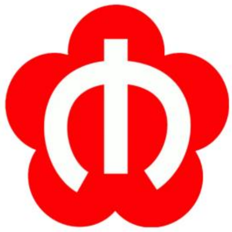
2023 北京汇文中学初三（上）期中

数　学

本试卷共 8 页，共 100 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．

一、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1. 下列全国各地地铁标志图中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

2. 比较二次函数 $y=2x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2+1$，则(　)

A. 开口方向相同　　B. 开口大小相同　　C. 顶点坐标相同　　D. 对称轴相同

3. 指出下列事件中是必然事件的是（　）

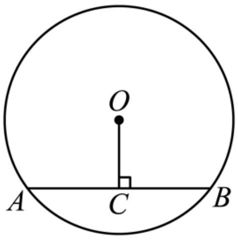
A. 某人射击一次，中靶

B. 抛掷两颗骰子，点数之和为 16

C. 设 a，b 为实数，如果 $a^2+b^2=0$，那么 $a=b=0$

D. 从分别写有号数 1，2，3 的 3 张标签中，任取一张，得到 1 号签

4. 如图，在半径为 5cm 的⊙O 中，弦 AB＝8cm，$OC\perp AB$ 于点 C，则 OC＝（　）



A. 3cm　　B. 4cm　　C. 5cm　　D. 6cm

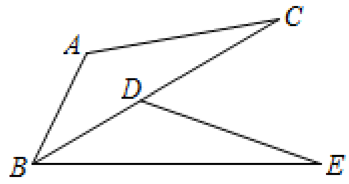
5. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x+3=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k<\frac{1}{3}$　　B. $k>-\frac{1}{3}$　　C. $k>-\frac{1}{3}$ 且 $k\neq0$　　D. $k<\frac{1}{3}$ 且 $k\neq0$

6. ⊙O 的半径为 5cm，点 A、B、C 是直线 a 上的三点，OA、OB、OC 的长度分别是 5cm、4cm、7cm，则直线 a 与⊙O 的位置关系是：（　）

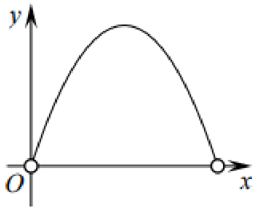
A. 相离　　B. 相切　　C. 相交　　D. 不能确定

7. 如图，将 △ABC 绕点 B 顺时针旋转得 △DBE，点 A，C 的对应点分别点 D，E，当点 D 落在 BC 上时，下列说法错误的是（　）



A. BC 平分 $\angle ABE$　　B. $AB = BD$　　C. $AC \parallel BE$　　D. $AC = DE$

8. 下面的四个选项中都有两个变量，其中变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以用如图所示的图象表示的是（　　）



A. 圆的面积 y 与它的半径 x

B. 正方形的周长 y 与它的边长 x

C. 小丽从家骑车去学校，路程一定时，匀速骑行中所用时间 y 与平均速度 x

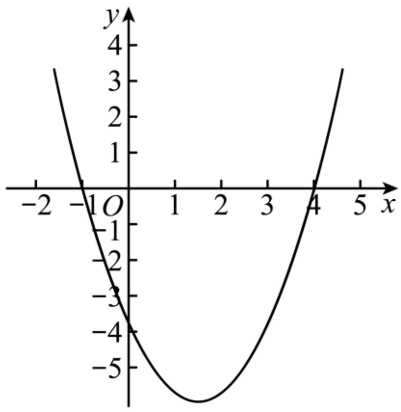
D. 用长度一定的铁丝围成一个矩形，矩形的面积 y 与一边长 x

二、填空题（每题 2 分，共 16 分）

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1，y_1)$，$B(2，y_2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上，且 $y_1>y_2$，请你写出一个符合要求的 k 的值______.

10. 如果将抛物线 $y=-2x^2$ 向右平移 3 个单位，那么所得到的新抛物线的对称轴是直线____.

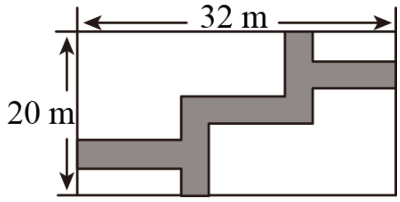
11. 小兰画了一个函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是_______.



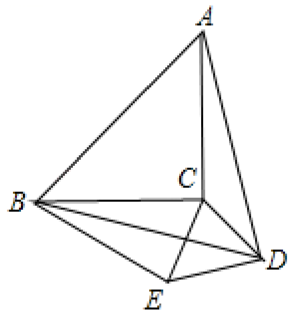
12. 若 m 是一元二次方程 $x^2-5x-2=0$ 的一个实数根，则 $m^2-5m+2023$ 的值是_______.

13. 已知 a，b 是一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根，则 $a(b+1)+b=$_______.

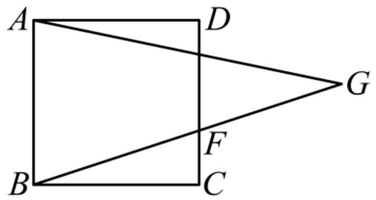
14. 如图，在长为 32 米、宽为 20 米的矩形地面上修筑同样宽的道路（图中阴影部分），余下部分种植草坪，要使草坪的面积为 540 平方米，设道路的宽 x 米，则可列方程为_____.



