2023 北京朝阳高一（上）期末

数　学

2023.1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若$a>b$，则下列各式一定成立的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $ac^2>bc^2$　　C. $a^3>b^3$　　D. $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{b^2}$

2. 若角θ满足$\cos\theta<0,\tan\theta<0$，则角$\theta$是（　　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

3. 下列函数中，在其定义域上单调递增且值域为$\mathbf{R}$的是（　　）

A. $y=2^x$　　B. $y=(x-1)^3$　　C. $y=x+\dfrac{1}{x}$　　D. $y=|\ln x|$

4. 设集合$A=\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，集合$B=\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，则$A$与$B$的关系为（　　）

A. $A=B$　　B. $A\subsetneqq B$　　C. $B\subsetneqq A$　　D. $A\cap B=\varnothing$

5. 声强级L_1（单位：dB）出公式$L_1=10\lg\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$给出，其中$I$为声强（单位：$W/m^2$）．若平时常人交谈时的声强约为$10^{-6}W/m^2$，则声强级为（　　）

A. 6dB　　B. 12dB　　C. 60dB　　D. 600dB

6. 已知$a>0$，$b>0$，则“$a+b\le 2$”是“$ab\le 1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数$f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，有如下四个结论：

①函数$f(x)$在其定义域内单调递减；

②函数$f(x)$　值域为$(0,1)$；

③函数$f(x)$的图象是中心对称图形；

④方程 $f(x)=-x+1$ 有且只有一个实根.

其中所有正确结论 序号是（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④

8. 已知角 α 为第一象限角，且 $\sin\dfrac{\alpha}{2}>\cos\dfrac{\alpha}{2}$，则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　　B. $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

9. 某厂以 x 千克/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求 $1\le x\le 10$），每小时可获得利润 $100\left(3x+1-\dfrac{2}{x}\right)$ 元，要使生产 100 千克该产品获得的利润最大，该厂应选取的生产速度是（　　）

A. 2 千克/小时　　B. 3 千克/小时

C. 4 千克/小时　　D. 6 千克/小时

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x-1)=-f(x)$，且在 $[0,1]$ 上单调递增，

$a=f\left(\dfrac{2023}{2}\right),b=f(\ln\sqrt{2}),c=f(2022)$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

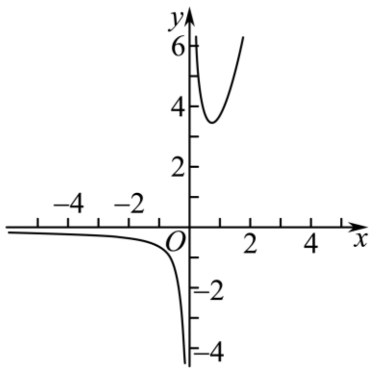
11. 已知集合 $A=\{x|-2<x<0\}$，集合 $B=\{x|0\le x\le 1\}$，则 $A\cup B=$__________.

12. 已知角 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$，若 $\sin(\pi+\alpha)=\dfrac{1}{2}$，则 $\alpha=$________；$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=$________.

13. 设 $a>1$ 且 $b>1$，$\log_2 a\cdot\log_2 b=1$，则 $\log_2(ab)$ 的最小值为________.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$，且 $f(-x)=f(x)$，已知函数 $f(x)$ 的最大值为 2，则 $f(x)$ 可以是__________.

15. 已知下列五个函数：$y=x,y=\dfrac{1}{x},y=x^2,y=\ln x,y=e^x$，从中选出两个函数分别记为 $f(x)$ 和 $g(x)$，若 $F(x)=f(x)+g(x)$ 的图象如图所示，则 $F(x)=$____________.



16. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^3, x>a \\ |x|, x\le a \end{cases}$，给出以下四个结论：

①存在实数 a，函数 $f(x)$ 无最小值；

②对任意实数 a，函数 $f(x)$ 都有零点；

③当 $a\ge 0$ 时，函数 $f(x)$　$(0,+\infty)$ 上单调递增；

④对任意 $a\in(0,1)$，都存在实数 m，使方程 $f(x)=m$ 有 3 个不同的实根.

其中所有正确结论的序号是________________.

