2023 - 2024 学年第一学期昌平区融合学区（第一组）
初三年级期中质量抽测
数学试卷

2023.10

本试卷共 7 页，三道大题，28 个小题，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请交回答题卡。

一、选择题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1. 已知 $3a=4b(ab\neq 0)$，则下列比例式中正确的是

（A）$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$　　（D）$\frac{a}{3}=\frac{4}{b}$

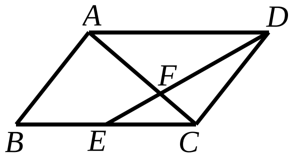
2. 抛物线 $y=x^2-2$ 的顶点坐标是

（A）（0，2）　　（B）（2，0）　　（C）（0，−2）　　（D）（−2，0）

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，连接 DE、AC 交于点 F，那么 $\frac{EF}{DF}$ 的值为

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）$\frac{2}{3}$　　（D）1



4. 将二次函数 $y=x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到二次函数表达式为

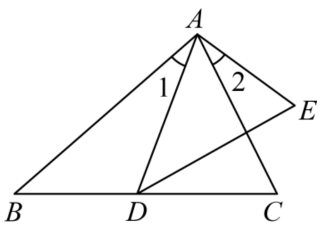
（A）$y=(x+3)^2-4$　　（B）$y=(x+3)^2+4$

（C）$y=(x-3)^2-4$　　（D）$y=(x-3)^2+4$

5.如图，已知 $\angle 1=\angle 2$，那么添加下列一个条件后，不能判定 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ 的是

（A）$\angle C=\angle E$　　（B）$\angle B=\angle ADE$

（C）$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$　　（D）$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$



6. 点 $P_1(-1,\ y_1)$，$P_2(3,\ y_2)$，$P_3(5,\ y_3)$，均在二次函数 $y=(x-1)^2+2$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是

（A）$y_1>y_2>y_3$　　（B）$y_3>y_1>y_2$　　（C）$y_1=y_2>y_3$　　（D）$y_3>y_2=y_1$

7. 下列正方形方格中四个三角形中，与图 1 中的三角形相似的是

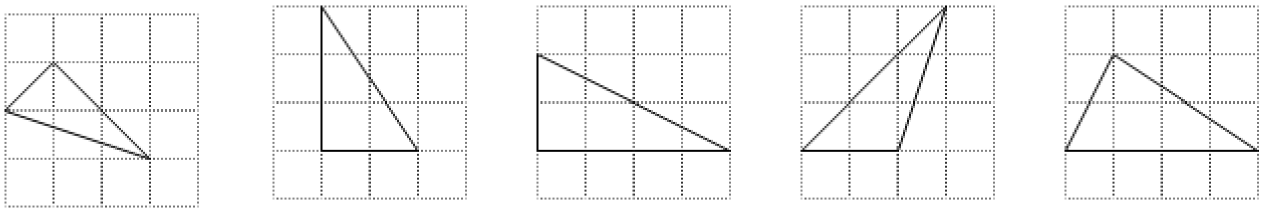
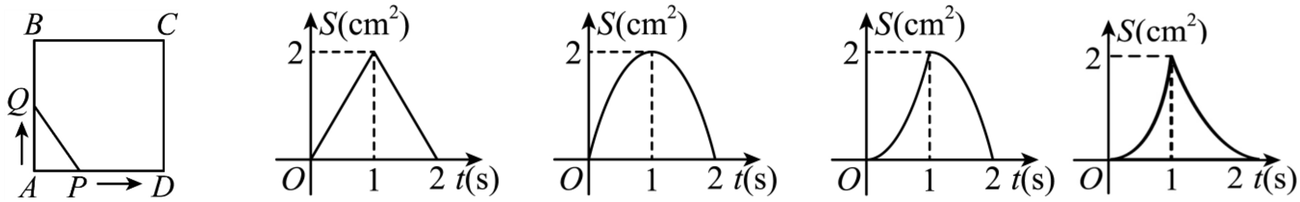