15. 如图，以等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 为边向内作等边△ABD，连接 DC，以 DC 为边作等边△DCE．B、E 在 C、D 的同侧，若 $AB=\sqrt{2}$，则 $BE=$_____．



16. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，动点 F 在边 CD 上，射线 BF 上取一点 G，使 $\angle AGB=30°$，当动点 F 从点 C 出发向终点 D 运动时，点 G 的运动路径长为______，线段 BG 的最大值是______．



三、解答题（第 17 题 6 分，第 18 题 5 分，第 19 题 6 分，第 20－25 题每题 5 分，第 26－28 题每题 7 分）

17. 用适当方法解方程：

（1）$x^2-4x-7=0$

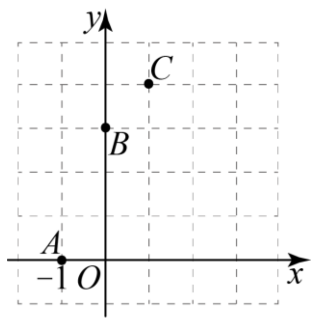
（2）$3x(2x+1)=4x+2$

18. 已知：关于 x 的方程 $x^2+2x=3-4k$ 有两个不相等的实数根（其中 k 为实数）．

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 k 为非负整数，求此时方程的根．

19. 如图，函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(0,3)$，$C(1,4)$．



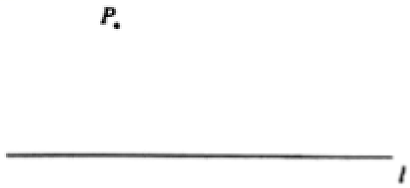
（1）求 b，c 的值，并直接写出顶点坐标；

（2）在图 2 中画出这个函数的图象；（不必列表）

（3）当$0 \le x \le 3$时，结合函数图象，直接写出y的取值范围.

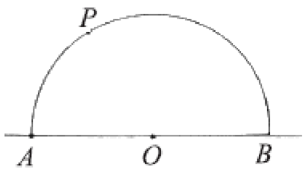
20. 下面是小明设计的“过直线外一点作已知直线的平行线”的尺规作图过程.

已知：直线l及直线l外一点P.



求作：直线PQ，使$PQ // l$.

作法：如图，



①在直线l上取一点O，以点O为圆心，OP长为半径画半圆，交直线l于A, B两点；

②连接PA，以B为圆心，AP长为半径画弧，交半圆于点Q；

③作直线PQ.

所以直线PQ就是所求作的直线.

根据小明设计的尺规作图过程：

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明

证明：连接PB, QB，

$\because PA = QB$，

$\therefore PA =$__________.

$\therefore \angle PBA = \angle QPB$（______________）（填推理的依据）.

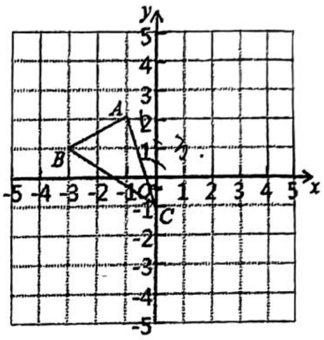
$\therefore PQ // l$（______________）（填推理的依据）.

21. 已知函数 $y=\dfrac{3}{x}$（x＞0）的图象与一次函数 y=ax－2（a≠0）的图象交于点 A（3，n）.

（1）求实数 a 的值；

（2）设一次函数 y=ax－2（a≠0）的图象与 y 轴交于点 B，若点 C 在 y 轴上，且 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOB}$，求点 C 的坐标.

22. 如图，图形中每一小格正方形的边长为 1，已知$\triangle ABC$.



（1） AC 的长等于______．（结果保留根号）

（2）将 $\triangle ABC$ 向右平移 2 个单位得到 $\triangle A'B'C'$，则 A 点的对应点 A' 的坐标是______；B 点的对应点 B'的坐标为_____

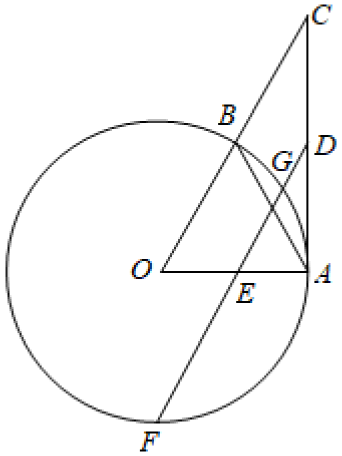
（3）画出将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 90°后得到 $\triangle A_1B_1C_1$，写出 A 点对应点 A_1 的坐标为______．

23. 第 24 届北京冬奥会开幕式二十四节气倒计时惊艳亮相，从“雨水”开始，一路倒数， 最终行至“立春”，将中国人独有的浪漫传达给了全世界．李老师为了让学生深入了解二十四节气，将每个节气的名称写在完全相同且不透明的小卡片上，洗匀后将卡片倒扣在桌面上，邀请同学上讲台随机抽取一张卡片，并向大家介绍卡片上对应节气的含义．

（1）若随机抽取一张卡片，则上面写有“立夏”的概率为？

（2）李老师选出写有“立春、立夏、立秋、立冬”的四张卡片洗匀后倒扣在桌面上，请小丽 同学从中抽取一张卡片记下节气名称，然后放回洗匀再随机抽取一张卡片记下节气名称．请利用画树状图或列表的方法，求两次抽到的卡片上写有相同节气名称的概率．

24. 如图，A，B 是 $\odot O$ 上两点，且 $AB=OA$，连接 OB 并延长到点 C，使 $BC=OB$，连接 AC．



（1）求证：AC 是 $\odot O$ 的切线．

（2）点 D，E 分别是 AC，OA 的中点，DE 所在直线交 $\odot O$ 于点 F，G，$OA=4$，求 GF 的长．

25. 如图 1，某公园在入园处搭建了一道“气球拱门”，拱门两端落在地面上．若将拱门看作抛物线的一部分，建立如图 2 所示的平面直角坐标系．拱门上的点距地面的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=a(x-h)^2+k(a<0)$．

图1

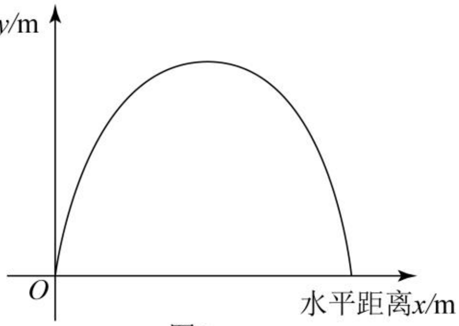


图2

（1）拱门上的点的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	2	3	6	8	10	12
竖直高度 y/m	4	5.4	7.2	6.4	4	0