三、解答题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

（1）求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 和 $\sin 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 已知函数 $f(x)=2ax^2-ax-1, a\in\mathrm{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x)<0$；

（2）若命题"$\forall x\in\mathrm{R}$，不等式 $f(x)<0$ 恒成立"是假命题，求实数 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+a, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

（1）求 a 的值；

（2）求 $f(x)$　最小值，以及取得最小值时 x 的值.

条件①：$f(x)$ 的最大值为 6；

条件②：$f(x)$ 的零点为 $\frac{\pi}{2}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

20. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x+1\right)-mx, m\in\mathbf{R}$.

（1）当 $m=0$ 时，解不等式 $f(x)>-1$；

（2）若函数 $f(x)$ 是偶函数，求 m 的值；

（3）当 $m=-1$ 时，若函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有公共点，求实数 b 的取值范围.

21. 设全集 $U=\{1,2,\cdots,n\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，集合 A 是 U 真子集．设正整数 $t\le n$，若集合 A 满足如下三个性质，则称 A 为 U 的 $R(t)$ 子集：

①$t\in A$；

②$\forall a\in A,\forall b\in \complement_U A$，若 $ab\in U$，则 $ab\in A$；

③$\forall a\in A,\forall b\in \complement_U A$，若 $a+b\in U$，则 $a+b\notin A$.

（1）当 $n=6$ 时，判断 $A=\{1,3,6\}$ 是否为 U 的 $R(3)$ 子集，说明理由；

（2）当 $n\ge 7$ 时，若 A 为 U 的 $R(7)$ 子集，求证：$2\notin A$；

（3）当 $n=23$ 时，若 A 为 U 的 $R(7)$ 子集，求集合 A.

参考答案

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】C

【解析】

【分析】结合特殊值以及幂函数的性质确定正确答案.

【详解】AD 选项，$a=1,b=-1$，则 $a>b$，但 $a^2=b^2,\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$，所以 AD 选项错误.

B 选项，若 $c=0$，则 $ac^2=bc^2$，所以 B 选项错误.

C 选项，若 $a>b$，由于 $y=x^3$ 在 R 上递增，所以 $a^3>b^3$，所以 C 选项正确.

故选：C

2. 【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数四个象限符号确定.

【详解】$\because\cos\theta<0,\therefore\theta$ 为第二，三象限角或者 x 轴负半轴上的角；

又 $\because\tan\theta<0,\therefore\theta$ 为第二，四象限角

所以 θ 为第二象限角.

故选：B

3. 【答案】B

【解析】

【分析】分别求出每个选项的单调性和值域即可得出答案.

【详解】对于 A，$y=2^x$ 在定义域上单调递增且值域为 $\left(0,+\infty\right)$，故 A 不正确；

对于 B，$y=(x-1)^3$ 在定义域上单调递增值域为 $\mathbf{R}$，故 B 正确；

对于 C，由双勾函数的图象知，$\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $\left(-\infty,-1\right),\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1,0\right),\left(0,1\right)$ 上单调递减，故 C 不正确；

对于 D，$y=|\ln x|$ 的值域为 $\left[0,+\infty\right)$，故 D 不正确.

故选：B.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】根据终边相同的角的知识确定正确答案.

【详解】由于集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，所以集合 A 表示终边落在 y 轴上的角的集合；

由于集合 $B=\left\{\alpha \middle| \alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，所以集合 B 表示终边落在 y 轴上的角的集合；

所以 $A=B$

故选：A

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据对数运算求得正确答案.

【详解】依题意 $L_1=10\lg\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right)=10\lg10^6=60\mathrm{dB}$.

故选：C

6. 【答案】A

【解析】

【分析】

通过基本不等式可得充分性成立，举出反例说明必要性不成立.

【详解】当 $a>0$，$b>0$ 时，$a+b\geq2\sqrt{ab}$，

则当 $a+b\leq2$ 时，有 $2\sqrt{ab}\leq a+b\leq2$，解得 $ab\leq1$，充分性成立；

当 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$ 时，满足 $ab\leq1$，但此时 $a+b=\frac{5}{2}>2$，必要性不成立，

综上所述，“$a+b\leq2$”是“$ab\leq1$”的充分不必要条件.