图 1　　（A）　　（B）　　（C）　　（D）

8.如图，正方形 *ABCD* 的边长为 2cm，点 *P*，*Q* 同时从点 *A* 出发，速度均为 2cm/s，若点 *P* 沿 $A-D-C$ 向点 *C* 运动，点 *Q* 沿 $A-B-C$ 向点 *C* 运动，则△*APQ* 的面积 S（cm^2）与运动时间 t（s）之间函数关系的大致图象



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

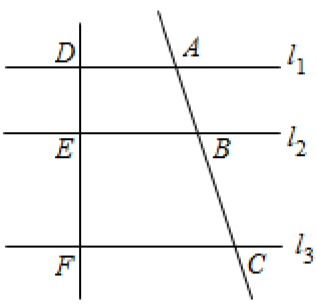
二、填空题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9.如图，直线 $l_1 // l_2 // l_3$，直线 *AC* 分别交 l_1，l_2，l_3 于点 *A*，*B*，*C*，直线 *DF* 分别交 l_1，l_2，l_3 于点 *D*，*E*，*F*，若 *DE*=3，$EF=6$，*AB*=4，则线段 *BC*=__________.

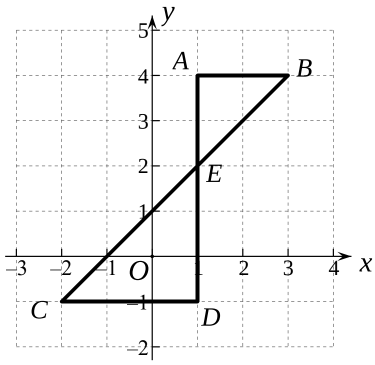
10. 请写出一个开口向下，对称轴为直线 $x=3$ 的抛物线的解析式__________________.

11. 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 图象经过点*A*（0，3），*B*（2，3），则其对称轴为直线__________.

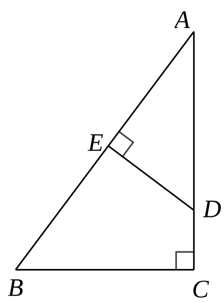
12. 如图，已知 *A*（1，4），*B*（3，4）, *C*（-2，-1）, *D*（1，-1），那么△*ABE* 与△*CDE* 的面积比是__________.



9 题图



12 题图



13 题图

13. 如图，在△*ABC* 中，∠*C*=90°，点 *D* 在 *AC* 上，*DE*⊥*AB* 于点 *E*．若 *AC*=4，*AB*=5，*AD*=3，则 *AE*=____.

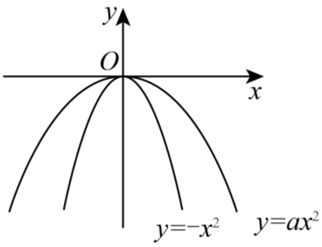
14. 抛物线 $y=-x^2$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的位置如图所示， a 的值可能为__________.

15. 如图，小明借助太阳光线测量树高. 在早上8时小明测得树的影长为2m，下午3时又测得该树的影长为8m，且这两次太阳光线刚好互相垂直，则树高为______m.

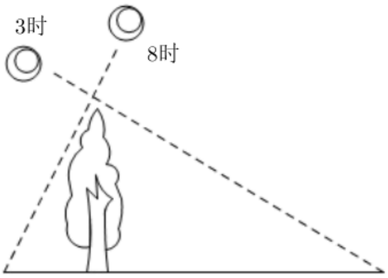
16. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 的图象如图所示，有下列5个结论：

①$abc>0$； ②$b<a+c$； ③$4a+2b+c>0$； ④$2c<3b$； ⑤$a+b>m\left(am+b\right)$（$m\neq 1$的实数）.

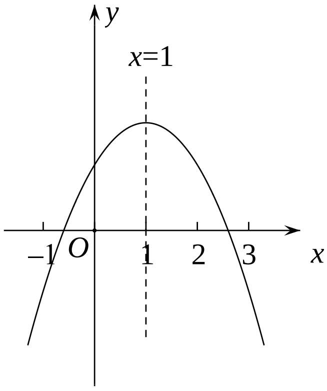
其中正确的结论有________________（填序号）.