根据上述数据，直接写出“门高”（拱门的最高点到地面的距离），并求出拱门上的点满足的函数关系 $y=a(x-h)^2+k(a<0)$．

（2）一段时间后，公园重新维修拱门．新拱门上的点距地面的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=-0.288(x-5)^2+7.2$，若记“原拱门”的跨度（跨度为拱门底部两个端点间的距离）为 d_1，“新拱门”的跨度为 d_2，则 d_1__________ d_2（填“>”、“=”或“<”）．

26. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 经过点 $A(-2,t)$，$B(m,p)$．

（1）若 $t=0$，

①求此抛物线的对称轴；

②当 $p<t$ 时，直接写出 m 的取值范围；

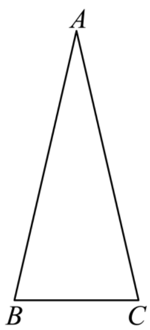
（2）若 $t<0$，点 $C(n,q)$ 在该抛物线上，$m<n$ 且 $3m+3n\le -4$，请比较 p，q 的大小，并说明理由．

27. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC<60^\circ$，将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到点 D，点 E 与点 D 关于直线 BC 对称，连接 CD，CE，DE．

（1）依题意补全图形；

（2）判断 $\triangle CDE$ 的形状，并证明；

（3）请问在直线 CE 上是否存在点 P，使得 $PA-PB=CD$ 成立？若存在，请用文字描述出点 P 的准确位置，并画图证明；若不存在，请说明理由．



28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于两个点 P，Q 和图形 W，如果在图形 W 上存在点 M，N（M，N 可以重合）使得 $PM=QN$，那么称点 P 与点 Q 是图形 W 的“一对平衡点”．如图 1，已知点 $A(0,3),B(2,3)$．

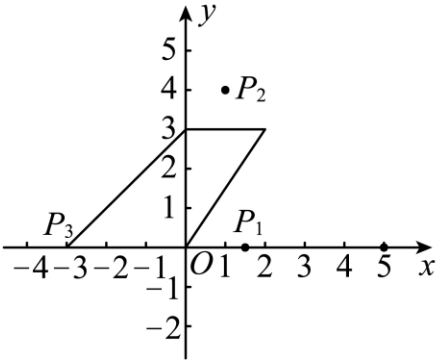


图1

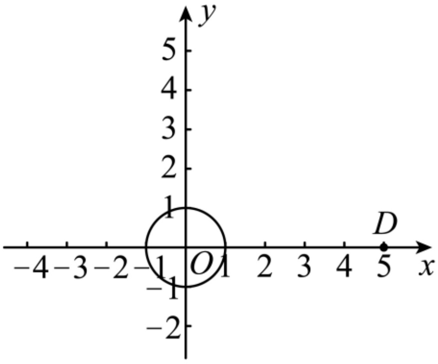


图2

（1）设点 O 与线段 AB 上一点的距离为 d，则 d 的最小值是______，最大值是______；

（2）在 $P_1\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，$P_2(1,4)$，$P_3(-3,0)$ 这三个点中，与点 O 是线段 AB 的“一对平衡点”的是______；

（3）如图 2，已知 $\odot O$ 的半径为 1，点 D 的坐标为 $(5,0)$．若点 $E(x,2)$ 在第一象限，且点 D 与点 E 是 $\odot O$ 的“一对平衡点”，求 x 的取值范围；

（4）如图 3，已知点 $H(-3,0)$，以点 O 为圆心，OH 长为半径画弧，交 x 轴的正半轴于点 K．点 $C(a,b)$（其中 $b \geq 0$）是坐标平面内一个动点，且 $OC=5$，$\odot C$ 是以点 C 为圆心，半径为 2 的圆，若 $\overset{\frown}{HK}$ 上的任意两个点都是 $\odot C$ 的“一对平衡点”，直接写出 b 的取值范围．

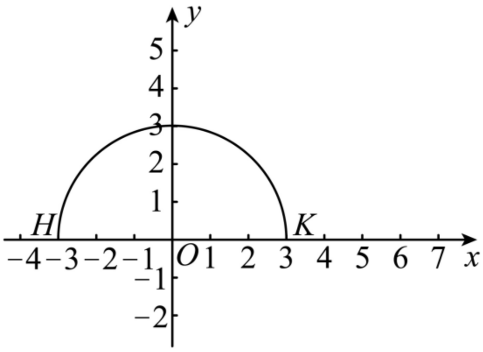


图3

参考答案

本试卷共 8 页，共 100 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．

一、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1.【答案】C

【分析】试题解析：选项A既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故该该选项错误；

选项B既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故该选项错误；

选项C 既是轴对称图形，也是中心对称图形，故该选项正确；

选项D是轴对称图形，但不是中心对称图形，故该选项错误.

故选C.

【详解】请在此输入详解！

2.【答案】D

【分析】根据二次函数的性质，分别判断即可得到答案.

【详解】解： $y=2x^2$ 开口向上，顶点为（0，0），对称轴为 y 轴；

$y=-\frac{1}{2}x^2+1$开口向下，顶点为（0，1），对称轴为 y 轴；

$\because 2\neq\frac{1}{2}$，则开口大小不相同；

故选择：D.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，解题的关键是熟记二次函数的性质.

3.【答案】C

【分析】根据必然事件的定义逐一进行分析，即可得到答案.

【详解】解：A、是随机事件，不符合题意，选项错误；

B、是不可能事件，不符合题意，选项错误；

C、是必然事件，符合题意，选项正确；

D、是随机事件，不符合题意，选项错误，

故选 C.