故选：A.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的单调性、值域、对称性以及方程的根等知识确定正确答案.

【详解】 $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$ 的定义域为R，$f(x)=\frac{3^x+1-2}{3^x+1}=1-\frac{2}{3^x+1}$，

所以 $f\left(x\right)$ 在R 上递增，①错误.

由于 $3^x+1>1,0<\frac{1}{3^x+1}<1$，$0<\frac{2}{3^x+1}<2,-2<-\frac{2}{3^x+1}<0,-1<1-\frac{2}{3^x+1}<1$，

所以 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(-1,1\right)$.

由于 $f\left(-x\right)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=\frac{1-3^x}{1+3^x}=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 是奇函数，图象关于原点对称，③正确.

由 $f(x)=-x+1$ 得 $1-\frac{2}{3^x+1}=-x+1, x-\frac{2}{3^x+1}=0$

构造函数 $g(x)=x-\frac{2}{3^x+1}$，$g(x)$ 在 R 上单调递增，

$g(0)=0-\frac{2}{1+1}=-1<0, g(1)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 R 上存在唯一零点，也即方程 $f(x)=-x+1$ 有且只有一个实根，④正确.

所以正确结论的序号是③④.

故选：D

8. 【答案】A

【解析】

【分析】先确定 $\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围，由此求得 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围.

【详解】由于角 α 为第一象限角，

所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$，

所以 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z$，

由于 $\sin\frac{\alpha}{2}>\cos\frac{\alpha}{2}$，所以 $2l\pi+\pi<\frac{\alpha}{2}<2lk\pi+\frac{5\pi}{4}, l\in Z$，

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\alpha}{2}<0$.

故选：A

9. 【答案】C

【解析】

【分析】生产 100 千克该产品获得的利润为 $f(x)=\frac{100}{x}\cdot 100\left(3x+1-\frac{2}{x}\right)$，令 $t=\frac{1}{x}$，由换元法求二次函数最大值即可.

【详解】由题意得，生产 100 千克该产品获得的利润为

$f(x)=\frac{100}{x}\cdot 100\left(3x+1-\frac{2}{x}\right)=10000\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=10000\left[-2\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}+3\right]$，$1\le x\le 10$，

令 $t=\frac{1}{x}$，$\frac{1}{10}\le t\le 1$，则 $f(t)=10000(-2t^2+t+3)=-20000\left[\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$，故当 $t=\frac{1}{4}$ 时，$f(t)$ 最大，此时 $x=4$.

故选：C

10. 【答案】A

【解析】

【分析】由 $f(x-1)=-f(x)$ 得 $f(x-2)=f(x)$，则 $f\left(x\right)$ 的周期为 2，结合函数的奇偶性，即可化简 a，b，c，最后根据单调性比较大小.

【详解】由 $f(x-1)=-f(x)$ 得 $f(x-2)=-f(x-1)=f(x)$，$\therefore f\left(x\right)$ 的周期为 2，

又 $f\left(x\right)$ 为偶函数，则 $a=f\left(\dfrac{2023}{2}\right)=f\left(1012-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$c=f(2022)=f(0)$，

$\because 0<\ln\sqrt{2}<\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$，$f\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$\therefore c<b<a$.

故选：A

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 【答案】$\left\{x\middle|-2<x\le 1\right\}$

【解析】

【分析】根据并集的定义运算即可.

【详解】因为 $A=\{x|-2<x<0\}$，$B=\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\middle|-2<x\le 1\right\}$，

故答案为：$\left\{x\middle|-2<x\le 1\right\}$

12. 【答案】　①. $\dfrac{7\pi}{6}$##$\dfrac{7}{6}\pi$　②. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】由条件结合诱导公式求 $\sin\alpha$，根据特殊角三角函数值求出 α，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 即可.

【详解】因为 $\sin(\pi+\alpha)=\dfrac{1}{2}$，所以 $-\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，故 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，又 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$，所以 $\alpha=\dfrac{7\pi}{6}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{7\pi}{6}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13. 【答案】2

【解析】

【分析】对 $\log_2(ab)$ 利用对数运算公式，得到 $\log_2 a+\log_2 b$，再由基本不等式以及条件中的 $\log_2 a\cdot\log_2 b=1$，得到答案.

