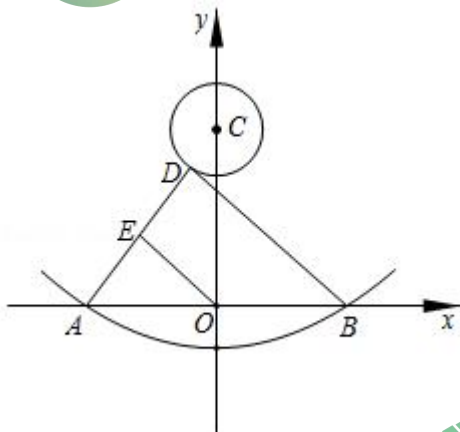
$$\therefore \angle CDO_2 + \angle EFO_3 = \angle P,$$

\therefore 正确结论的序号是②③④,

故选: D.

【点评】 本题考查了三角形的外接圆与外心, 圆心角、弧、弦的关系, 圆周角定理, 熟练掌握圆心角、弧、弦的关系是解题的关键.

8. (2分) 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点, D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心, 1 为半径的圆上的动点, E 是线段 AD 的中点, 连接 OE, BD , 则线段 OE 的最小值是 ()



- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【分析】 根据抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 可得 A, B 两点坐标, D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心, 根据勾股定理可求 BC 的长为 5, E 是线段 AD 的中点, 再根据三角形中位线, BD 最小, OE 就最小.

【解答】 解: \because 抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点,

$\therefore A, B$ 两点坐标为 $(-3, 0), (3, 0)$,

$\because D$ 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心,

根据勾股定理, 得



$BC=5$,

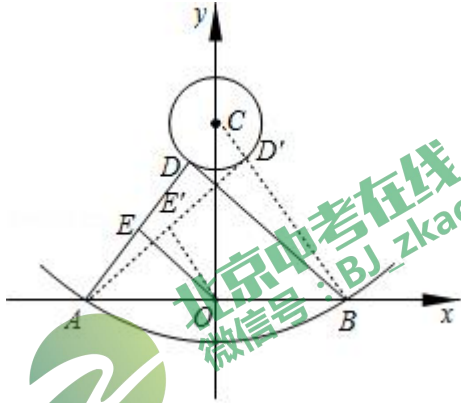
$\because E$ 是线段 AD 的中点, O 是 AB 中点,

$\therefore OE$ 是三角形 ABD 的中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BD,$$

即点 B 、 D 、 C 共线时, BD 最小, OE 就最小.

如图, 连接 BC 交圆于点 D' ,



$$\therefore BD' = BC - CD' = 5 - 1 = 4,$$

$$\therefore OE' = 2.$$

所以线段 OE 的最小值为 2.

故选: A .

【点评】 本题考查了点与圆的位置关系、抛物线与 x 轴的交点、三角形中位线定理, 解决本题的关键是点 B 、 D 、 C 共线问题.

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. (2 分) 点 $(-1, -3)$ 关于原点的对称点的坐标为 $(1, 3)$.

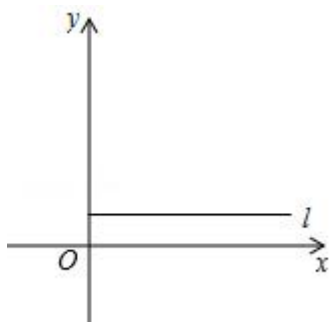
【分析】 直接利用关于原点对称点的性质得出答案.

【解答】 解: 点 $(-1, -3)$ 关于原点的对称点的坐标为: $(1, 3)$.

故答案为: $(1, 3)$.

【点评】 此题主要考查了关于原点对称点的性质, 正确记忆横纵坐标的关系是解题关键.

10. (2 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 射线 l 的端点为 $(0, 1)$, $l \parallel x$ 轴, 请写出一个图象与射线 l 有公共点的反比例函数的表达式: 答案不唯一, 如 $y = \frac{1}{x}$.



【分析】直接利用射线的特点得出符合题意的反比例函数解析式.

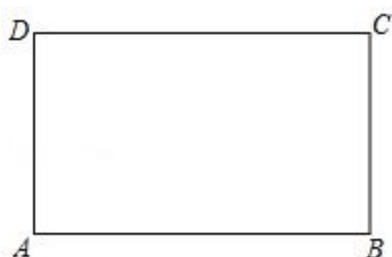
【解答】解: \because 射线 l 的端点为 $(0, 1)$, $l \parallel x$ 轴,

\therefore 写出一个图象与射线 l 有公共点的反比例函数的表达式: 答案不唯一, 如 $y = \frac{1}{x}$.

故答案为: 答案不唯一, 如 $y = \frac{1}{x}$.

【点评】此题主要考查了待定系数法求反比例函数解析式, 正确得出反比例函数图象上点的纵坐标为 1 是解题关键.

11. (2分) 如果一个矩形的宽与长的比等于黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618), 就称这个矩形为黄金矩形. 如图, 矩形 $ABCD$ 为黄金矩形, 宽 $AD = \sqrt{5}-1$, 则长 AB 为 2.



【分析】判断黄金矩形的依据是: 宽与长之比为 0.618, 根据已知条件即可得出答案.

【解答】解: \because 矩形 $ABCD$ 是黄金矩形, 且 $AD = \sqrt{5}-1$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

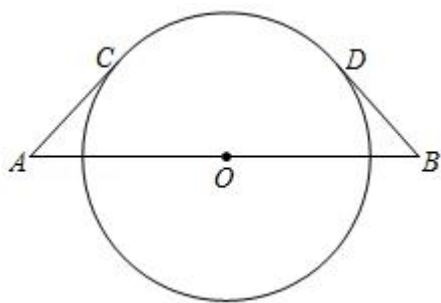
$$\frac{\sqrt{5}-1}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore AB = 2,$$

故答案为 2.

【点评】本题主要考查了黄金分割点的概念, 需要熟记黄金比的值, 难度适中.

12. (2分) 如图, 线段 AB 经过 $\odot O$ 的圆心, AC, BD 分别与 $\odot O$ 相切于点 C, D . 若 $AC = BD = 1$, $\angle A = 45^\circ$, 则 \widehat{CD} 的长度为 $\frac{\pi}{2}$.