【点睛】本题考查了事件的分类，熟练掌握必然事件的定义是解题关键.

4.【答案】A

【分析】连接OA，根据垂径定理，得 $AC=\frac{1}{2}AB$；再根据勾股定理，即可求出OC .

【详解】连接OA

$\therefore OA=5$

$\because OC\perp AB$

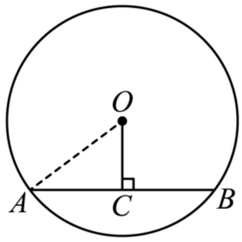
$\therefore \angle OCA = 90^\circ$， $AC = \frac{1}{2}AB = 4$

∴在 $Rt\triangle OAC$ 中，$OA^2 = AC^2 + OC^2$

$\therefore 5^2 = 4^2 + OC^2$

$\therefore OC = 3$.

故选：A.



【点睛】本题考查圆的知识，垂径定理，勾股定理等知识，解题的关键是熟练掌握垂径定理的运用.

5.【答案】D

【分析】要使一元二次方程有两个不相等的实数根，判别式必须大于0，得到 k 的取值范围，因为方程是一元二次方程，所以 k 不为0.

【详解】∵关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x+3=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\triangle=4-12k>0$，且 $k\neq0$

∴$k<\frac{1}{3}$ 且 $k\neq0$，

故选 D.

【点睛】本题考查的是根的判别式，当判别式的值大于0时，方程有两个不相等的实数根，同时要满足二次项的系数不能是0.

6.【答案】C

【分析】本题考查了圆与直线的位置关系．熟练掌握：点到直线的距离小于圆的半径即直线与圆相交是解题的关键.

根据点到直线的距离小于圆的半径即直线与圆相交进行判断作答即可.

【详解】解：∵ $\odot O$ 的半径为 5cm，点 A、B、C 是直线 a 上的三点，OA、OB、OC 的长度分别是 5cm、4cm、7cm，

∴圆心到直线的距离必定小于半径，

∴直线 a 与 $\odot O$ 相交，

故选：C.

7.【答案】C

【分析】根据旋转的性质得到 $\triangle ABC \cong \triangle DBE$，由全等三角形的性质即可进行判断.

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转得 $\triangle DBE$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DBE$，

$\therefore \angle ABC=\angle DBE$， $AB=BD$， $AC=DE$，

∴A、B、D均正确，

无法证明 $AC \parallel BE$，

故选：C．

【点睛】此题主要考查了图形的旋转，熟练掌握旋转的性质是解题的关键．

8.【答案】D

【分析】根据题意求出两个变量之间的函数关系式分别判断即可．

【详解】∵圆的面积 y 与它的半径 x 的关系式为 $y=\pi x^2$

∴圆的面积 y随半径 x 的增大而增大，故A 选项不符合题意；

∵正方形的周长 y 与它的边长 x 的关系式为 $y=4x$

∴正方形的周长 y随边长 x 的增大而增大，故B 选项不符合题意；

设路程为 s，则所用时间 y 与平均速度 x 的关系式为 $y=\frac{s}{x}$

∴所用时间 y 随平均速度 x 的增大而减小，故C 选项不符合题意；

设铁丝的长度为 a，则矩形的面积 $y=x\bullet\frac{a-2x}{2}=-x^2+\frac{1}{2}ax$

∴矩形的面积 y 与边长 x 的之间的函数关系可以用如图所示的图象表示，故D 选项符合题意．

故答案选 D．

【点睛】本题考查了函数的图象，准确地得出两个变量之间的关系式是解题的关键．

二、填空题（每题 2 分，共 16 分）

9.【答案】-2（答案不唯一）

【分析】由题可知 A，B 在两个象限，根据 $y_1>y_2$ 得到图象位于二、四象限，即 $k<0$ 给出符合题意的 k 值即可．

【详解】由题可知 A，B 在两个象限，

$\because y_1>y_2$，

∴反比例函数 $y=\frac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的图象位于二、四象限，

$\therefore k<0$，

即 $k=-2$，

故答案为：-2．

【点睛】本题考查反比例函数的图象和性质，熟练掌握反比例函数的性质是解题关键．

10.【答案】$x=3$．

【分析】直接利用二次函数图象平移规律得出答案．

【详解】将抛物线 $y=-2x^2$ 向右平移 3 个单位得到的解析式为：$y=-2(x-3)^2$，故所得到的新抛物线的对称轴是直线：$x=3$．

故答案为 $x=3$．

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换，正确记忆平移规律是解题的关键．

11．【答案】$x=-1$ 或 $x=4$ ## $x_1=-1$，$x_2=4$

【分析】本题考查了二次函数与一元二次方程，利用二次函数的图象与 x 轴的交点坐标即可求解，熟练掌握用二次函数的图象解一元二次方程．

【详解】解：由图得：

函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标为：$(-1,0)$，$(4,0)$，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解为：$x=-1$ 或 $x=4$，

故答案为：$x=-1$ 或 $x=4$．

12．【答案】2025

【分析】将已知方程变形得 $x^2-5x=2$，根据方程的解可将 m 代入方程，即可求解，本题主要考查一元二次方程的解的运用，理解并掌握方程的解的计算方法是解题的关键．

【详解】解：已知 $x^2-5x-2=0$，

$\therefore x^2-5x=2$，

$\because m$ 是一元二次方程 $x^2-5x-2=0$ 的一个实数根，

$\therefore m^2-5m=2$，

$\therefore m^2-5m+2023=2+2023=2025$，

故答案为：2025．

13．【答案】7

【分析】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，先根据一元二次方程的根与系数的关系可得 $a+b=4,ab=3$，再作为整体代入计算即可得．

【详解】解：$\because a,b$ 是一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根，

$\therefore a+b=-\dfrac{-4}{1}=4$，$ab=\dfrac{3}{1}=3$，

则 $a(b+1)+b=ab+a+b=3+4=7$，

故答案为：7．

14．【答案】$(32-x)(20-x)=540$

【分析】可借助平移性质得到长为 $(32-x)$、宽为 $(20-x)$ 的矩形草坪，然后利用矩形面积公式列方程即可．

【详解】解：根据题意，草坪的面积为 $(32-x)(20-x)$，

故所列方程为 $(32-x)(20-x)=540$，

故答案为：$(32-x)(20-x)=540$．

【点睛】本题考查一元二次方程的应用，读懂题意，找出图形中的等量关系，借助平移性质列方程是解答的关键.