【详解】因为$a>1$且$b>1$，

所以$\log_2 a>0$且$\log_2 b>0$

而$\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b$，且$\log_2 a\cdot\log_2 b=1$

所以由基本不等式可得

$\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b\geq 2\sqrt{\log_2 a\cdot\log_2 b}=2$，

当且仅当$\log_2 a=\log_2 b$，即$a=b=2$时，等号成立.

【点睛】本题考查对数运算公式，基本不等式求和的最小值，属于简单题.

14. 【答案】$f(x)=2\cos x$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性和最值写出符合题意的$f(x)$.

【详解】依题意可知$f(x)$是偶函数，且最大值为2，

所以$f(x)=2\cos x$符合题意.

故答案为：$f(x)=2\cos x$（答案不唯一）

15. 【答案】$\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$

【解析】

【分析】观察图象确定函数$F(x)$的定义域和奇偶性和特殊点，由此确定$F(x)$的解析式.

【详解】由已知$F(x)=f(x)+g(x)$，　$f(x),g(x)\in\left\{y=x,y=\frac{1}{x},y=x^2,y=\ln x,y=\mathrm{e}^x\right\}$，

观察图象可得$F(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以$f(x)$或$g(x)$中必有一个函数为$y=\frac{1}{x}$，且另一个函数不可能为$y=\ln x$，又$F(x)$的图象不关于原点对称，所以$F(x)\neq\frac{1}{x}+x$，所以$F(x)=\frac{1}{x}+x^2$或

$F(x)=\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$，

若$F(x)=\frac{1}{x}+x^2$，则$F(-1)=\frac{1}{-1}+1=0$与函数$F(x)$图象矛盾，

所以$F(x)=\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$，

故答案为：$\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$.

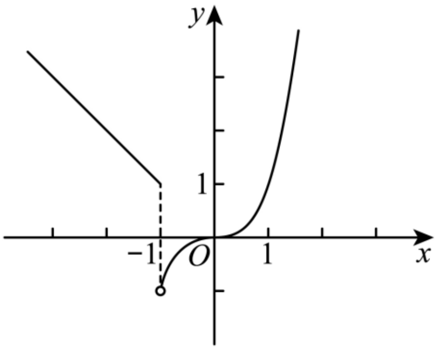
16. 【答案】①②④

【解析】

【分析】结合分段函数的性质对四个结论进行分析，从而确定正确答案.

【详解】①，当 $a=-1$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^3,x>-1\\|x|,x\le -1\end{cases}$，

$f(x)$ 的图象如下图所示，由图可知，$f(x)$ 没有最小值，①正确.



②，由于 $f(x)=\begin{cases}x^3,x>a\\|x|,x\le a\end{cases}$，

当 $a<0$ 时，$f(0)=0^3=0$；当 $a\ge 0$ 时，$f(0)=|0|=0$，

所以对任意实数 a，函数 $f(x)$ 都有零点，②正确.

③当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^3,x>\dfrac{1}{2}\\|x|,x\le \dfrac{1}{2}\end{cases}$，

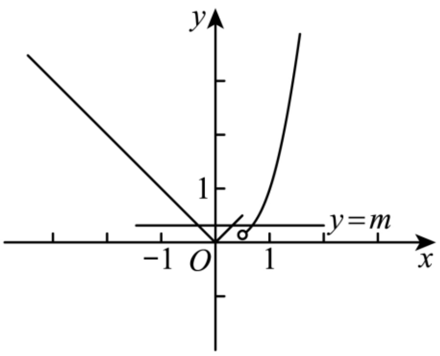
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}=\left|\dfrac{1}{2}\right|$，即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调递增函数，③错误.

④，当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^3,x>a\\|x|,x\le a\end{cases}$，

当 $0<x<1$ 时，$x^3-x=x\left(x^2-1\right)<0,x^3<x$，

画出 $f(x)$ 的图象如下图所示，

由图可知存在实数 m，使方程 $f(x)=m$ 有 3 个不同的实根，④正确.