【分析】连接 OC 、 OD ，根据切线性质的和 $\angle A=45^\circ$ ，易证得 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 是等腰直角三角形，进而求得 $OC=OD=1$ ， $\angle COD=90^\circ$ ，根据弧长公式求得即可。

【解答】解：连接 OC 、 OD ，

$\because AC, BD$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 C, D 。

$\therefore OC \perp AC, OD \perp BD$ ，

$\because \angle A=45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC=45^\circ$ ，

$\therefore AC=OC=1$ ，

$\because AC=BD=1, OC=OD=1$ ，

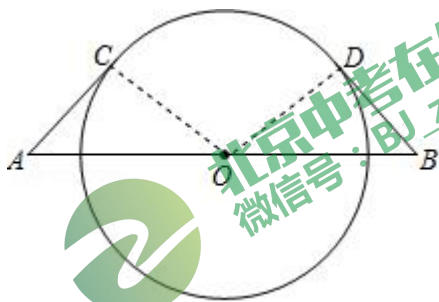
$\therefore OD=BD$ ，

$\therefore \angle BOD=45^\circ$ ，

$\therefore \angle COD=180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ，

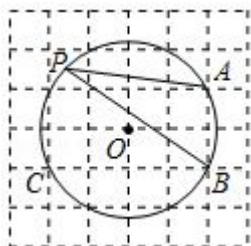
$\therefore \widehat{CD}$ 的长度为： $\frac{90 \cdot \pi \times 1}{180} = \frac{1}{2}\pi$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}\pi$ 。



【点评】本题考查了切线的性质，等腰直角三角形的判定和性质，弧长的计算等，证得 $\angle COD=90^\circ$ 是解题的关键。

13. (2分) 如图，在正方形网格中，点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，并且都是小正方形的顶点， P 是 \widehat{ACB} 上任意一点，则 $\angle P$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$ 。



【分析】 连接 OA 、 OB ，作 $OD \perp AB$ 于 D ，如图，利用等腰三角形的性质和圆周角定理得到 $\angle AOD = \angle APB$ ，再利用正切的性质得到 $\tan \angle AOD = \frac{1}{2}$ ，从而得到 $\tan \angle P$ 的值。

【解答】 解：连接 OA 、 OB ，作 $OD \perp AB$ 于 D ，如图，

$$\because OA = OB, OD \perp AB,$$

$$\therefore \angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

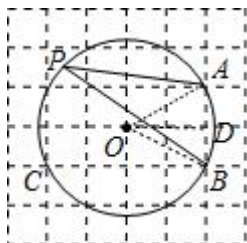
$$\because \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle APB,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOD \text{ 中, } \tan \angle AOD = \frac{AD}{OD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle P = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$ 。



【点评】 本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半，也考查了正切的定义。

14. (2分) 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3$ 与 x 轴交于两点，分别是 $(m, 0)$ ， $(n, 0)$ ，则 $m+n$ 的值为 2。

【分析】 根据根与系数的关系解答即可。

【解答】 解： \because 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3$ 与 x 轴交于两点，分别是 $(m, 0)$ ， $(n, 0)$ ，

$$\therefore m+n = -\frac{-2a}{a} = 2.$$

故答案是：2。

【点评】 考查了抛物线与 x 轴的交点，解题时，利用了抛物线解析式与一元二次方程间



的转化关系以及根与系数的关系求得答案.

15. (2分) 为了打赢脱贫攻坚战, 某村计划将该村的特产柑橘运到 A 地进行销售. 由于受道路条件的限制, 需要先将柑橘由公路运到火车站, 再由铁路运到 A 地. 村里负责销售的人员从该村运到火车站的所有柑橘中随机抽取若干柑橘, 进行了“柑橘完好率”统计, 获得的数据记录如下表:

柑橘总质量 n/kg	100	150	200	250	300	350	400	450	500
完好柑橘质量 m/kg	92.40	138.45	183.80	229.50	276.30	322.70	367.20	414.45	459.50
柑橘完好的频率 $\frac{m}{n}$	0.924	0.923	0.919	0.918	0.921	0.922	0.918	0.921	0.919

- ① 估计从该村运到火车站柑橘完好的概率为 0.920 (结果保留小数点后三位);
- ② 若从该村运到 A 地柑橘完好的概率为 0.880, 估计从火车站运到 A 地柑橘完好的概率为 $\frac{22}{23}$.

【分析】 (1) 根据表格中频率的变化情况, 估计概率即可;

(2) 根据完好的概率进行列方程求解即可.

【解答】 解: (1) 根据抽查的柑橘完好的频率, 大约集中在 0.920 上下波动, 因此估计柑橘的完好的概率为 0.920,

故答案为: 0.920;

(2) 设总质量为 m 千克, 从火车站运到 A 地柑橘完好的概率为 x , 由题意得,

$$m \times 0.920 \times x = m \times 0.880,$$

$$\text{解得, } x = \frac{22}{23},$$

$$\text{故答案为: } \frac{22}{23}.$$

【点评】 考查频率估计概率, 理解完好的概率的意义是正确解答的关键.

16. (2分) 如图, 分别过第二象限内的点 P 作 x , y 轴的平行线, 与 y , x 轴分别交于点 A , B , 与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 分别交于点 C , D . 下面三个结论,

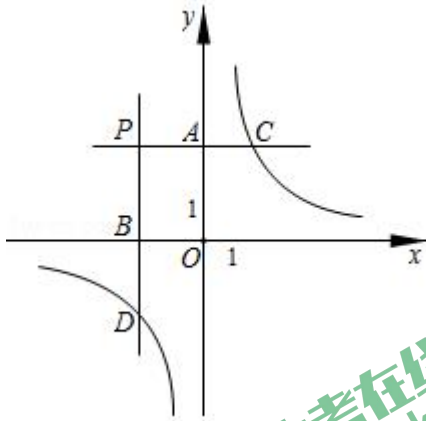
- ① 存在无数个点 P 使 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD}$;



②存在无数个点 P 使 $S_{\triangle POA} = S_{\triangle POB}$;

③存在无数个点 P 使 $S_{\text{四边形} OAPB} = S_{\triangle ACD}$.

所有正确结论的序号是 ①②③.



【分析】如图, 设 $C(m, \frac{6}{m})$, $D(n, \frac{6}{n})$, 则 $P(n, \frac{6}{m})$, 利用反比例函数 k 的几何意义得到 $S_{\triangle AOC} = 3$, $S_{\triangle BOD} = 3$, 则可对①进行判断; 根据三角形面积公式可对②进行判断; 通过计算 $S_{\text{四边形} OAPB}$ 和 $S_{\triangle ACD}$ 得到 m 与 n 的关系可对③进行判断.