15.【答案】1

【分析】由等腰直角三角形 ABC 中，$AB=\sqrt{2}$，由勾股定理可知 $AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=1$，再证△$ADC$≌△$BDE$，从而推出 $BE=AC=1$.

【详解】∵等腰直角三角形 ABC 中，$AB=\sqrt{2}$，

∴$AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=1$，

∵等边△ABD 和等边△DCE，

∴$AD=BD$，$CD=ED$，$\angle ADB=\angle CDE$，

∴$\angle ADC=\angle BDE$，

在△ADC 和△BDE 中，$\begin{cases} \mathrm{AD}=\mathrm{BD} \\ \angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDE} \\ \mathrm{CD}=\mathrm{ED} \end{cases}$，

∴△ADC≌△BDE（SAS），

∴$BE=AC=1$.

【点睛】此题主要考查勾股定理的运用以及三角形全等的判定，熟练掌握，即可解题.

16.【答案】 ①. π ②. 4

【分析】此题考查了求弧长，直径是圆中最长的弦，正方形的性质．以 AB 为边，在 AB 右侧构造等边三角形 $\triangle AOB$，根据 $\angle AGB=30°$，推出则点 G 在以点 O 为圆心，2 为半径的⊙O 上运动，则当点 F 与点 C 重合时，点 G 在点 G_1 处，当点 F 与点 D 重合时，点 G 在点 G_2 处，根据正方形的性质推出 $\angle G_2OG_1=2\angle G_2BG_1=90°$，求出 G_1G_2 即可得出点 G 的运动路径长，当 BG 经过点 O 时，BG 取最大值，即可求解.

【详解】解：以 AB 为边，在 AB 右侧构造等边三角形 $\triangle AOB$，

∵ $\triangle AOB$ 为等边三角形，

∴ $\angle AOB=60°$，$OA=OB=AB=2$

∵ $\angle AGB=30°$，

∴ $\angle AGB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$，则点 G 在以点 O 为圆心，2 为半径的⊙O 上运动，

当点 F 与点 C 重合时，点 G 在点 G_1 处，当点 F 与点 D 重合时，点 G 在点 G_2 处，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

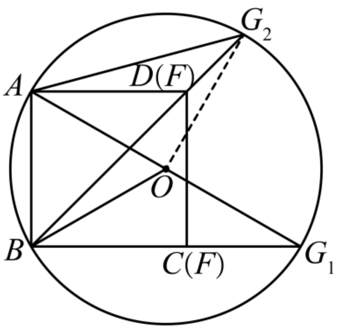
∴ $\angle G_2BG_1=45°$，

∴ $\angle G_2OG_1=2\angle G_2BG_1=90°$，

$\therefore G_1G_2=\frac{90\pi r}{180}=\frac{90\pi\times 2}{180}=\pi$，

当 BG 经过点 O 时，BG 取最大值，此时 $BG=2BO=4$，

故答案为：π，4．



三、解答题（第17题6分，第18题5分，第19题6分，第20－25题每题5分，第26－28题每题7分）

17.【答案】（1）$x_1=2+\sqrt{11}$，$x_2=2-\sqrt{11}$

（2）$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{2}{3}$

【分析】（1）运用求根公式解一元二次方程即可；

（2）运用提取公因式法解一元二次方程即可；

本题主要考查公式法，因式分解法解一元二次方程，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键．

【小问1详解】

解：$x^2-4x-7=0$，

$\therefore a=1,b=-4,c=-7$，则 $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-7)=16+28=44>0$，

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm2\sqrt{11}}{2}=2\pm\sqrt{11}$，

$\therefore x_1=2+\sqrt{11}$，$x_2=2-\sqrt{11}$．

【小问2详解】

解：$3x(2x+1)=4x+2$

移项得，$3x(2x+1)-2(2x+1)=0$

提取公因式得，$(2x+1)(3x-2)=0$

$\therefore 2x+1=0$ 或 $3x-2=0$，

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{2}{3}$．

18.【答案】（1）$k<1$

（2）$x_1=-3$，$x_2=1$，

【分析】本题主要考查一元二次方程的解法以及一元二次方程根的情况与判别式Δ的关系：

（1）根据一元二次方程根的情况求解参数的范围；先把方程化为$(x+1)^2=4-4k$，结合方程有两个不相等的实数根，建立不等式$4-4k>0$，从而可得答案；

（2）一元二次方程的解法；把$k=0$代入原方程可得方程为：$\left(x+1\right)^2=4$，再利用直接开平方法解方程即可.

【小问1详解】

解：原方程可化为$(x+1)^2=4-4k$.

∵ 该方程有两个不相等的实数根，

∴ $4-4k>0$

解得$k<1$.

∴ k的取值范围是$k<1$.

【小问2详解】

∵ k为非负整数，且$k<1$，

∴ $k=0$.

此时方程为$\left(x+1\right)^2=4$，

∴ $x+1=2$或$x+1=-2$，

解得：$x_1=-3$，$x_2=1$.

19.【答案】（1）b、c的值分别是：2，3，顶点坐标$(1,4)$

（2）见解析　（3）$0\le y\le 4$

【分析】（1）将$A(-1,0)$和$B(0,3)$代入$y=-x^2+bx+c$即可求解；

（2）描点、连线即可完成作图；

（3）找到$0\le x\le 3$时的函数图像即可求解.

