

高一第一学期期末样题  
数学参考答案

2022.01

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	A	A	D	C	C	C	B	D	B	B

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

题号	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
答案	$(1, +\infty)$	1	$f(x)=1-2^x$ , (答案不唯一)	(1,2)	①②④

注：第 15 题少选项得 2 分，错选或未作答均为 0 分。

三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

(16) (共 9 分)

解：由  $x^2 - 2x - 3 > 0$  得  $x < -1$  或  $x > 3$ .

所以  $A = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ . .....2 分

(I) 当  $a = 1$  时,  $B = (-\infty, 4]$ . .....3 分

所以  $A \cap B = (-\infty, -1) \cup (3, 4]$ . .....5 分

(II) 由题意知  $B = (-\infty, 4a]$ . .....6 分

因为  $A \cup B = \mathbf{R}$ ,

所以  $4a \geq 3$ . .....8 分

所以  $a \geq \frac{3}{4}$ .

所以 实数  $a$  的取值范围是  $[\frac{3}{4}, +\infty)$ . .....9 分

(17) (共 10 分)

解：选择条件①：  $a > 1, b = 1$ .

(I) 函数  $f(x)$  是偶函数，理由如下： .....1

分

$f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，对任意  $x \in \mathbf{R}$ ，则  $-x \in \mathbf{R}$ . .....2

分

因为  $f(-x) = a^{-x} + a^x = f(x)$ , .....3分

所以 函数  $f(x)$  是偶函数.

(II)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数. ....4分

任取  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 + x_2 > 0$ . ....5分

因为  $a > 1$ ,

所以  $a^{x_1} < a^{x_2}$ ,  $a^{x_1+x_2} > 1$ .

所以  $f(x_1) - f(x_2) = a^{x_1} + a^{-x_1} - (a^{x_2} + a^{-x_2})$

$$= (a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{a^{x_1} \cdot a^{x_2}}\right)$$

$= (a^{x_1} - a^{x_2}) \cdot \frac{a^{x_1+x_2} - 1}{a^{x_1+x_2}} < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ . ....7分

分

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数.

(III) 实数  $m$  的取值范围是  $[-5, -1] \cup [1, 5]$ . ....10分

分

选择条件②:  $0 < a < 1, b = -1$ .

(I) 函数  $f(x)$  是奇函数, 理由如下: .....1分

$f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $-x \in \mathbf{R}$ . ....2分

分

因为  $f(-x) = a^{-x} - a^x = -f(x)$ , .....3分

所以 函数  $f(x)$  是奇函数.

(II)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数. ....4分

任取  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ . ....5分

因为  $0 < a < 1$ ,

所以  $a^{x_1} > a^{x_2} > 0$ .

所以  $f(x_1) - f(x_2) = a^{x_1} - a^{-x_1} - (a^{x_2} - a^{-x_2})$

$$= (a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{a^{x_1} \cdot a^{x_2}}\right) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2). \text{ .....7分}$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

(III) 实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . .....10 分

(18) (共 10 分)

解: (I)  $a=18, b=4$ . .....2 分

分

(II) 记样本中甲生产线的 4 件二等品产品为  $A_1, A_2, A_3, A_4$ ; 乙生产线的 2 件二等品产品为  $B_1, B_2$ .

从样本中 6 件二等品中任取 2 件, 所有可能的结果有 15 个, 它们是:

$(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4), (A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_3, B_1), (A_4, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_2), (A_3, B_2), (A_4, B_2), (B_1, B_2)$ .

.....6 分

用  $C$  表示: “至少有 1 件为甲生产线产品” 这一事件, 则  $\bar{C}$  中的结果有 1 个,

它是  $(B_1, B_2)$ . .....7 分

所以  $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$ . .....8 分

(III)  $P_1 < P_2$ . .....10 分

分

(19) (共 11 分)

解: (I) 函数  $f(x) = 2^x$  不具有性质  $P(0)$ . 理由如下:

对于  $a=0$ ,  $x_1=1$ , 因为  $\frac{1+2^{x_2}}{2} > 0$ ,  $x_2 \in \mathbf{R}$ , 所以 不存在  $x_2 \in \mathbf{R}$  满足

$$\frac{x_1 + f(x_2)}{2} = a.$$

所以 函数  $f(x) = 2^x$  不具有性质  $P(0)$ . .....1 分

函数  $f(x) = \log_2 x$ ,  $x \in (0, 1)$  具有性质  $P(0)$ . 理由如下:

对于  $\forall x_1 \in (0,1)$ , 取  $x_2 = 2^{-x_1}$ , 则  $x_2 \in (0,1)$ .

$$\text{因为 } \frac{x_1 + \log_2 x_2}{2} = \frac{x_1 - x_1}{2} = 0,$$

所以 函数  $f(x) = \log_2 x$ ,  $x \in (0,1)$  具有性质  $P(0)$ . .....2分

(II) 必要而不充分 理由如下: .....3分

①若  $f(x)$  存在零点, 令  $f(x) = 3x - 1$ ,  $x \in [0,1]$ , 则  $f(\frac{1}{3}) = 0$ .

因为  $\forall x_1 \in [0,1]$ , 取  $x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_1$ , 则  $x_2 \in [\frac{2}{3},1]$ , 且  $\frac{x_1 + f(x_2)}{2} = \frac{x_1 + 2 - x_1}{2} = 1$ .

所以  $f(x)$  具有性质  $P(1)$ , 但  $2 \notin [0,1]$ . .....4分

②若  $2 \in D$ , 因为  $f(x)$  具有性质  $P(1)$ ,

取  $x_1 = 2$ , 则存在  $x_2 \in D$  使得  $\frac{x_1 + f(x_2)}{2} = \frac{2 + f(x_2)}{2} = 1$ .

所以  $f(x_2) = 0$ , 即  $f(x)$  存在零点  $x_2$ . .....5分

综上所述, “ $f(x)$  存在零点” 是 “ $2 \in D$ ” 的必要而不充分条件.

(III) 记函数  $f(x) = tx^2 + x + 4$ ,  $x \in [0,2]$  的值域为  $F$ , 函数  $g(x) = 2a - x$ ,  $x \in [0,2]$

的值域  $A = [2a - 2, 2a]$ .

因为 存在唯一的实数  $a$ , 使得函数  $f(x) = tx^2 + x + 4$ ,  $x \in [0,2]$  有性质  $P(a)$ ,

即存在唯一的实数  $a$ , 对  $\forall x_1 \in [0,2]$ ,  $\exists x_2 \in [0,2]$ , 使得  $f(x_2) = 2a - x_1$  成立,

所以  $F = A$ . .....7分

① 当  $t = 0$  时,  $f(x) = x + 4$ ,  $x \in [0,2]$ , 其值域  $F = [4, 6]$ .

由  $F = A$  得  $a = 3$ . .....8分

② 当  $-\frac{1}{4} \leq t$ , 且  $t \neq 0$  时,  $f(x) = tx^2 + x + 4$ ,  $x \in [0,2]$  是增函数, 所以 其值域  $F = [4, 4t + 6]$ .

由  $F = A$  得  $t = 0$ , 舍去. .....9分

③ 当  $-\frac{1}{2} \leq t < -\frac{1}{4}$  时,  $f(x) = tx^2 + x + 4$ ,  $x \in [0,2]$  的最大值为  $f(-\frac{1}{2t}) = 4 - \frac{1}{4t}$ ,

最小值为 4,

所以  $f(x)$  的值域  $F = [4, 4 - \frac{1}{4t}]$ .

由  $F = A$  得  $t = -\frac{1}{8}$ , 舍去.

当  $t < -\frac{1}{2}$  时,  $f(x) = tx^2 + x + 4$ ,  $x \in [0, 2]$  的最大值为  $f(-\frac{1}{2t}) = 4 - \frac{1}{4t}$ , 最小值

为  $f(2) = 4t + 6$ ,

所以  $f(x)$  的值域  $F = [4t + 6, 4 - \frac{1}{4t}]$ .

由  $F = A$  得  $t = \frac{-2 - \sqrt{3}}{4}$  (舍去  $t = \frac{-2 + \sqrt{3}}{4}$ ). .....11

分

综上所述,  $t = 0$  或  $t = \frac{-2 - \sqrt{3}}{4}$ .

**选做题:** (本题满分 5 分。所得分数可计入总分, 但整份试卷得分不超过 100 分)

解: (I); .....1 分

(II) 合格; .....2 分

(III)  $(4 - \frac{\sqrt{10}}{2})$  h. ....5 分

关注公众号“帝都学考”，获取最有价值的试题资料



扫一扫 欢迎关注

帝都学考公众号