【解答】解: 如图, 设 $C(m, \frac{6}{m})$, $D(n, \frac{6}{n})$, 则 $P(n, \frac{6}{m})$,

$$\because S_{\triangle AOC} = 3, S_{\triangle BOD} = 3,$$

$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD}$; 所以①正确;

$$\because S_{\triangle POA} = -\frac{1}{2}n \times \frac{6}{m} = -\frac{3}{m}, S_{\triangle POB} = -\frac{1}{2}n \times \frac{6}{n} = -\frac{3}{m},$$

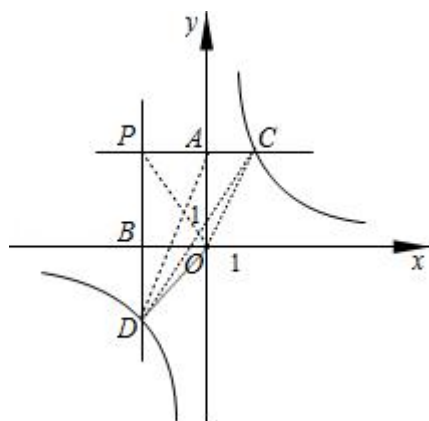
$\therefore S_{\triangle POA} = S_{\triangle POB}$; 所以②正确;

$$\because S_{\text{四边形} OAPB} = -n \times \frac{6}{m} = -\frac{6n}{m}, S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times m \times (\frac{6}{m} - \frac{6}{n}) = 3 - \frac{3m}{n},$$

\therefore 当 $-\frac{6n}{m} = 3 - \frac{3m}{n}$, 即 $m^2 - mn - 2n^2 = 0$, 所以 $m = 2n$ (舍去) 或 $m = -n$, 此时 P 点为无数个, 所以③正确.

故答案为①②③.





【点评】本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义：在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象中任取一点，过这一个点向 x 轴和 y 轴分别作垂线，与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$ 。也考查了反比例函数图象上点的坐标特征。

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27，28 题，每小题 5 分）

17.（5 分）计算： $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$.

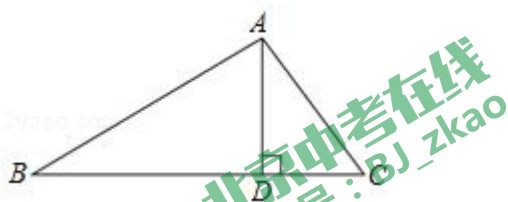
【分析】直接利用特殊角的三角函数值分别代入得出答案.

【解答】解：原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= 1$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18.（5 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $\tan C = \frac{4}{3}$ ， $AD \perp BC$ 于点 D 。若 $AB = 8$ ，求 BC 的长。



【分析】根据直角三角形中 30° 角所对的直角边是斜边的一半可以求得 AD 的长，然后即可求得 BD 的长，再根据 AD 的长和 $\tan C = \frac{4}{3}$ ，可以求得 CD 的长，从而可以求得 BC 的长，本题得以解决.

【解答】解： $\because AD \perp BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$.

\because 在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 8$,



$$\therefore AD=4, BD=4\sqrt{3},$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \tan C = \frac{4}{3}, AD=4,$$

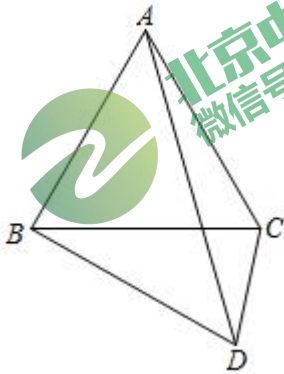
$$\therefore CD = \frac{4}{\tan C},$$

$$\therefore CD=3.$$

$$\therefore BC=BD+CD=4\sqrt{3}+3.$$

【点评】 本题考查解直角三角形、勾股定理、含 30° 角的直角三角形，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

19. (5分) 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，将 BC 边绕点 B 顺时针旋转 30° ，得到线段 BD ，连接 AD ， CD ，求 $\angle ADC$ 的度数。



【分析】 首先证明 $\angle ABD=90^\circ$ ，求出 $\angle BDC$ ， $\angle ADB$ 即可解决问题。

【解答】 解： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AB=BC, \angle ABC=60^\circ.$$

根据题意可知 $BD=BC, \angle DBC=30^\circ$ 。

$$\therefore AB=BD.$$

$$\therefore \angle ABD=90^\circ, \angle BDC=75^\circ.$$

$$\therefore \angle BDA=45^\circ.$$

$$\therefore \angle ADC=30^\circ.$$

【点评】 本题考查旋转变换，等边三角形的性质，等腰直角三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

20. (5分) 已知一次函数 $y_1=kx+m$ ($k \neq 0$) 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 部分自变量和对应的函数值如下表：

x	\dots	-2	-1	0	1	2	\dots
-----	---------	----	----	---	---	---	---------



y_1	...	0	1	2	3	4	...
y_2	...	0	-1	0	3	8	...

(1) 求 y_2 的表达式;

(2) 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>kx+m$ 的解集是 $x<-2$ 或 $x>1$.

【分析】(1) 根据题意设出 y_2 的表达式, 再把 $(0, 0)$ 代入, 求出 a 的值, 即可得出 y_2 的表达式;

(2) 利用表中数据得到直线与抛物线的交点为 $(-2, 0)$ 和 $(1, 3)$, $x<-2$ 或 $x>1$ 时, $y_2>y_1$, 从而得出不等式 $ax^2+bx+c>kx+m$ 的解集.

【解答】解: (1) 根据题意设 y_2 的表达式为:

$$y_2=a(x+1)^2-1,$$

把 $(0, 0)$ 代入得 $a=1$,

$$\therefore y_2=x^2+2x;$$

(2) 当 $x=-2$ 时, $y_1=y_2=0$; 当 $x=1$ 时, $y_1=y_2=3$;

\therefore 直线与抛物线的交点为 $(-2, 0)$ 和 $(1, 3)$,

而 $x<-2$ 或 $x>1$ 时, $y_2>y_1$,

\therefore 不等式 $ax^2+bx+c>kx+m$ 的解集是 $x<-2$ 或 $x>1$.

故答案为: $x<-2$ 或 $x>1$.

【点评】本题考查了二次函数与不等式: 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与不等式的关系, 利用两个函数图象在直角坐标系中的上下位置关系求自变量的取值范围, 可作图利用交点直观求解, 也可把两个函数解析式列成不等式求解.

21. (5分) 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 彰显了我国古代劳动人民的智慧, 图1, 点 P 表示筒车的一个盛水桶. 如图2, 当筒车工作时, 盛水桶的运行路径是以轴心 O 为圆心, $5m$ 为半径的圆, 且圆心在水面上方. 若圆被水面截得的弦 AB 长为 $8m$, 求筒车工作时, 盛水桶在水面以下的最大深度.