14 题图



15 题图



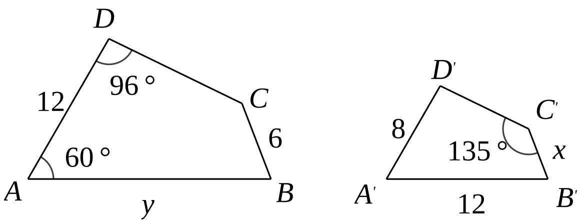
16 题图

三、解答题（本题共12道小题，第17−22题，每小题5分，第23-26题，每小题6分，第27、28题，每小题7分，共68分）

17. 如图，已知四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$.

（1）$\angle B=$________°.

（2）求边 x，y 的长度.

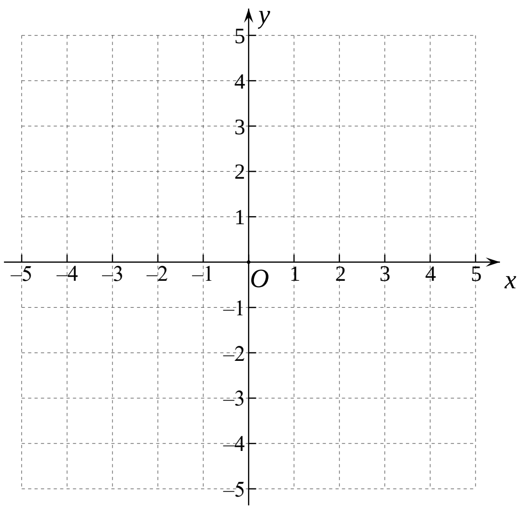


18.已知二次函数 $y=x^2+2x-3$.

（1）求二次函数的图象的顶点坐标；

（2）在平面直角坐标系中，画出该函数的图象；

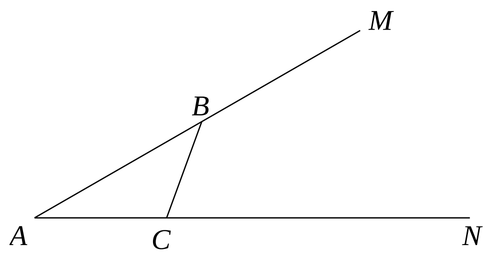
（3）当 x 在什么范围时，y 随着 x 的增大而减小？



19. 如图，$\angle MAN=30°$，点 B、C 分别在 AM、AN 上，且 $\angle ABC=40°$.

（1）尺规作图：作 $\angle CBM$ 的角平分线 BD，BD 与 AN 相交于点 D；（保留作图痕迹，不写作法）

（2）在（1）所作的图中，求证：$\triangle ABC \backsim \triangle ADB$.



20. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 图象上部分点的横坐标 x，纵坐标 y 的对应值如下表：

x	…	–3	–2	–1	0	1	2	n	4	…
y	…	15	m	3	0	–1	0	3	8	…

（1）该二次函数图象的对称轴为直线______________；

（2）$m=$______，$n=$______；

（3）根据表中信息分析，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的解为______________________.

21.已知二次函数 $y=x^2+\left(2m+1\right)x+m^2-1$ 的图象与 x 轴有两个交点.

（1）求 m 的取值范围；

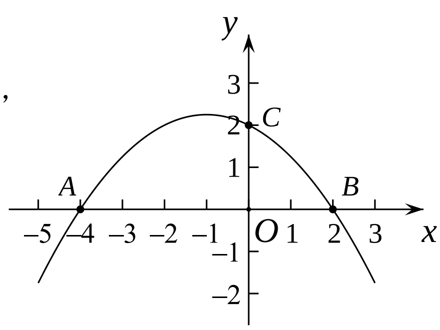
（2）写出一个符合条件的 m 的值，并求出此时图象与 x 轴的交点坐标.

22. 如图，抛物线与 x 轴交于点 A（−4，0），B（2，0），与 y 轴交于点 C（0，2）.

