2023 北京丰台高三（上）期中

数　　学

2023.11

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$Q=\left\{x\in\mathbf{N}\mid \dfrac{x}{x-2}\leqslant 0\right\}$，则 $P\cap Q=$

（A）$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　（B）$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$

（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{0,1\}$

2．下列函数中，既是奇函数又在定义域上单调递增的是

（A）$y=2^x$　　（B）$y=\ln|x|$

（C）$y=x^3$　　（D）$y=\tan x$

3．在复平面上，复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 所对应的点在第二象限，则实数 a 的值可以为

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）1

（C）2　　（D）3

4．已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

（A）12　　（B）4

（C）$2\sqrt{3}$　　（D）2

5．在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=c$，则 $A=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$

（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

6．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2023}=$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）3

（C）-2　　（D）$-\dfrac{1}{3}$

7．设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，则“函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增”是“$x\in(a,b)$ 时，导函数 $f'(x)>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

8．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $y=f(x)+g(x)$ 的最大值为 a，则 a 的值不可能为

（A）1　　（B）$\sqrt{2}-1$

（C）2　　（D）$\sqrt{2}+1$

9．分贝（dB）、奈培（Np）均可用来量化声音的响度，其定义式分别为 $1\text{dB}=10\lg\dfrac{A}{A_0}$，$1\text{Np}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{A}{A_0}$，其中 A 为待测值，A_0 为基准值．如果 $1\text{dB}=t\text{Np}(t\in\mathbf{R})$，那么 $t\approx$（参考数据：$\lg e\approx 0.4343$）

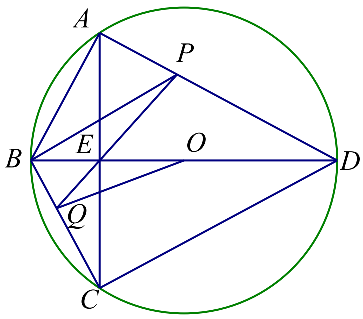
（A）8.686　　（B）4.343

（C）0.8686　　（D）0.115

10．如图，已知 BD 是圆 O 的直径，AC 是与 BD 垂直的弦，且 AC 与 BD 交于点 E，点 P 是线段 AD 上的动点，直线 PE 交 BC 于点 Q. 当 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值时，下列结论中一定成立的是

（A）$OQ\perp BC$　　（B）$OP\perp AD$

（C）$PQ\,/\!/\,AB$　　（D）$OP\,/\!/\,AC$



二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$ 的定义域为___.

12．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(2,-1)$，若 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，则 m 的值为___.

13．能说明命题“对于任意 $s,t\in\mathbf{R}$，$[\max\{s,t\}]^2=\max\{s^2,t^2\}$”为假命题的一组整数 s,t 的值依次为___.

（$\max\{a,b\}$ 表示实数 a,b 中的最大值）

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}, & x<a,\\ x^2-2x, & x\geqslant a,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为___；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的值域为 A，存在实数 $m\notin A$，则 a 的取值范围为___.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}a_n^2+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则

① 当 $a=-1$ 时，存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=2$；

② 当 $a=1$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_n<2$ 恒成立；

③ 存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $\{a_n\}$ 中既有最大值，又有最小值；

④ 对任意的 $a\in\mathbf{R}$，存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，当 $n>n_0$ 时，$|a_n-2|<\frac{1}{2023}$ 恒成立.

其中，正确结论的序号有___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（本小题 14 分）

在△ABC 中，$a=5$，$b=11$，$\cos C=\frac{3}{5}$.

（Ⅰ）求△ABC 的面积；

（Ⅱ）求 c 及 $\sin A$ 的值.

17．（本小题 14 分）

在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，且 $a_3-a_1=3$，$S_3=7$.

（Ⅰ）求 a_n 和 S_n；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_2(S_n+1)$，记 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求 T_n.

18．（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin x(a+\cos x)$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间.

19．（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\cos^2\omega x\ (0<\omega<2)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最小值.

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{1}{2})$；

条件②：函数 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$；

条件③：函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{6}$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分.

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=kx$.

（Ⅰ）当 $k=1$ 时，求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 k 的值.