【小问1详解】

解：由题得，将$A(-1,0)$和$B(0,3)$代入$y=-x^2+bx+c$得，

$\begin{cases}-1-b+c=0\\ c=0\end{cases}$解得，$\begin{cases}b=2\\ c=3\end{cases}$，

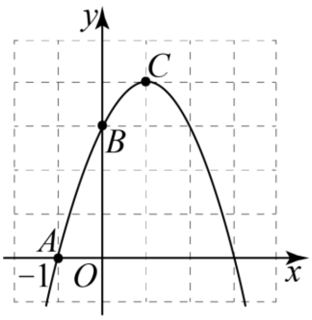
即b、c的值分别是：2，3，

∴ $y=-x^2+2x+3=-\left(x-1\right)^2+4$

顶点坐标$(1,4)$；

【小问2详解】

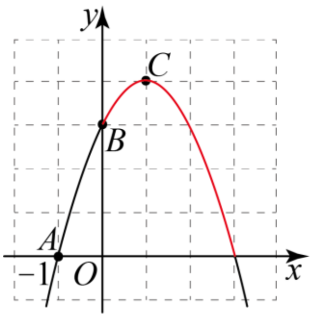
解：如图所示；



【小问 3 详解】

解：由（2）中的图象可知：

下图红色部分即为$0 \le x \le 3$时的函数图象，



此时：$y_{\min} = 0, y_{\max} = 4$，

故：$0 \le y \le 4$.

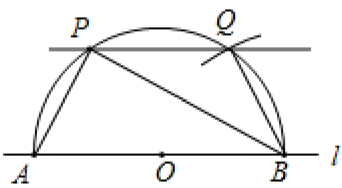
【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，解题的关键是熟记相关结论是解题关键.

20.【答案】（1）补全的图形如图所示见解析；（2）QB，等弧所对的圆周角相等内错角相等，两直线平行.

【分析】(1) 根据要求作图即可；

(2) 根据圆的有关性质和平行线的判定求解可得.

【详解】解：(1) 如图所示：



(2) 证明：连接 PB、QB.

$\because PA = QB$，

$\therefore PA = QB$.

$\therefore \angle PBA = \angle QPB($ 等弧所对圆周角相等$)$.

$\therefore PQ // l($ 内错角相等，两直线平行$)$.

故答案为QB，等弧所对圆周角相等，内错角相等，两直线平行.

【点睛】本题主要考查作图－复杂作图，解题的关键是掌握圆的有关性质和平行线的判定.

21.【答案】（1）a=1；（2）C（0，－6）或（0，2）.

【分析】（1）把A（3，n）代入 $y=\frac{3}{x}$（x＞0）求得n的值，即可得A点坐标，再把A点坐标代入一次函数y=ax－2可得a的值；（2）先求出一次函数y=ax－2（a≠0）的图象与y轴交点B的坐标，再分两种情况（①当C点在y轴的正半轴上或原点时；②当C点在y轴的负半轴上时）求点C的坐标即可.

【详解】（1）∵函数 $y=\frac{3}{x}$（x＞0）的图象过（3，n），

∴3n=3，

n=1，

∴A（3，1）

∵一次函数y=ax－2（a≠0）的图象过点A（3，1），

∴1=3a－1，解得a=1；

（2）∵一次函数y=ax－2（a≠0）的图象与y轴交于点B，

∴B（0，－2），

①当C点在y轴的正半轴上或原点时，设C（0，m），

∵$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOB}$，

∴$\frac{1}{2}$×（m+2）×3=2×2×$\frac{1}{2}$×3，解得：m=2，

②当C点在y轴的负半轴上时，设（0，h），

∵$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOB}$，

∴$\frac{1}{2}$×（－2－h）×3=2×2×$\frac{1}{2}$×3，解得：h=－6，

∴C（0，－6）或（0，2）.

【点睛】本题主要考查了一次函数与反比例函数交点问题，解决第（2）问时要注意分类讨论，不要漏解.

22.【答案】（1）$\sqrt{10}$

（2）图见解析，$(1,2)$，$(-1,1)$

（3）图见解析$(3,0)$

【分析】此题考查了勾股定理，平移和旋转作图，解题的关键是熟练掌握平移和旋转的作图方法以及性质.

（1）根据勾股定理，即可求解；

（2）先画出点 A、B、C 平移后的对应点，再依次连接即可，根据图形即可写出点 A' 的坐标和点 B'的坐标；

（3）先画出点 A、B、C 绕点 C 顺时针旋转 90 度后的对应点，再依次连接，根据旋转的性质得出 $\angle ACA_1=90°, AC=A_1C$，进而求证 $\triangle ACE \cong \triangle CA_1F$，得出 $CF=AE=3, CE=A_1F=1$，即可得出点 A_1 的坐标.

【小问1详解】

解：根据勾股定理可得：$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

故答案为：$\sqrt{17}$；

【小问 2 详解】

解：如图所示：$\triangle A'B'C'$ 即为所求，

由图可知，点 A' 的坐标是 $(1,2)$，点 B' 的坐标是 $(-1,1)$，

故答案为：$(1,2)$，$(-1,1)$；

【小问 3 详解】

解：如图所示：$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，

由图可得：$AE=3, CE=1$，

$\because \triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 90°后得到 $\triangle A_1B_1C_1$，

$\therefore \angle ACA_1=90°, AC=A_1C$，

$\therefore \angle ACE+\angle A_1CF=90°$，

$\because \angle ACE+\angle CAE=90°$，

$\therefore \angle CAE=\angle A_1CF$，

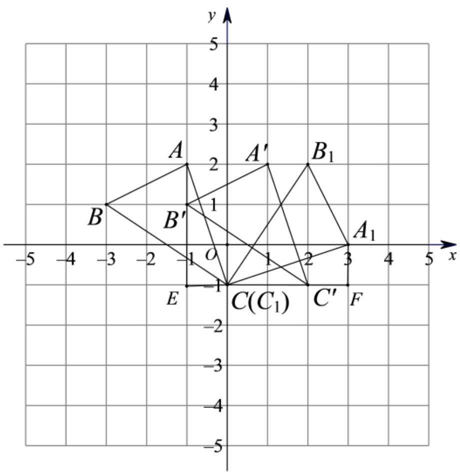
$\because \angle CAE=\angle A_1CF$，$\angle AEC=\angle CFA_1$，$AC=A_1C$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CA_1F$，

$\therefore CF=AE=3, CE=A_1F=1$，

$\therefore A_1(3,0)$，

故答案为：$(3,0)$.