综上所述，正确结论的序号是①②④.

故答案为：①②④

三、解答题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17. 【答案】（1） $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\sin 2\alpha=-\dfrac{24}{25}$

（2） $\dfrac{17}{31}$

【解析】

【分析】（1）根据三角函数的定义求出 $\sin\alpha,\cos\alpha$ ，再根据二倍角的正弦公式即可求得 $\sin 2\alpha$ ；

（2）先根据二倍角的余弦公式求出 $\cos 2\alpha$ ，再根据商数关系求出 $\tan 2\alpha$ ，再根据两角和的正切公式即可得解.

【小问 1 详解】

解：由题意得 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ ，

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\sin 2\alpha=2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\dfrac{7}{25}$ ，

所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{24}{7}$ ，

所以 $\tan\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{24}{7}-1}{1+\dfrac{24}{7}}=\dfrac{17}{31}$.

18. 【答案】（1） $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$

（2） $a\le -8$ 或 $a>0$

【解析】

【分析】（1）根据一元二次不等式的解法求得不等式 $f(x)<0$ 的解集.

（2）结合开口方向以及判别式求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时， $f(x)=2x^2-x-1$ ， $f(x)<0$ 即 $2x^2-x-1<0$ ，

$(2x+1)(x-1)<0$ ，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<1$

所以不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

【小问 2 详解】

当 $f\left(x\right)=2ax^2-ax-1<0$ 恒成立，

当a不为0时，$a<0$ 且 $\Delta=a^2+8a<0$，

即 $-8<a<0$，

当 $a=0$ 时, $f\left(x\right)=-1<0$ 成立，所以

$-8<a\le 0$

命题"$\forall x\in\mathrm{R}$，不等式 $f(x)<0$ 恒成立"是假命题

所以a 的取值范围为：$a\le -8$ 或 $a>0$．

19. 【答案】(19)（本小题共 14 分）

解：$f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+a$，

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+a+1$，

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+a+1$．

若选① 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值为6；

（Ⅰ）由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$．

所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取到最大值 6．

即 $2+a+1=6$，

所以 $a=3$．

（Ⅱ）$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+4$．

因为 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ 时，

即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 3.

若选②，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的零点为 $\frac{\pi}{2}$．

（Ⅰ）由题意 $f(\frac{\pi}{2})=0$，即 $2\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})+a+1=0$．

所以 $2\sin(\pi+\frac{\pi}{6})+a+1=0$，所以 $2\cdot(-\frac{1}{2})+a+1=0$．

所以 $a=0$．

（Ⅱ）$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$．

因为 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 时，

即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 0．

20. 【答案】(1) $\left(-\infty,0\right)$

（2）$-\frac{1}{2}$

（3）$(-\infty,0)$

【解析】

【分析】（1）$f(x)>-1$即$\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)>\log_{\frac{1}{2}}2$，结合对数、指数函数单调性求解即可；

（2）$f(x)$是偶函数，则$f(x)=f(-x)$，结合对数运算法则化简求值即可

（3）由对数运算得$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，且值域为$(-\infty,0)$，即可由数形结合判断$b$的取值范围.

【小问1详解】

当$m=0$时，$f(x)>-1$即$\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)>-1=\log_{\frac{1}{2}}2$，即$2^x+1<2$，解得$x\in(-\infty,0)$；

【小问2详解】

函数$f(x)$是偶函数，则$f(x)=f(-x)$，即$\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)-mx=\log_{\frac{1}{2}}(2^{-x}+1)+mx$，即

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2^x+1}{2^{-x}+1}=2mx$，即$\log_{\frac{1}{2}}2^x=-x=2mx$，

$\because x\in\mathbf{R}$，故$m=-\frac{1}{2}$；

【小问3详解】

当$m=-1$时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)+x=\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)+\log_{\frac{1}{2}}2^{-x}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2^x+1}{2^x}=\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

$\because y=1+\frac{1}{2^x}$为减函数，故$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，且值域为$(-\infty,0)$

$\because$函数$y=f(x)$的图象与直线$y=b$有公共点，故实数b的取值范围为$(-\infty,0)$.