21．（本小题 15 分）

对于一个 n 行 n 列的数表 $A_{n\times n}\ (n\geqslant 2)$，用 $a_{i,j}$ 表示数表中第 i 行第 j 列的数，其中 $a_{i,j}\in\mathbf{Z}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，且数表 $A_{n\times n}$ 满足以下两个条件：

① $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1,j}=n$；

② $a_{i+1,j+1}=a_{i,j}$，规定 $a_{i+1,n+1}=a_{i+1,1}\ (i=1,2,\cdots,n-1,\ j=1,2,\cdots,n)$.

（Ⅰ）已知数表 $A_{3\times 3}$ 中，$a_{1,1}=3$，$a_{1,2}=-1$. 写出 $a_{1,3}$，$a_{2,2}$，$a_{3,1}$ 的值；

（Ⅱ）若 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k=\max\left\{a_{1,1}-1,a_{1,1}+a_{1,2}-2,\cdots,a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}(k\in\{1,2,\cdots,n\})$，其中 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数. 规定 $a_{1,n+1}=a_{1,1}$. 证明：$a_{1,k+1}-1\leqslant 0$；

（Ⅲ）证明：存在 $m\in\{1,2,\cdots,n\}$，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$.

参考答案

2023. 11

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	C	D	C	B	D	A	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$[-3,-1)\cup(-1,+\infty)$　　12．-1　　13．$-2,-1$ (答案不唯一)

14．$[1,+\infty)$，$(2,+\infty)$　　15．②③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）因为在$\triangle ABC$中，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，又$0<C<\pi$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{4}{5}$.　……………………………………………3 分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times11\times\dfrac{4}{5}=22$.　……………………………………………6 分

（Ⅱ）由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，　……………………………………………7 分

得$c^2=25+121-2\times5\times11\times\dfrac{3}{5}=80$.　……………………………………………9 分

因为$c>0$，所以$c=4\sqrt{5}$.　……………………………………………11 分

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，　……………………………………………12 分

得$\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{5\times\frac{4}{5}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　……………………………………………14 分

17.（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$.

由已知得$a_1q^2-a_1=3$，……①　…………………1 分

$a_1+a_1q+a_1q^2=7$，……②　…………………2 分

由①÷②得$\dfrac{q^2-1}{1+q+q^2}=\dfrac{3}{7}(a_1\neq0)$，即$4q^2-3q-10=0$.　…………………3 分

解得$q=2$或$q=-\dfrac{5}{4}$（舍）.　…………………4 分

代入①或②得$a_1=1$,　…………………5 分

所以$a_n=2^{n-1}$,　…………………6 分

$S_n=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}=2^n-1$.　…………………8 分

（Ⅱ）由已知得 $b_n=\log_2 2^n=n$ …………………10 分

所以 $T_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$. …………………14 分

18.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得， $f(x)=\sin x\cos x$，

所以 $f'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)=\cos 2x$，

所以 $f'(0)=1$，

又 $f(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ………4 分

（Ⅱ）由题意得， $f'(x)=\cos x(a+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$=a\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

$=a\cos x+\cos 2x$. ………6 分

因为 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，

所以 $f'(\dfrac{\pi}{3})=0$，

即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}=0$，

解得 $a=1$. ………8 分

经检验 $a=1$ 符合题意.

故 $f'(x)=\cos x+\cos 2x$， ………9 分

令 $f'(x)>0$， $\cos x+\cos 2x>0$，解得 $-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)$， $k\in\mathbf{Z}$； ………11 分

令 $f'(x)<0$， $\cos x+\cos 2x<0$，解得 $\dfrac{\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi)$， $k\in\mathbf{Z}$. ………13 分

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{\cos 2\omega x+1}{2}$

$=\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$. ………2 分

选条件①

由条件①可知，函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{5\pi}{12},\frac{1}{2})$，

所以 $f(\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{2}$，

即 $\sin(2\omega\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

得 $\sin(\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=0$，

所以 $\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=k\pi$，

解得 $\omega=-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}k$， $k\in\mathbf{Z}$. ·········4 分

因为 $0<\omega<2$，

所以 $\omega=1$. ·········5 分

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. ·········6 分

选条件②

由条件②可知，函数 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$， ·········4 分

所以 $\omega=1$. ·········5 分

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. ·········6 分

选条件③

由条件③可知，函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，

所以 $2\omega\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$.