（1）求该抛物线的表达式；

（2）已知 $M\left(1,y_m\right)$，$N\left(x_n,y_n\right)$ 是抛物线上的两点，根据图象分析，

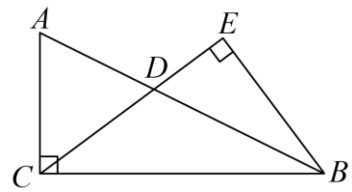
若 $y_m\geq y_n$，则 x_n 的取值范围是___________________.



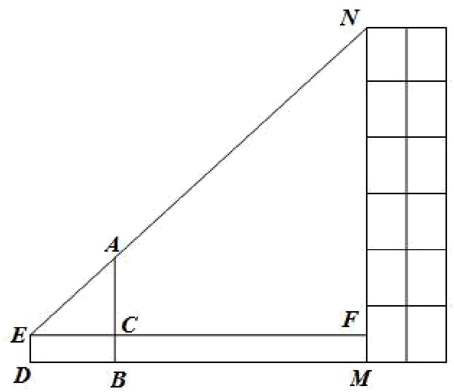
23. 如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，点 *D* 在 *AB* 上，*CA*=*CD*，过点 *B* 作 *BE*⊥*CD*，交 *CD* 的延长线于点 *E*.

（1）求证：△*ABC*∽△*DBE*；

（2）如果 *BC*=5， *BE*=3，求 *AC* 的长.



24.如图，要测量楼高 *MN*，在距 *MN* 为 15m 的点 *B* 处竖立一根长为 5.5m 的直杆 *AB*，恰好使得观测点 *E*，直杆顶点 *A* 和高楼顶点 *N* 在同一条直线上．若 *DB*=5m，*DE*=1.5m，求楼高 *MN*.

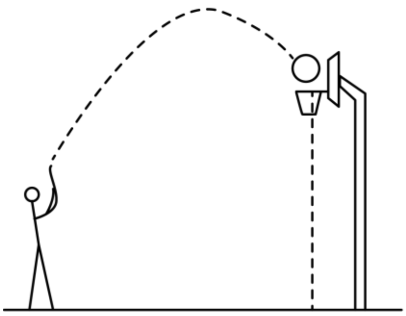


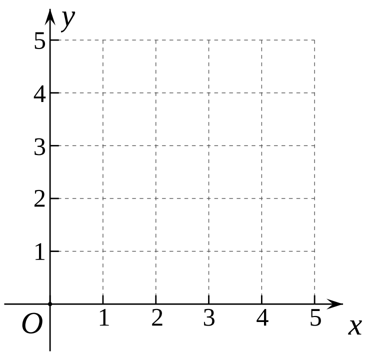
25. 2023 年 8 月 5 日，在成都举行的第 31 届世界大学生夏季运动会女子篮球金牌赛中，中国队以 99 比 91 战胜日本队，夺得冠军．女篮最重要的球员之一韩旭在日常训练中也迎难而上，勇往直前．投篮时篮球以一定速度斜向上抛出，不计空气阻力，在空中划过的运动路线可以看作是抛物线的一部分．建立平面直角坐标系 xOy，篮球从出手到进入篮筐的过程中，它的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足二次函数关系，篮筐中心距离地面的竖直高度是 3m，韩旭进行了两次投篮训练.

（1）第一次训练时，韩旭投出的篮球的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	1	2	3	4	…
竖直高度 y/m	2.0	3.0	3.6	3.8	3.6	…

①在平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各对对应值为坐标的点，并用平滑的曲线连接；





②结合表中数据或所画图象，直接写出篮球运行的最高点距离地面的竖直高度是________m；

③已知此时韩旭距篮筐中心的水平距离5m，韩旭第一次投篮练习是否成功，请说明理由.

（2）第二次训练时，韩旭出手时篮球的竖直高度与第一次训练相同，此时投出的篮球的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y=a(x-3)^2+4.25$，若投篮成功，此时韩旭距篮筐中心的水平距离 d_____5（填“>”，“=”或“<”）.

26.在平面直角坐标系 xOy 中，点（1，m）和（2，n）在抛物线 $y=-x^2+bx$ 上.