21. 【答案】（1）$A=\{1,3,6\}$不是U的$R(3)$子集；

（2）证明见解析；　　（3）集合$A=\{7,14,21\}$

【解析】

【分析】（1）取$a=1,b=2$，由$ab=2\notin A$不满足性质②可得A不是U的$R(3)$子集；

（2）通过反证法，分别假设$1\in A$，$2\in A$的情况，由不满足$R(7)$子集的性质，可证明出$2\notin A$；

（3）由（2）得，$1\in \complement_U A$，$2\in \complement_U A$，$7\in A$，再分别假设$3\in A$，$4\in A$，$5\in A$，$6\in A$四种情况，由不满足$R(7)$子集的性质，可得出$3,4,5,6\notin A$，再根据性质②和性质③，依次凑出8~23每个数值是否满足条件即可.

【小问 1 详解】

当 $n=6$ 时，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{1,3,6\}$， $\complement_U A=\{2,4,5\}$，

取 $a=1,b=2$，则 $ab=2\in U$，但 $ab=2\notin A$，不满足性质②，

所以 $A=\{1,3,6\}$ 不是 U 的 $R(3)$ 子集.

【小问 2 详解】

当 $n\geq 7$ 时，A 为 U 的 $R(7)$ 子集，

则 $7\in A$；

假设 $1\in A$，设 $x\in\complement_U A$，即 $x\notin A$

取 $a=1,b=x$，则 $ab=x\in U$，但 $ab=x\notin A$，不满足性质②，

所以 $1\notin A$，$1\in\complement_U A$；

假设 $2\in A$，

取 $a=2,b=1$，$a+b=3\in U$，且 $a+b=3\notin A$，则 $3\in\complement_U A$，

再取 $a=2,b=3$，$ab=6\in U$，则 $ab=6\in A$，

再取 $a=6,b=1$，$a+b=7\in U$，且 $a+b=7\notin A$，

但与性质①$7\in A$ 矛盾，

所以 $2\notin A$.

【小问 3 详解】

由（2）得，当 $n\geq 7$ 时，若 A 为 U 的 $R(7)$ 子集，$1\in\complement_U A$，$2\in\complement_U A$，$7\in A$，

所以当 $n=23$ 时，$U=\{1,2,\cdots,23\}$，

若 A 为 U 的 $R(7)$ 子集，$1\in\complement_U A$，$2\in\complement_U A$，$7\in A$；

若 $3\in A$，取 $a=3,b=1$，$a+b=4\in U$，则 $4\notin A$，$4\in\complement_U A$，

再取 $a=3,b=4$，$a+b=7\in U$，则 $7\notin A$，与 $7\in A$ 矛盾，

则 $3\notin A$，$3\in\complement_U A$；

若 $4\in A$，取 $a=4,b=3$，$a+b=7\in U$，则 $7\notin A$，与 $7\in A$ 矛盾，则 $4\notin A$，$4\in\complement_U A$；

若 $5\in A$，取 $a=5,b=2$，$a+b=7\in U$，则 $7\notin A$，与 $7\in A$ 矛盾，则 $5\notin A$，$5\in\complement_U A$；

若 $6\in A$，取 $a=6,b=1$，$a+b=7\in U$，则 $7\notin A$，与 $7\in A$ 矛盾，则 $6\notin A$，$6\in\complement_U A$；

取 $a=7,b=1,2,3,4,5,6$，$a+b=8,9,10,11,12,13\in U$，则 $8,9,10,11,12,13\notin A$，

$8,9,10,11,12,13\in\complement_U A$；

取 $a=7,b=2$，$ab=14\in U$，则 $14\in A$；

取 $a=14,b=1,2,3,4,5,6$，$a+b=15,16,17,18,19,20\in U$，则 $15,16,17,18,19,20\notin A$，

$15,16,17,18,19,20\in\complement_U A$；

取 $a=7,b=3$，$ab=21\in U$，则 $21\in A$；

取 $a=21,b=1,2$，$a+b=22,23\in U$，则 $22,23\notin A$，$22,23\in \complement_U A$；

综上所述，集合 $A=\{7,14,21\}$.

【点睛】方法点睛:新定义题型的特点是:通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的:遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.