解得 $\omega=1+3k$， $k\in\mathbf{Z}$. ·········4 分

所以 $\omega=1$. ·········5 分

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. ·········6 分

（Ⅱ）由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

得 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$， ·········8 分

则 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，

所以 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$. ·········11 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值 0.　　　　……… 14 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当 $k=1$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x+1)-x$，　　　　…………………1 分

函数 $h(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，　　　　…………………2 分

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$，　　　　…………………3 分

令 $h'(x)=0$，得 $x=0$.　　　　…………………4 分

所以

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

…………………6 分

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，即函数 $h(x)$ 的最大值为 0.　　　　…………………7 分

（Ⅱ）令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x+1)-kx\leqslant 0$ 恒成立，　　　　…………………8 分

易知 $h(0)=0$，$h(1)=\ln 2-k\leqslant 0$，所以 $k\geqslant\ln 2>0$.　　　　…………………9 分

（另解：当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)>0$，故 $kx>0$，因此 $k>0$）

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-k=\frac{-kx+1-k}{x+1}$.　　　　………………10 分

令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{1-k}{k}$（注：$\frac{1-k}{k}>-1\Leftrightarrow 1-k>-k$），　　　　…………………11 分

所以

x	$(-1,\frac{1-k}{k})$	$\frac{1-k}{k}$	$(\frac{1-k}{k},+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

…………………12 分

若 $k\neq 1$，则 $\frac{1-k}{k}\neq 0$，则函数 $h(x)$ 在 $x=\frac{1-k}{k}$ 取到最大值 $h(\frac{1-k}{k})$，　　　　……………13 分

而 $h(\frac{1-k}{k})>h(0)=0$，与题设不符，舍去.　　　　…………………14 分

因此，$k=1$.　　　　…………………15 分

另解：当 $k=1$ 时，由（Ⅰ）得 $h(x)\leqslant 0$ 恒成立　　　　…………………12 分

当 $k>1$ 时，$h'(0)=1-k<0$，故 $h(x)$ 在 $(\frac{1-k}{k},0)$ 上单调递减

$h(\frac{1-k}{k})>h(0)=0$，与题设不符，舍去 …………………13 分

当 $0<k<1$ 时，$h'(0)=1-k>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1-k}{k})$ 上单调递增

$h(\frac{1-k}{k})>h(0)=0$，与题设不符，舍去 …………………14 分

综上，$k=1$. …………………15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$a_{1,3}=1, a_{2,2}=3, a_{3,1}=-1$. …………3 分

（Ⅱ）假设 $a_{1,k+1}-1\leqslant 0$ 不成立，则 $a_{1,k+1}-1>0$

若 $k=n$ 时，则 $a_{1,k+1}-1=a_{1,1}-1>0$.

由①知

$\max\left\{a_{1,1}-1, a_{1,1}+a_{1,2}-2, \cdots, a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}>0$ 与题设矛盾；

若 $k\leqslant n-1$ 时，

则 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}+a_{1,k+1}-(k+1)>a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k$ 与题设矛盾；

综上得 $a_{1,k+1}-1\leqslant 0$. …………8 分

（Ⅲ）若 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k=\max\left\{a_{1,1}-1, a_{1,1}+a_{1,2}-2, \cdots, a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}\leqslant 0$，则有

$m=1$ 时，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$.

若 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k=\max\left\{a_{1,1}-1, a_{1,1}+a_{1,2}-2, \cdots, a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}>0$，则 $k\leqslant n-1$.

下证，$m=n-k+1$ 时，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$.

假设存在 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}>l$ 即 $a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}-l>0$.

当 $l\leqslant n-k$ 时，由②知

$a_{1,1}+\cdots+a_{1,k+l}-(k+l)=\left(a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k\right)+\left(a_{1,k+1}+\cdots+a_{1,k+l}-l\right)$

$=\left(a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k\right)+\left(a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}-l\right)>a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k$，与前提条件矛盾.

当 $l>n-k$ 时，由①②知

$a_{1,1}+\cdots+a_{1,k+l-n}-(k+l-n)=\left(a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k\right)+\left[\left(a_{1,k+1}+\cdots+a_{1,n}\right)+\left(a_{1,1}+\cdots+a_{1,k+l-n}\right)-l\right]$

$=\left(a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k\right)+\left(a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}-l\right)>a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k$，与前提条件矛盾.

综上存在 $m\in\{1,2,\cdots,n\}$，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$. ……15 分