（1）若 m＝0，求该抛物线的对称轴；

（2）若 mn＜0，设抛物线的对称轴为直线 $x=t$，

①直接写出 t 的取值范围；

②已知点（－1，y_1），（$\frac{3}{2}$，y_2），（3，y_3）在该抛物线上．比较 y_1，y_2，y_3 的大小，并说明理由.

27.已知等边△ABC中的边长为4，点P，M分别是边BC，AC上的一点，以点P为顶点，作$\angle MPN=60°$，PN与直线AB交于点N.

（1）依题意补全图1；

（2）求证：$BN\cdot CM=CP\cdot BP$

（3）如图2，若点P为BC中点，AM=2AN，求AN的长.

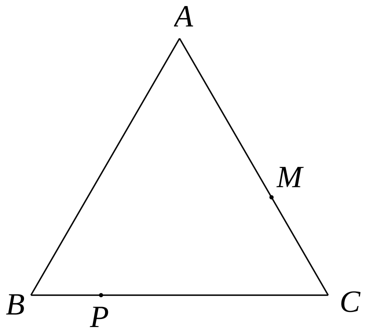


图1

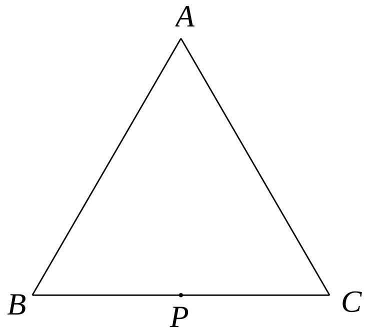
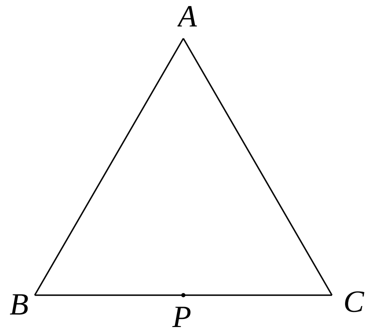


图2



备用图

28.如图1，抛物线的顶点为M，平行于x轴的直线与该抛物线交于点A，B（点A在点B左侧），根据对称性△AMB恒为等腰三角形，我们规定：当△AMB为直角三角形时，就称△AMB为该抛物线的"完美三角形".

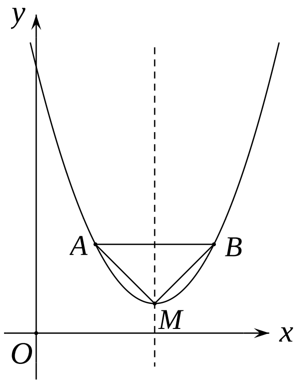


图1

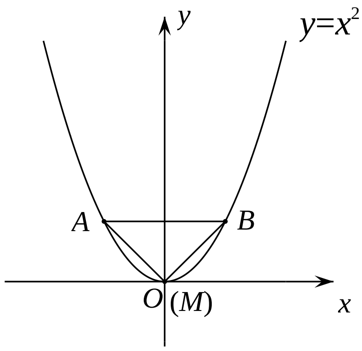


图2

（1）①如图2，抛物线$y=x^2$的"完美三角形"斜边AB的长为____________；

②抛物线$y=x^2+1$与$y=x^2$的完美三角形的斜边长的数量关系是____________.

（2）若抛物线$y=ax^2+4$的"完美三角形"的斜边长为4，求a的值；

（3）若抛物线$y=mx^2+2x+n-5$的"完美三角形"斜边长为n，且$y=mx^2+2x+n-5$的最大值为1，直接写出m，n的值.