图1

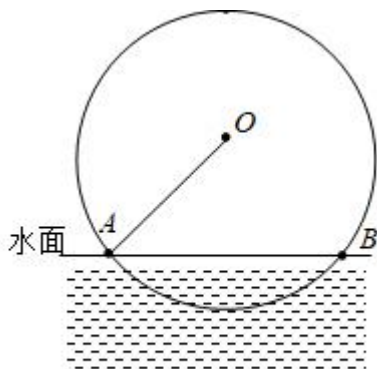


图2

【分析】过 O 点作半径 $OD \perp AB$ 于 E , 如图, 利用垂径定理得到 $AE=BE=4$, 再利用勾股定理计算出 OE , 然后计算出 DE 的长即可.

【解答】解: 过 O 点作半径 $OD \perp AB$ 于 E , 如图,

$$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,$

$$\therefore ED=OD-OE=5-3=2,$$

答: 筒车工作时, 盛水桶在水面以下的最大深度为 2m .

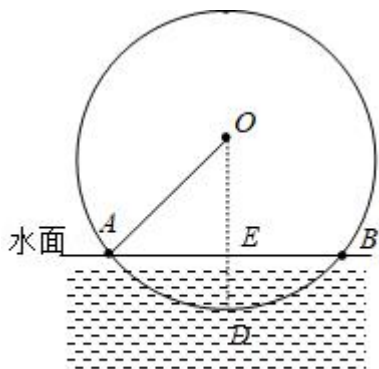


图2

【点评】本题考查了垂径定理: 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧.

22. (5分) 在平面内, O 为线段 AB 的中点, 所有到点 O 的距离等于 OA 的点组成图形 W . 取 OA 的中点 C , 过点 C 作 $CD \perp AB$ 交图形 W 于点 D , D 在直线 AB 的上方, 连接 AD , BD .

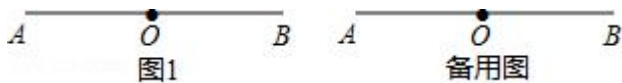


图1

备用图

(1) 求 $\angle ABD$ 的度数;

(2) 若点 E 在线段 CA 的延长线上, 且 $\angle ADE = \angle ABD$, 求直线 DE 与图形 W 的公共点



个数.

【分析】(1) 根据题意, 图形 W 为以 O 为圆心, OA 为直径的圆. 如图 1, 连接 OD , 根据等边三角形的判定与性质即可求解;

(2) 根据切线的判定即可求解.

【解答】解: (1) 根据题意, 图形 W 为以 O 为圆心, OA 为直径的圆.

如图 1, 连接 OD ,

$$\therefore OA = OD.$$

\because 点 C 为 OA 的中点, $CD \perp AB$,

$$\therefore AD = OD.$$

$$\therefore OA = OD = AD.$$

$\therefore \triangle OAD$ 是等边三角形.

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ .$$

(2) 如图 2,

$$\because \angle ADE = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ .$$

$$\because \angle ADO = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle ODE = 90^\circ .$$

$$\therefore OD \perp DE.$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

\therefore 直线 DE 与图形 W 的公共点个数为 1.

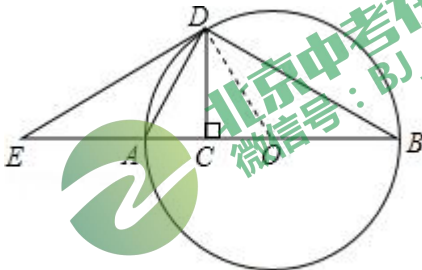


图2

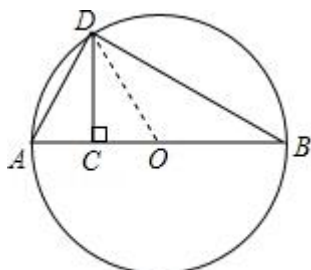


图1

【点评】考查了圆的认识，切线的判定，切线必须满足两个条件：a、经过半径的外端；b、垂直于这条半径，否则就不是圆的切线。

23. (6分) 阅读下面材料：

小军遇到这样一个问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ 。若 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AP=1$ ，求 BP 的长。

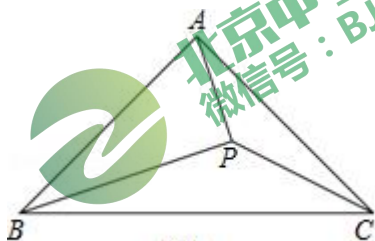


图1

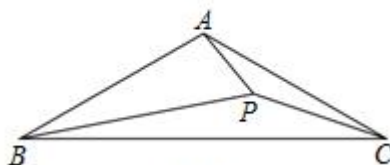


图2

小军的思路是：根据已知条件可以证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，进一步推理可得 BP 的长。

请回答： $\because AB=AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$$

$$\because \angle PCB = \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PCA = \underline{\angle PBC}.$$

$$\because \angle PAC = \angle PCB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP.$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB}.$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\because AP=1,$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}.$$

$$\therefore PB = \underline{2}.$$



参考小军的思路，解决问题：

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$ 。若 $\angle ACB=30^\circ$ ，求 $\frac{AP}{BP}$ 的值；

【分析】阅读材料：证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ 。得出 $\frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB}$ 。由等腰直角三角形的性质

得出 $CB = \sqrt{2}AC$ 得出 $\frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $PC = \sqrt{2}AP = \sqrt{2}$ 。得出 $PB = \sqrt{2}PC = 2$ 。

解决问题：证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ 。得出 $\frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，设 $AP = a$ ，则 $PC = \sqrt{3}a$ ，

得出 $PB = 3a$ 。即可得出 $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{3}$ 。

【解答】阅读材料：

解： $\because AB=AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ 。

$\because \angle PCB = \angle PBA$ ，

$\therefore \angle PCA = \angle PBC$ 。

$\because \angle PAC = \angle PCB$ ，

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP$ 。

$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB}$ 。

$\because \angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ 。

$\therefore CB = \sqrt{2}AC$ ，

$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

$\therefore AP = 1$ ，

$\therefore PC = \sqrt{2}AP = \sqrt{2}$ 。

$\therefore PB = \sqrt{2}PC = 2$ 。

故答案为： $\angle PBC$ ； $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；2；

解决问题：

解：作 $AD \perp BC$ 于 D ，如图 2 所示：

$\because AB=AC$ ，



$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ \quad . \quad BD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC, \quad CD = \sqrt{3}AD,$$

$$\therefore AC = 2AD, \quad BC = 2CD = 2\sqrt{3}AD,$$

$$\therefore \angle PCB = \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PCA = \angle PBC.$$

$$\therefore \angle PAC = \angle PCB,$$

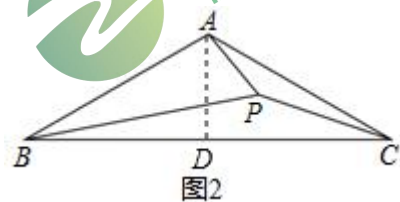
$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP.$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{BC} = \frac{2AD}{2\sqrt{3}AD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{设 } AP = a, \text{ 则 } PC = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore PB = 3a.$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{1}{3}.$$

