北京市第一六六中学 2023-2024 学年度第一学期期中考试

高三年级数学学科 （考试时长：120 分钟）

班级：__________ 姓名：__________

考查目标
知识：集合与简易逻辑；不等式；函数与导数；三角函数与解三角形；立体几何；平面解析几何；排列组合与二项式定理；概率统计 能力：数学抽象概括；逻辑推理论证；数学建模应用；直观想想；数学运算；数据分析；空间想象能力

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<-1或x>1\}$，$B=\{x\mid 0\le x<2\}$，则集合 $A\cup B=$

A. $\{x\mid 0\le x<1\}$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$

C. $\{x\mid x<-1或x\ge 0\}$　　D. $\{x\mid x<-1或x>2\}$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. “$a>b>0$”是“$\sqrt{a}>\sqrt{b}$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=(3,4)$．若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})//\boldsymbol{c}$，则实数$\lambda=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 已知实数x,y满足$a^x<a^y(0<a<1)$，则下列关系式恒成立的是（　　）

A. $\frac{1}{x^2+1}>\frac{1}{y^2+1}$　　B. $\tan x>\tan y$

C. $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　D. $x^3>y^3$

6. 函数$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，则$\omega$可以为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

7. 关于函数$f(x)=\sin x-x\cos x$，下列说法错误的是

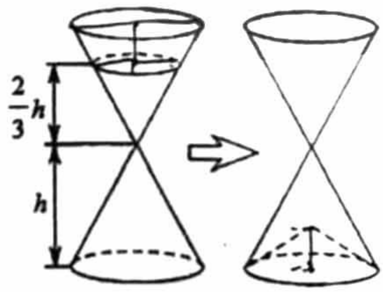
A. $f(x)$是奇函数　　B. 0不是$f(x)$的极值点

C. $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上有且仅有3个零点　　D. $f(x)$的值域是$\mathbf{R}$

8. 二维码与生活息息相关，我们使用的二维码主要是21×21大小的，即441个点，根据0和1的二进制编码，一共有2^{441}种不同的码，假设我们1秒钟用掉1万个二维码，1万年约为3×10^{11}秒，那么大约可以用（参考数据：$\lg2\approx0.3$，$\lg3\approx0.5$）（　　）

A. 10^{117}万年　　B. 117万年　　C. 10^{205}万年　　D. 205万年

9. 沙漏是古代的一种计时装置,它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成,开始时细沙全部在上部容器中，利用细沙全部流到下部容器所需要的时间进行计时.如图，某沙漏由上、下两个圆锥组成.这两个圆锥的底面直径和高分别相等，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度（h）的$\frac{2}{3}$(细管长度忽略不计).假设细沙全部漏入下部后，



恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆.这个沙堆的高与圆锥的高 h 的比值为（　　）

A. $\frac{8}{27}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 对于函数 $f(x)$，若集合 $\{x|x>0,f(x)=f(-x)\}$ 中恰有 k 个元素，则称函数 $f(x)$ 是"k 阶准偶函数"若函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, x\le a\\ x^2, x>a\end{cases}$ 是"2 阶准偶函数"，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $[0,2)$　　C. $[0,4)$　　D. $[2,4)$

二、填空题:本题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上，终边与单位圆交于第二象限的点 P，且点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha=$________.

12. 在 $(1-2\sqrt{x})^4$ 的二项展开式中，第四项为________.

13. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$.

①若 $f(0)=1$，则 $\varphi=$____；

②若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $f(x+2)-f(x)=4$ 成立，则 ω 的最小值是____

14. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术．图 1 是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花．图 2 中正六边形 ABCDEF 的边长为 4，圆 O 的圆心为该正六边形的中心，圆 O 的半径为 2，圆 O 的直径 $MN // CD$，点 P 在正六边形的边上运动，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值为________

图1

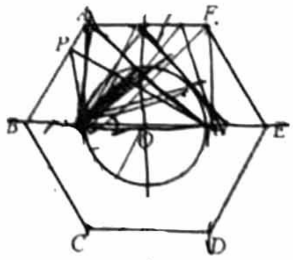
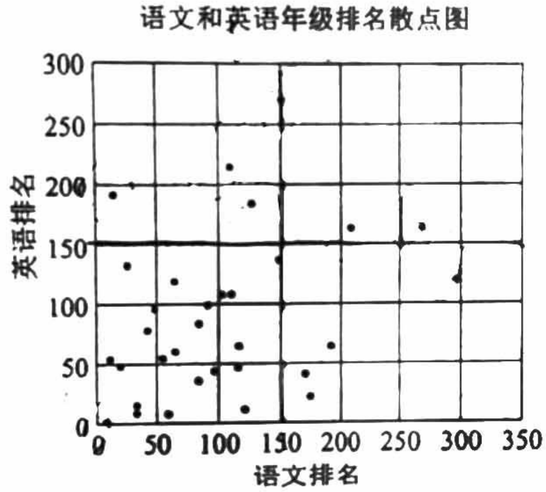
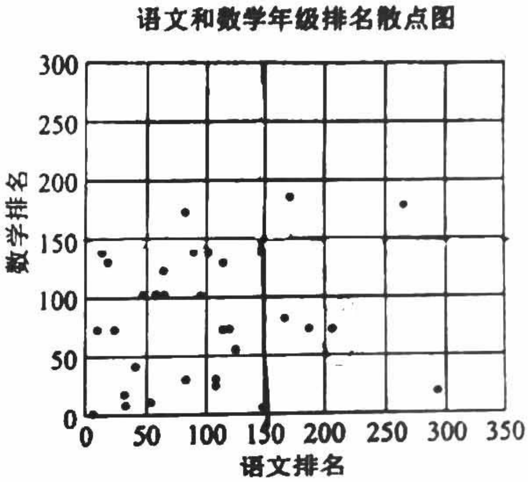


图2

15. 某班在一次考试后分析学生在语文、数学、英语三个学科的表现，绘制了各科年级排名的散点图（如下图所示）.