2023 - 2024 学年第一学期昌平区融合学区（第一组）
初三年级期中质量抽测
数学试卷参考答案及评分标准

2023.10

一、选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	A	D	D	B	C

二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	8	答案不唯一 例如：$y=-(x-3)^2$	直线 x=1	4：9	$\frac{12}{5}$	答案不唯一 例如：$-\frac{1}{2}$	4	③④⑤

三、解答题（本题共 12 道小题，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27、28 题，每小题 7 分，共 68 分）

17.解：（1）$\angle B=69°$；……………………………………………………………………… 2 分

（2）∵四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $A'B'C'D'$，

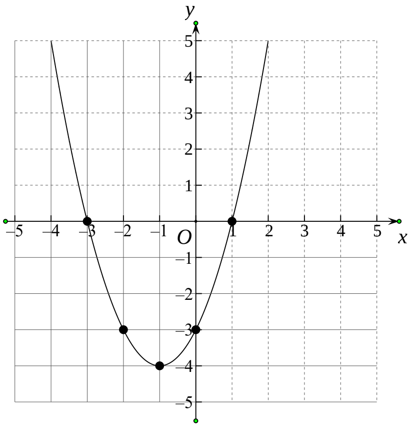
$\therefore \frac{6}{x}=\frac{12}{8}=\frac{y}{12}$．……………………………………………………………… 3 分

解得 x=4， y=18 ．………………………………………………………………5 分

18. 解：（1） $y=x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-4=(x+1)^2-4$

所以顶点坐标为（−1，−4）. ……………………………………………………………2 分

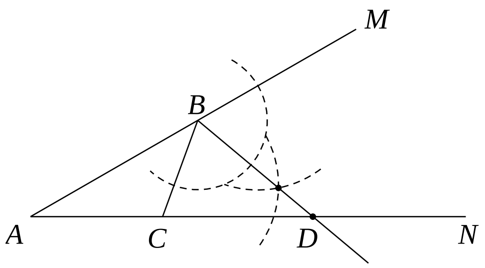
（2）



…………………………………………………………4 分

（3）当 $x<-1$ 时，y 随着 x 的增大而减小 ．………………………………………5 分

19. 解：（1）



……………………………………………1 分

（2）证明：∵ $\angle MAN=30°$， $\angle ABC=40°$

∴ ∠*ACB*=110°

∵ $\angle ABC=40°$

∴ ∠*CBM*=140° .

∵*BD* 是∠*CBM* 的角平分线，

∴ ∠*CBD*= $\frac{1}{2}$ ∠*CBM*=70° . ……………………………………………………………3 分

∴ ∠*ABD*=110° .

∴ ∠*ACB*=∠*ABD*. ……………………………………………………………………4 分

∵ ∠*A*=∠*A*

∴ △*ABC*∽△*ADB*. ……………………………………………………………………5 分

20. 解：（1）*x*=1； ……………………………………………………………………………1 分

（2）*m* =8，*n* =3； ………………………………………………………………………3 分

（3） $x_1=0$， $x_1=2$. ………………………………………………………………………5 分

21. 解：（1）∵图象与 *x* 轴有两个交点

∴ $b^2-4ac>0$. ……………………………………………………………………1 分

∵ $b^2-4ac=(2m+1)^2-4(m^2-1)=4m+5$

∴ $4m+5>0$

$m>-\frac{5}{4}$ ……………………………………………………………………3 分

（2）取 *m*=1，则二次函数为 $y=x^2+3x$.

令 *y*=0，则 $x^2+3x=0$，解得 $x_1=0$， $x_2=-3$.

此时图象与 *x* 轴交点坐标为（0，0）和（-3，0）. ……………………………………………5 分

22.解：（1）设抛物线表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

∵与 y 轴交于点 C（0，2），

∴c=2. ………………………………………………………………………………1 分

将点 A（−4，0），B（2，0）代入可得 $\begin{cases}16a-4b+2=0\\4a+2b+2=0\end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{2}$ ………………………………………………………………2 分

∴抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$. ………………………………………………3 分

（2）$x_n\leq -3$ 或 $x_n\geq 1$. ………………………………………………………………5 分

23.（1）证明：∵BE⊥CD，∠ACB=90°，

∴∠ABC=∠E. …………………………………………………………………………1 分

∵CA=CD

∴∠A=∠ADC.