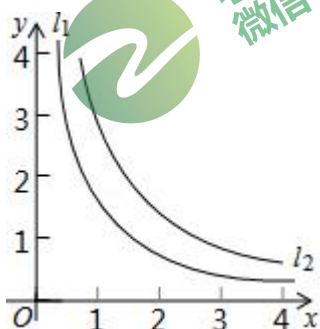


【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、等腰直角三角形的性质、等腰三角形的性质等知识；熟练掌握等腰三角形的性质，证明三角形相似是解题的关键。

24. (6分) 点 A 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_1 上一点, 直线 $AB \parallel x$ 轴, 交反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_2 于点 B , 直线 $AC \parallel y$ 轴, 交 l_2 于点 C , 直线 $CD \parallel x$ 轴, 交 l_1 于点 D .

(1) 若点 $A(1, 1)$, 求线段 AB 和 CD 的长度;

(2) 对于任意的点 $A(a, b)$, 判断线段 AB 和 CD 的大小关系, 并证明.





【分析】 (1) 根据题意求得 $B(3, 1)$, $C(1, 3)$, $D(\frac{1}{3}, 3)$, 即可求得 AB 和 CD 的长度;

(2) 根据题意得到 $A(a, \frac{1}{a})$, $B(3a, \frac{1}{a})$, $C(a, \frac{3}{a})$, $D(\frac{a}{3}, \frac{3}{a})$, 进一步求得 $AB=2a$, $CD=\frac{2}{3}a$. 即可求得 $AB>CD$.

【解答】 解: (1) $\because AB \parallel x$ 轴, $A(1, 1)$, B 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 的图象上,
 $\therefore B(3, 1)$.

同理可求: $C(1, 3)$, $D(\frac{1}{3}, 3)$.

$\therefore AB=2$, $CD=\frac{2}{3}$.

(2) $AB>CD$.

证明: $\because A(a, b)$, A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象上,

$\therefore A(a, \frac{1}{a})$.

$\because AB \parallel x$ 轴, B 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 的图象上,

$\therefore B(3a, \frac{1}{a})$.

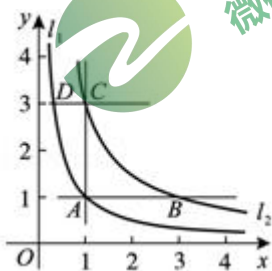
同理可求: $C(a, \frac{3}{a})$, $D(\frac{a}{3}, \frac{3}{a})$.

$\therefore AB=2a$, $CD=\frac{2}{3}a$.

$\because a>0$,

$\therefore 2a>\frac{2}{3}a$.

$\therefore AB>CD$.



【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 表示出 A 、 B 、 C 、 D 的坐标是解题的关键.



25. (6分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 BA 延长线上的定点, M 为 BC 边上的一个动点, 连接 ME , 将射线 ME 绕点 M 顺时针旋转 76° , 交射线 CD 于点 F , 连接 MD .

小东根据学习函数的经验, 对线段 BM , DF , DM 的长度之间的关系进行了探究.

下面是小东探究的过程, 请补充完整:

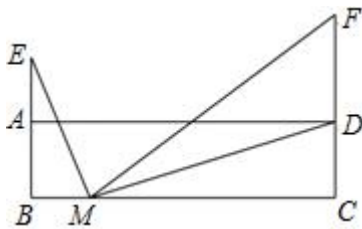
(1) 对于点 M 在 BC 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 BM , DF , DM 的长度的几组值, 如下表:

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8	位置 9
BM/cm	0.00	0.53	1.00	1.69	2.17	2.96	3.46	3.79	4.00
DF/cm	0.00	1.00	1.74	2.49	2.69	2.21	1.14	0.00	1.00
DM/cm	4.12	3.61	3.16	2.52	2.09	1.44	1.14	1.02	1.00

在 BM, DF, DM 的长度这三个量中, 确定 BM 的长度是自变量, DF 的长度和 DM 的长度都是这个自变量的函数;

(2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;

(3) 结合画出的函数图象, 解决问题: 当 $DF=2cm$ 时, DM 的长度约为 2.98 和 1.35 cm .



【分析】(1) 由函数的定义可得;

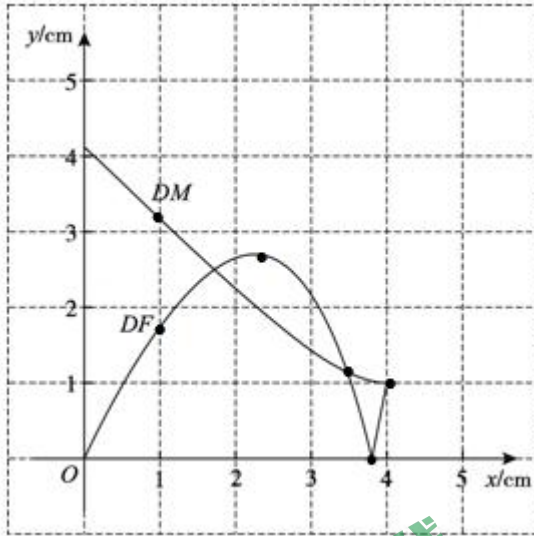
(2) 描点即可;

(3) 结合图象, 即可求解.

【解答】解: (1) 由函数的定义可得: BM 的长度是自变量, DF 的长度和 DM 的长度都是这个自变量的函数,

故答案为: BM, DF, DM ;

(2) 如图所示.