关于该班级学生这三个学科本次考试的情况，给出下列四个结论：

①三科中，数学年级排名的平均数及方差均最小；

②语文、数学、英语年级排名均在 150 名以外的学生为 1 人；

③本次考试该班语文第一名、数学第一名、英语第一名可能为三名不同的同学；

④从该班学生中随机抽取 1 人，若其语文排名大于 200，则其英语和数学排名均在 150 以内的概率为$\frac{1}{3}$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16.（本小题满分 14 分）

如图 1 所示，在等腰梯形 ABCD.BC//AD, $CE\perp AD$,垂足为 E，AD=3BC=3,EC=1.将 ΔDEC 沿 EC 折起到 ΔD_1EC 的位置,使平面 $\Delta D_1EC\perp$ 平面 $ABCE$,如图 2 所示,点 G 为棱 AD_1 上一个动点.

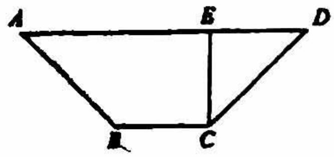


图1

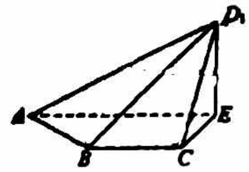


图2

(1)当点 G 为棱 AD_1 中点时，求证：BG // 平面 D_1EC

(2)求证：$AB\perp$ 平面 D_1BE；

(3) 求直线CD_1与平面ABD_1所成角的正弦值.

17. （本小题满分 13 分）

在∠ABC 中，$2\sin^2\dfrac{B+C}{2}=1+\sin A$.

（1）求$\angle A$；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三组条件中选择一组作为已知，使⊿ABC 存在且唯一确定，求 AB 的长.

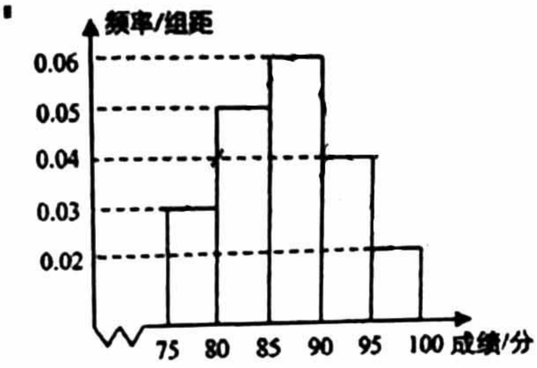
条件①：$BC=2,AC=3$；

条件②：$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},AC+BC=3+\sqrt{2}$；

条件③：$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,⊿ABC 的面积为$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （本小题满分 13 分）某学校组织高一、高二年级学生进行了奥运知识竞赛.从这两个年级各随机抽取了 40 名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表.



高一

成绩分组	频数
$[75,80)$	2
$[80,85)$	6
$[85,90)$	16
$[90,95)$	14
$[95,100]$	2

高二

规定成绩不低于 90 分为“优秀”.

（1）估计高一年级知识竞赛的优秀率；

（2）将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率.在高一、高二年级学生中各选出 2 名学生，记这 4 名学生中成绩优秀的人数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列；

（3）在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X，Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数.写出方差 $D(X)$，$D(Y)$ 的大小关系.（只需写出结论）

19. （本小题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A_1(-2,0)$ 和 $B(0,-\sqrt{3})$ 两点，点 A_2 为椭圆 C 的右顶点，点 P 为椭圆 C 上位于第一象限的点，直线 PA_1 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）比较 $\triangle MNA_1$ 面积与 $\triangle NA_2B$ 的面积的大小，并说明理由.

20. （本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x-2$.

(1)求 $f(x)$ 的极值；

(2)已知 $t\in\mathbf{Z}$，且 $x\ln x+x>t(x-1)$ 对任意的 $x>1$ 恒成立，求 t 的最大值；

(3)设 $g(x)=f(x+1)-\mathrm{e}+3$ 的零点为 m （$m>1$），当 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，

证明：$\mathrm{e}^{x_1-x_2}>\dfrac{\ln(x_1+1)}{\ln(x_2+1)}$.

21. （本小题满分 15 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：a_1 是正实数，当 $n\geq 2$ 时，$|a_n-a_{n-1}|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，

则称 $\{a_n\}$ 是“Y－数列”.

（1）若 $\{a_n\}$ 是“Y－数列”且 $a_1=1$，写出 a_4 的所有可能值；

（2）设 $\{a_n\}$ 是“Y－数列”，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列充要条件是 $\{a_n\}$ 单调递减；$\{a_n\}$ 是等比数列充要条件是 $\{a_n\}$ 单调递增；

（3）若 $\{a_n\}$ 是“Y－数列”且是周期数列（即存在正整数 T，使得对任意正整数 n，都有 $a_{T+n}=a_n$），求集合 $\{1\leq i\leq 2018|a_i=a_1\}$ 的元素个数的所有可能值的个数.