23.【答案】（1）$\dfrac{1}{24}$

（2）$\dfrac{1}{4}$

【分析】（1）直接利用概率公式计算即可；

（2）画出树状图表示出所有等可能的结果，再找出符合题意的结果，最后根据概率公式计算即可．

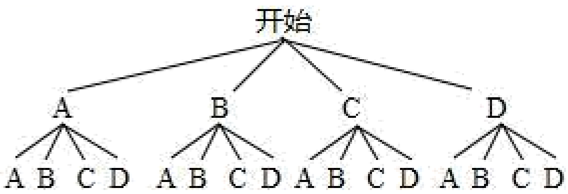
【小问 1 详解】

∵共有 24 张卡片，且抽取每张卡片的可能性相同，

∴若随机抽取一张卡片，则上面写有“立夏”的概率为$\frac{1}{24}$；

【小问 2 详解】

把写有“立春、立夏、立秋、立冬”的四张卡片分别记为 A、B、C、D，画树状图如下：



由树状图可知：共有 16 种等可能的结果，其中两次抽到的卡片上写有相同节气名称的结果有 4 种，

∴两次抽到的卡片上写有相同节气名称的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$．

【点睛】本题考查简单的概率计算，画树状图或列表法求概率．掌握概率公式和正确地列出表格或画出树状图是解题关键．

24.【答案】（1）见解析；（2）$2\sqrt{13}$

【分析】（1）先证得△AOB 为等边三角形，从而得出∠OAB=60°，利用三角形外角的性质得出∠C=∠CAB=30°，由此可得∠OAC=90°即可得出结论；

（2）过 O 作 OM⊥DF 于 M，DN⊥OC 于 N，利用勾股定理得出 $AC=4\sqrt{3}$，根据含 30°的直角三角形的性质得出 $DN=\sqrt{3}$，再根据垂径定理和勾股定理即可求出 GF 的长．

【详解】（1）证明：∵AB=OA，OA=OB

∴AB=OA=OB

∴△AOB 为等边三角形

∴∠OAB=60°，∠OBA=60°

∵BC=OB

∴BC=AB

∴∠C=∠CAB

又∵∠OBA=60°=∠C+∠CAB

∴∠C=∠CAB=30°

∴∠OAC=∠OAB+∠CAB=90°

∴AC 是⊙O 的切线；

（2）∵OA=4

∴OB=AB=BC=4

$\therefore OC=8$

$\therefore AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

$\because D$、E 分别为 AC、OA 的中点，

$\therefore OE//BC$，$DC=2\sqrt{3}$

过 O 作 $OM\perp DF$ 于 M，$DN\perp OC$ 于 N

则四边形 $OMDN$ 为矩形

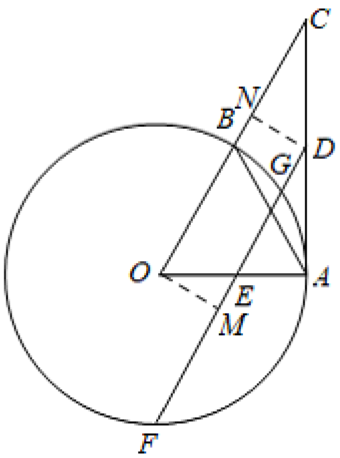
$\therefore DN=OM$

在 $Rt\triangle CDN$ 中，$\angle C=30°$，$\therefore DN=\frac{1}{2}DC=\sqrt{3}$

$\therefore OM=\sqrt{3}$

连接 OG，$\because OM\perp GF$

$\therefore GF=2MG=2\sqrt{OG^2-OM^2}=2\sqrt{4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{13}$



【点睛】本题考查了切线的判定、垂径定理、等边三角形的性质和判定，熟练掌握相关的知识是解题的关键.

25.【答案】(1) $y=-0.2(x-6)^2+7.2$

(2) >

【分析】(1) 由表格得当 $x=2$ 时，$y=4$，当 $x=10$ 时，$y=4$，从而可求顶点坐标，即可求解；

(2) 由表格可以直接求出 d_1，由 $y=-0.288(x-5)^2+7.2$ 可求出 d_2，进行比较即可.

【小问 1 详解】

解：由表格得：

$\because 6-2=10-6$，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(6,7.2)$，

$\therefore y=a(x-6)^2+7.2$，

$\therefore a(2-6)^2+7.2=4$，

解得：$a=-0.2$，

$\therefore y=-0.2(x-6)^2+7.2$．

【小问 2 详解】

解：由表格得

当 $x=12$ 时，$y=0$，

原拱门中：$d_1=12$（m）；

新拱门中：

当 $y=0$ 时，

$-0.288(x-5)^2+7.2=0$

解得：$x_1=0$，$x_2=10$，

$\therefore d_2=x_2-x_1=10$（m），

$\because 12>10$，

$\therefore d_1>d_2$．

故答案：>．

【点睛】本题考查了二次函数的实际应用，理解函数中自变量和应变量的实际意义是解题的关键．

26.【答案】(1) ① $x=-\frac{1}{2}$；② $x<-2$ 或 $x>1$

(2) $p<q$，理由见解析

【分析】(1) ①把点 $A(-2,0)$ 代入 $y=ax^2-(a+2)x+2$，求出 a 的值，可求出抛物线解析式，再把解析式化为顶点式，即可求解；②求出抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(1,0)$，再根据二次函数的图象，即可求解；