(3) 由图象得到：当 $DF=2\text{cm}$ 时， DM 的长度约为 2.98cm 和 1.35cm 。

【点评】 本题考查的动点问题的函数图象，函数的作图，主要通过描点的方法作图，再根据题意测量出相应的长度。

26. (6分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过点 $(3, 3)$ 。

(1) 用含 a 的式子表示 b ；

(2) 直线 $y=x+4a+4$ 与直线 $y=4$ 交于点 B ，求点 B 的坐标（用含 a 的式子表示）；

(3) 在 (2) 的条件下，已知点 $A(1, 4)$ ，若抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，直接写出 a ($a < 0$) 的取值范围。

【分析】 (1) 将点 $(3, 3)$ 代入解析式即可求得；

(2) 把 $y=4$ 代入 $y=x+4a+4$ 得到关于 x 的方程，解方程即可求得；

(3) 根据抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，分两种情况讨论，即可得结论。

【解答】 解：(1) 将点 $(3, 3)$ 代入 $y=ax^2+bx$ ，得

$$9a+3b=3.$$

$$\therefore b = -3a+1.$$

(2) 令 $x+4a+4=4$ ，得 $x = -4a$ 。

$$\therefore B(-4a, 4).$$

(3) $\because a < 0$,

\therefore 抛物线开口向下，

抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，

$$\because A(1, 4), B(-4a, 4)$$



∴点 A 、 B 所在的直线为 $y=4$,

由 (1) 得 $b=1-3a$,

则抛物线可化为: $y=ax^2+(1-3a)x$,

分两种情况讨论:

①当抛物线 $y=ax^2+(1-3a)x$ 与直线 $y=4$ 只有一个公共点时,

且抛物线的顶点在点 A 、 B 之间,

$$\text{则 } 1 \leq \frac{3a-1}{2a} \leq -4a$$

$$\text{或 } -4a \leq \frac{3a-1}{2a} \leq 1,$$

方程 $ax^2+(1-3a)x=4$ 的根的判别式: $\Delta=0$,

$$\text{即 } (1-3a)^2+16a=0,$$

$$\text{解得 } a_1=-\frac{1}{9}, a_2=-1,$$

$$\text{当 } a_1=-\frac{1}{9} \text{ 时, } \frac{3a-1}{2a}=6 \text{ (不符合题意),}$$

$$\text{当 } a_2=-1 \text{ 时, } \frac{3a-1}{2a}=2,$$

$$\text{则 } 1 \leq \frac{3a-1}{2a} \leq -4a \text{ 成立.}$$

②当抛物线经过点 A 时,

$$\text{即当 } x=1, y=4 \text{ 时, } a+1-3a=4,$$

$$\text{解得 } a=-\frac{3}{2};$$

$$\therefore a < -\frac{3}{2} \text{ 时, 抛物线与线段 } AB \text{ 恰有一个公共点,}$$

综上: a 的取值为: $a=-1$ 或 $a < -\frac{3}{2}$ 时, 抛物线与线段 AB 恰有一个公共点.

【点评】 本题考查了二次函数的性质、二次函数和一次函数图象上的点的坐标特征, 解决本题的关键是理解抛物线与线段 AB 恰有一个公共点的含义.

27. (7分) 已知 $\angle MON=120^\circ$, 点 A, B 分别在 ON, OM 边上, 且 $OA=OB$, 点 C 在线段 OB 上 (不与点 O, B 重合), 连接 CA . 将射线 CA 绕点 C 逆时针旋转 120° 得到射线 CA' , 将射线 BO 绕点 B 逆时针旋转 150° 与射线 CA' 交于点 D .

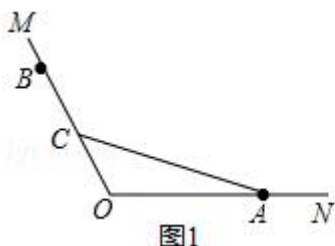
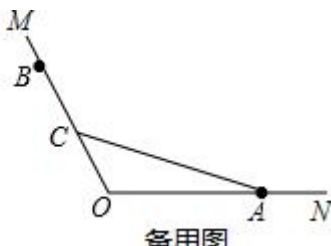


图1



备用图

(1) 根据题意补全图 1;

(2) 求证:

① $\angle OAC = \angle DCB$;

② $CD = CA$ (提示: 可以在 OA 上截取 $OE = OC$, 连接 CE);

(3) 点 H 在线段 AO 的延长线上, 当线段 OH, OC, OA 满足什么等量关系时, 对于任意的点 C 都有 $\angle DCH = 2\angle DAH$, 写出你的猜想并证明.

【分析】(1) 根据题意即可补全图形;

(2) ①由旋转得 $\angle ACD = 120^\circ$, 由三角形内角和得出 $\angle DCB + \angle ACO = 60^\circ$, $\angle OAC + \angle ACO = 60^\circ$, 即可得出结论;

②在 OA 上截取 $OE = OC$, 连接 CE , 则 $\angle OEC = \angle OCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MON) = 30^\circ$, $\angle AEC = 150^\circ$, 得出 $\angle AEC = \angle CBD$, 易证 $AE = BC$, 由 ASA 证得 $\triangle AEC \cong \triangle CBD$, 即可得出结论;

(3) 猜想 $OH - OC = OA$ 时, 对于任意的点 C 都有 $\angle DCH = 2\angle DAH$, 在 OH 上截取 $OF = OC$, 连接 CF, CH , 则 $FH = OA$, $\angle COF = 180^\circ - \angle MON = 60^\circ$, 得出 $\triangle OFC$ 是等边三角形, 则 $CF = OC$, $\angle CFH = \angle COA = 120^\circ$, 由 SAS 证得 $\triangle CFH \cong \triangle COA$, 得出 $\angle H = \angle OAC$, 由三角形外角性质得出 $\angle BCH = \angle COF + \angle H = 60^\circ + \angle H = 60^\circ + \angle OAC$, 则 $\angle DCH = 60^\circ + \angle H + \angle DCB = 60^\circ + 2\angle OAC$, 由 $CA = CD$, $\angle ACD = 120^\circ$, 得出 $\angle CAD = 30^\circ$, 即可得出 $\angle DCH = 2\angle DAH$.