∵∠ADC=∠BDE，

∴∠A=∠BDE. ………………………………………………………………………2 分

∴△ABC ∽△DBE. ……………………………………………………………………3 分

（2）解：∵在 Rt△BCE 中，BE=3，BC=5，

∴CE=4. ………………………………………………………………………………4 分

∵△ABC ∽△DBE.

∴ $\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}$

设 AC=x，AC=CD=x. 则 DE=4−x，

∴ $\frac{5}{3}=\frac{x}{4-x}$ ………………………………………………………………5 分

∴ $x=\frac{5}{2}$

∴$AC=\frac{5}{2}$. ……………………………………………………………………………6 分

24.解：∵AC⊥EF，NF⊥EF

∴△EAC ∽△ENF. …………………………………………………………………2 分

∴ $\frac{EC}{EF}=\frac{AC}{NF}$ ………………………………………………………………………3 分

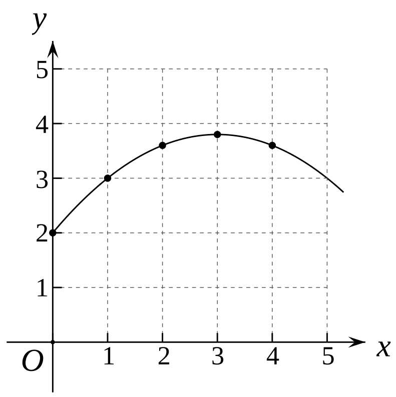
由题可知 AB=5.5m，BM=CF=15m，DB=EC=5m，DE=BC=MF=1.5m.

∴AC=4m，EF=20m. ………………………………………………………………………4 分

$\therefore \frac{5}{20}=\frac{4}{NF}$，解得 $NF=16$. …………………………………………………………………5 分

∴MN=17.5m， …………………………………………………………………………………6 分

25.（1）①



……………………………………………………………………1 分

② 3.8m； ………………………………………………………………………………………2 分

③ 是，理由如下：………………………………………………………………………………3 分

由题可知，抛物线的对称轴为直线 x=3，

又∵抛物线过（1，3），

∴抛物线必过（5，3）.

∵篮筐中心距离地面的竖直高度是 3m，

∴韩旭距篮筐中心的水平距离 5m，第一次投篮练习可以成功 ……………………………5 分

（2） $d>5$. ……………………………………………………………………………………6 分

26. 解：(1）∵点（1，m）在抛物线 $y=-x^2+bx$ 上，m＝0，

$\therefore -1+b=0$.

$\therefore b=1$. ……………………………………………………………………………..1 分

∴该抛物线的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$. …………………………………………………………..2 分

（2）①$\frac{1}{2}<t<1$. ……………………………………………………………………..4 分

②$y_3<y_1<y_2$.

理由如下：由题意可知，抛物线过原点.

设抛物线与 x 轴另一交点的横坐标为 x' .

∵抛物线经过点(1，m)，(2，n)，mn＜0

∴1＜x'＜2.

$\therefore \frac{1}{2}<t<1$.

设点（－1，y_1）关于抛物线的对称轴 $x=t$ 的对称点为 (x_0, y_1).

∵点（－1，y_1）在抛物线上，

∴点 (x_0, y_1) 也在抛物线上.

由 $x_0 - t = t-(-1)$ 得 $x_0 = 2t+1$.

∵ $\frac{1}{2}<t<1$，

∴1＜2t＜2.

∴2＜2t＋1＜3.

∴ $2<x_0<3$.

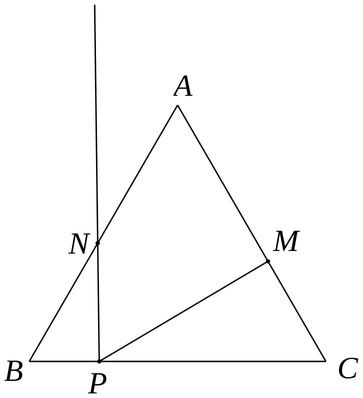
由题意可知，抛物线开口向下.