【解答】(1) 解: 根据题意补全图形, 如图 1 所示:

(2) 证明: ①由旋转得: $\angle ACD = 120^\circ$,
 $\therefore \angle DCB + \angle ACO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,
 $\because \angle MON = 120^\circ$,
 $\therefore \angle OAC + \angle ACO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,
 $\therefore \angle OAC = \angle DCB$;

②在 OA 上截取 $OE = OC$, 连接 CE , 如图 2 所示:



则 $\angle OEC = \angle OCE = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle MON) = \frac{1}{2} (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - \angle OEC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,

由旋转得: $\angle CBD = 150^\circ$,

$\therefore \angle AEC = \angle CBD$,

$\because OA = OB, OE = OC$,

$\therefore AE = BC$, 在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle CBD$ 中, $\begin{cases} \angle AEC = \angle CBD \\ AE = BC \\ \angle OAC = \angle DCB \end{cases}$,

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CBD (ASA)$,

$\therefore CD = CA$;

(3) 解: 猜想 $OH - OC = OA$ 时, 对于任意的点 C 都有 $\angle DCH = 2\angle DAH$; 理由如下:

在 OH 上截取 $OF = OC$, 连接 CF, CH , 如图 3 所示:

则 $FH = OA, \angle COF = 180^\circ - \angle MON = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \triangle OFC$ 是等边三角形,

$\therefore CF = OC, \angle CFH = \angle COA = 120^\circ$,

在 $\triangle CFH$ 和 $\triangle COA$ 中, $\begin{cases} CF = CO \\ \angle CFH = \angle COA \\ FH = OA \end{cases}$,

$\therefore \triangle CFH \cong \triangle COA (SAS)$,

$\therefore \angle H = \angle OAC$,

$\therefore \angle BCH = \angle COF + \angle H = 60^\circ + \angle H = 60^\circ + \angle OAC$,

$\therefore \angle DCH = 60^\circ + \angle H + \angle DCB = 60^\circ + 2\angle OAC$,

$\because CA = CD, \angle ACD = 120^\circ$,

$\therefore \angle CAD = 30^\circ$,

$\therefore \angle DCH = 2(\angle CAD + \angle OAC) = 2\angle DAH$.

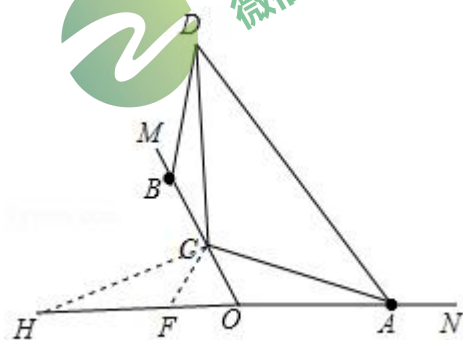


图 3

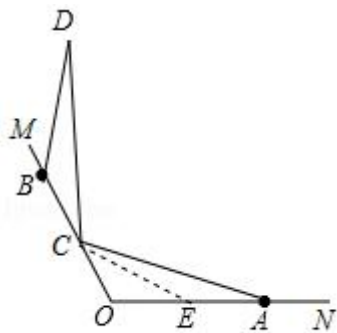


图2

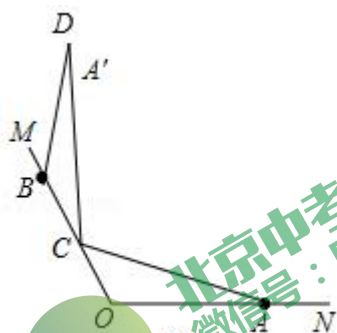
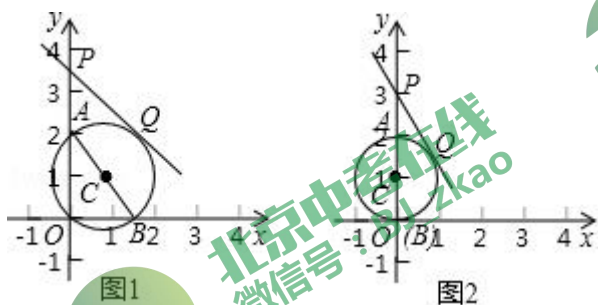


图1

北京中考在线
微信号: BJ_zkao

【点评】 本题是几何变换综合题，主要考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、三角形内角和定理等知识；熟练掌握全等三角形的判定与性质、三角形内角和定理以及三角形外角性质是解题的关键。

28. (7分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0, 2)$ ，点 B 在 x 轴上，以 AB 为直径作 $\odot C$ ，点 P 在 y 轴上，且在点 A 上方，过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ ， Q 为切点，如果点 Q 在第一象限，则称 Q 为点 P 的离点。例如，图1中的 Q 为点 P 的一个离点。



(1) 已知点 $P(0, 3)$ ， Q 为 P 的离点。

①如图2，若 $B(2, 0)$ ，则圆心 C 的坐标为 $(0, 1)$ ，线段 PQ 的长为 $\sqrt{3}$ ；

②若 $B(2, 0)$ ，求线段 PQ 的长；

(2) 已知 $1 \leq PA \leq 2$ ，直线 $l: y = kx + k + 3$ ($k \neq 0$)。

①当 $k=1$ 时，若直线 l 上存在 P 的离点 Q ，则点 Q 纵坐标 t 的最大值为 6；

②记直线 $l: y=kx+k+3$ ($k \neq 0$) 在 $-1 \leq x \leq 1$ 的部分为图形 G , 如果图形 G 上存在 P 的离点, 直接写出 k 的取值范围.

【分析】(1) ①如图可知: $C(0, 1)$, 在 $\text{Rt}\triangle PQC$ 中, $CQ=1$, $PC=2$;

②如图, 过 C 作 $CM \perp y$ 轴于点 M , 连接 CP , CQ , $M(0, 1)$. 在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 由勾股定理可得 $CA=\sqrt{2}$, $CQ=\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle PCM$ 中, 由勾股定理可得 $PC=\sqrt{5}$.

在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中, 由勾股定理可得 $PQ=\sqrt{PC^2-CQ^2}=\sqrt{3}$.

(2) ①当 $k=1$ 时, $y=x+4$, $Q(t-4, t)$, P 的纵坐标为 4 时, PQ 与圆 C 相切, 设 $B(m, 0)$, 则圆心为 $C(\frac{m}{2}, 1)$, 由 $CQ \perp PQ$, 可求 CQ 的解析式为 $y=-x+\frac{m}{2}+1$, Q 点

横坐标为 $\frac{m}{4} - \frac{3}{2} = t-4$, 则 $C(2t-5, 1)$, 再由 $CQ=AC$, 得到 $t=6$ 或 $t=2$; ② $y=kx+k+3$

经过定点 $(-1, 3)$, PQ 是圆的切线, AO 是圆的弦, 则有 $PQ^2=PA \cdot PO$, 当 $k < 0$ 时, Q 点的在端点 $(-1, 3)$ 和 $(1, 2k+3)$ 之间运动, 当 $P(0, 4)$ 时, $PQ=2\sqrt{2}$, 以 P 为圆心, PQ 长为半径的圆与 y 轴交于点 $(0, 4-2\sqrt{2})$, 此时 $k=1-2\sqrt{2}$, 当 $P(0, 3)$ 时, $PQ=\sqrt{3}$, $Q(1, 2k+3)$, $1+4k^2=3$, 所以 $1-2\sqrt{2} < k \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $k > 0$ 时, 当 $P(0, 4)$

时, $PQ=2\sqrt{2}$, 以 P 为圆心, PQ 长为半径的圆与 y 轴交于点 $(0, 4+2\sqrt{2})$, 此时 $k=1+2\sqrt{2}$, 当 $P(0, 3)$ 时, $PQ=\sqrt{3}$, $Q(1, 2k+3)$, $1+4k^2=3$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq k < 1+2\sqrt{2}$.

【解答】解: (1) ①如图可知: $C(0, 1)$,

在 $\text{Rt}\triangle PQC$ 中, $CQ=1$, $PC=2$,

$$\therefore PQ=\sqrt{3},$$

故答案为 $(0, 1); \sqrt{3}$;

②如图, 过 C 作 $CM \perp y$ 轴于点 M , 连接 CP , CQ .

$$\because A(0, 2), B(2, 0),$$

$$\therefore C(1, 1).$$

$$\therefore M(0, 1).$$

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 由勾股定理可得 $CA=\sqrt{2}$.

$$\therefore CQ=\sqrt{2}.$$

$$\because P(0, 3), M(0, 1),$$

$$\therefore PM=2.$$

在 $\text{Rt}\triangle PCM$ 中, 由勾股定理可得 $PC=\sqrt{5}$.





在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中，由勾股定理可得 $PQ = \sqrt{PC^2 - CQ^2} = \sqrt{3}$.

(2) ①如图 1：当 $k=1$ 时， $y=x+4$ ，

$$\therefore Q(t-4, t),$$

$$\therefore 1 \leq PA \leq 2,$$

$\therefore P$ 的纵坐标为 4 时， PQ 与圆 C 相切，

设 $B(m, 0)$ ，

$$\therefore C\left(\frac{m}{2}, 1\right),$$

$$\therefore CQ \perp PQ,$$

$$\therefore CQ \text{ 的解析式为 } y = -x + \frac{m}{2} + 1,$$

$$\therefore Q \text{ 点横坐标为 } \frac{\frac{m}{2} - 3}{4 - 2},$$

$$\therefore \frac{\frac{m}{2} - 3}{4 - 2} = t - 4,$$

$$\therefore m = 4t - 10,$$

$$\therefore C(2t - 5, 1),$$

$$\therefore CQ = AC,$$

$$\therefore (2t - 5)^2 + 1 = 2(t - 1)^2,$$

$$\therefore t = 6 \text{ 或 } t = 2,$$

$\therefore t$ 的最大值为 6；

故答案为 6.

$$\textcircled{2} \because -1 \leq x \leq 1,$$

$$\therefore y = kx + k + 3 \text{ 经过定点 } (-1, 3),$$

$\therefore PQ$ 是圆的切线， AO 是圆的弦，

$$\therefore PQ^2 = PA \cdot PO,$$

当 $k < 0$ 时，

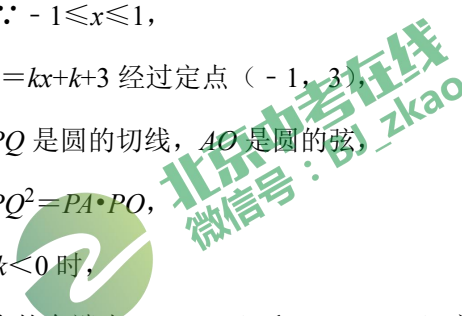
Q 点的在端点 $(-1, 3)$ 和 $(1, 2k+3)$ 之间运动，

$$\text{当 } P(0, 4) \text{ 时，} PQ = 2\sqrt{2},$$

以 P 为圆心， PQ 长为半径的圆与 y 轴交于点 $(0, 4 - 2\sqrt{2})$ ，

$$\text{此时 } k = 1 - 2\sqrt{2},$$

$$\text{当 } P(0, 3) \text{ 时，} PQ = \sqrt{3},$$





$$Q(1, 2k+3),$$

$$\therefore 1+4k^2=3,$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore k = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 1 - 2\sqrt{2} < k \leq -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

当 $k > 0$ 时,

$$\text{当 } P(0, 4) \text{ 时, } PQ = 2\sqrt{2},$$

以 P 为圆心, PQ 长为半径的圆与 y 轴交于点 $(0, 4+2\sqrt{2})$,

$$\text{此时 } k = 1+2\sqrt{2},$$

$$\text{当 } P(0, 3) \text{ 时, } PQ = \sqrt{3},$$

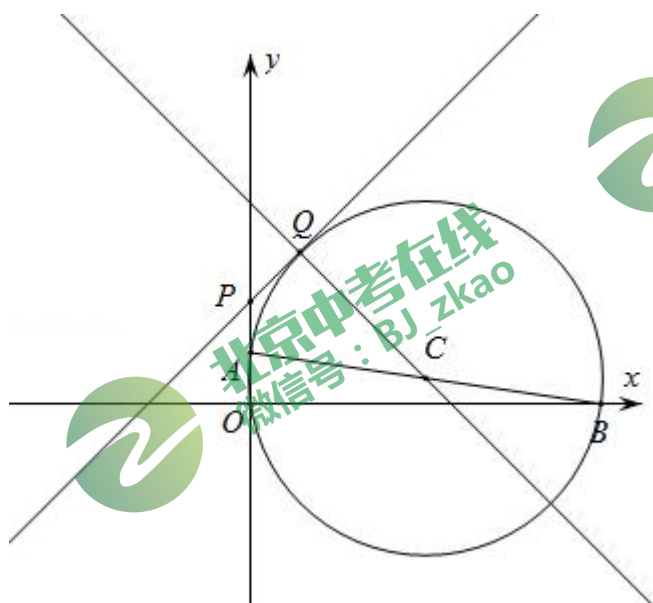
$$Q(1, 2k+3),$$

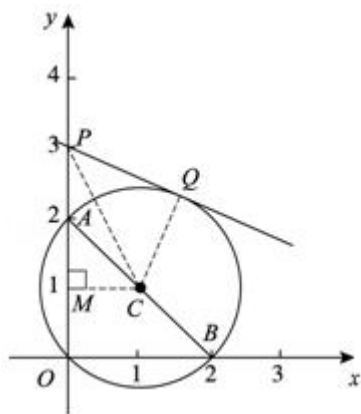
$$\therefore 1+4k^2=3,$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq k < 1+2\sqrt{2}.$$





【点评】 本题考查圆的综合；熟练掌握圆的切线的性质，构造直角三角形，结合直线与圆的位置关系解题是关键。