∴当 $x>t$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵点（$\frac{3}{2}$，y_2），(x_0, y_1)，（3，y_3）在抛物线上，且 $t<\frac{3}{2}<x_0<3$，

∴ $y_3<y_1<y_2$ ……………………………………………………………………………..6 分

27. 解：（1）补全图 1



………………………………………………………..1 分

（2）证明：∵△*ABC* 是等边三角形.

∴∠B=∠C=60°

∵∠*MPN*=60°

∴∠*BPN*+∠*CPM*=120°

∵∠*BPN*+∠*BNP*=120°

∴∠*BNP*=∠*CPM*

∴△*BNP*∽△*CPM* ………………………………………………………………………..2 分

$\therefore \dfrac{BN}{CP}=\dfrac{BP}{CM}$

$\therefore BN\cdot CM=CP\cdot BP$. ……………………………………………………………………….3 分

（3）∵等边△*ABC* 是的边长为 4，

∴*AB*=*BC*=*AC*= 4.

∵点 *P* 为 *BC* 中点，

∴*BP*=*CP*=2.

由（2）问可知 $BN\cdot CM=CP\cdot BP$

$\therefore BN\cdot CM=4$.

由 *AM*=2*AN*，可设 *AN*=*x*，则 *AM*= 2*x*

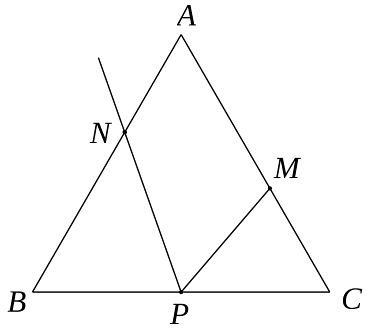


图 1

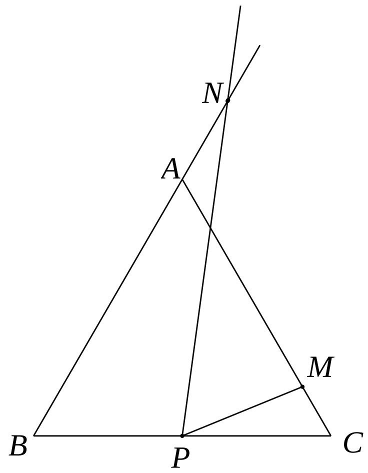


图 2

①如图 1，当 *N* 在线段 *AB* 上时，可得 *BN*=4−*x*，*CM*=4−2*x*.

$\because BN\cdot CM=4$

$\therefore (4-x)(4-2x)=4$

解得 $x_1=3-\sqrt{3}$， $x_2=3+\sqrt{3}$（舍）. ……………………………………………………..5 分

②如图 2，当 *N* 在线段 *AB* 的延长线上时，可得 *BN*=4+*x*，*CM*=4−2*x*.

$\because BN\cdot CM=4$

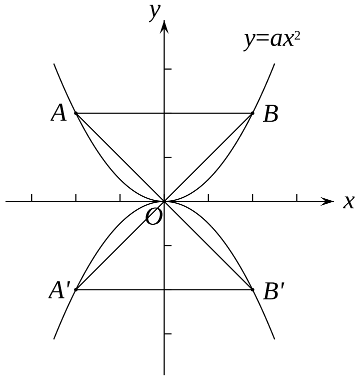
$\therefore (4+x)(4-2x)=4$

解得 $x_1=\sqrt{7}-1$， $x_2=-\sqrt{7}-1$（舍）.

综合上述，*AN* 的长为 $3-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{7}-1$. ……………………………………………………..7 分

28.（1）①2； ……………………………………………………………………………………..1 分

②相等. ………………………………………………………………………………2 分



（2）∵抛物线 $y=ax^2+4$ 与抛物线 $y=ax^2$ 形状相同，

∴抛物线 $y=ax^2+4$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的“完美三角形”全等.

∴抛物线 $y=ax^2$ 的“完美三角形”斜边 AB 长也为 4.

∴B（2，2）或（2，−2）

把点 B 坐标代入 $y=ax^2$ 得到 $a=\pm\frac{1}{2}$.　　……………………………………………………5 分

（3）$m=-\frac{1}{2}$，$n=4$.　　………………………………………………………………………..7 分