(2) 把点 $A(-2,t)$ 代入 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 可得 $t=6a+6$，再由 $t<0$，可得 $a<-1$，$-1<\frac{1}{a}<0$，从而得到抛物线开口向下，抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-(a+2)}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，然后根据 $3m+3n\le -4$，可得 $\frac{m+n}{2}\le -\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$，再根据 $m<n$，可得 $B(m,p)$ 到对称轴的距离大于 $C(n,q)$ 对称轴的距离，即可求解．

【小问 1 详解】

解：①当 $t=0$ 时，点 $A(-2,0)$，

把点 $A(-2,0)$ 代入 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 得：

$0=4a+2(a+2)+2$，

解得：$a=-1$，

∴该函数解析式为$y=-x^2-x+2$，

∵ $y=-x^2-x+2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{1}{2}$；

②令$y=0$，则$0=-x^2-x+2$，

解得：$x_1=1, x_2=-2$，

∴抛物线与x轴的另一个交点为$(1,0)$，

∵ $-1<0$，

∴抛物线开口向下，

∴当$p<0$时，m的取值范围为$x<-2$或$x>1$；

【小问2详解】

解：$p<q$，理由如下：

把点$A(-2,t)$代入$y=ax^2-(a+2)x+2$得：

$t=4a+2(a+2)+2=6a+6$，

∵ $t<0$，

∴ $6a+6<0$，

∴ $a<-1$，

∴ $-1<\frac{1}{a}<0$，

∴抛物线开口向下，抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{-(a+2)}{2a}=\frac{a+2}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，

∴ $3m+3n\le -4$，

∴ $m+n\le -\frac{4}{3}$，

∴ $\frac{m+n}{2}\le -\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$，

∵ $m<n$，

∴ $B(m,p)$到对称轴的距离大于$C(n,q)$对称轴的距离，

∴ $p<q$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键．

27.【答案】(1）见详解　（2）$\triangle CDE$ 是等边三角形，证明见详解；

（3）存在，点 P 在点 C 左边距离为 CE 长的位置，证明见详解.

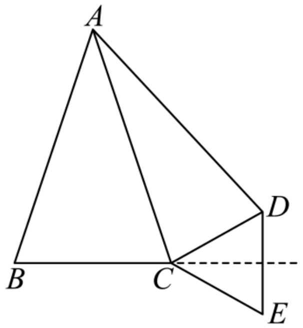
【分析】(1）根据题意补全图形即可；

（2）连接 BD、CE，由旋转的性质及对称的性质利用 SAS 可证 $\triangle ACD \cong \triangle BED$，易得 $CD = ED = CE$，可知 $\triangle CDE$ 是等边三角形；

（3）将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle ABC'$，延长 AC' 交直线 CE 于点 P，点 P 即为所求；连接 BP，CC'，先求出 $\angle DCF = \angle ECF = 30°$，由旋转可得 $CD = C'A$，$\angle C'BC = 60°$，$BC = BC'$，则 $\triangle BCC'$ 是等边三角形，根据 $\angle BCP = \angle ECF = 30°$，可得 CP 是 BC' 的垂直平分线，则 $BP = C'P$，由此即可证明 $CD = PA - PB$.

【小问 1 详解】

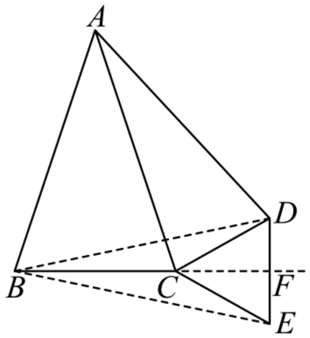
解：如图所示，即为所求，



【小问 2 详解】

解：$\triangle CDE$ 是等边三角形，证明如下：

如图所示，连接 BD、CE，设 DE 与直线 BC 交于 F，



由点 D 与点 E 关于直线 BC 对称可知 BF 垂直平分 DE，

$\therefore CD = CE，BD = BE$，

由旋转可知 $AB = AD，\angle BAD = 60°$，

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

$\therefore AB = BD = AD，\angle BAD = \angle ABD = 60°$

$\therefore \angle CAD = 60° - \angle BAC$

$\because AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \dfrac{180° - \angle BAC}{2} = 90° - \dfrac{\angle BAC}{2}，BE = BD = AB = AC$，

$\therefore \angle FBD = \angle ABC - \angle ABD = 90° - \frac{\angle BAC}{2} - 60° = 30° - \frac{\angle BAC}{2}$，

$\therefore \angle EBD = 2\angle FBD = 60° - \angle BAC$

$\therefore \angle CAD = \angle FBD$，

在$\triangle ACD$和$\triangle BED$中，

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle CAD = \angle EBD, \\ AC = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BED(\text{SAS})$

$\therefore CD = ED$

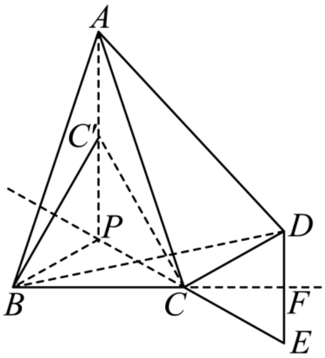
$\therefore CD = ED = CE$，

$\therefore \triangle CDE$是等边三角形；

【小问 3 详解】

解：存在，如图所示，将$\triangle BCD$绕点B逆时针旋转$60°$得到$\triangle ABC'$，延长AC'交直线CE于点P，点P即为所求；

证明如下：连接BP，CC'，



由（2）得$\triangle CDE$是等边三角形，

$\therefore \angle DCE = 60°$

$\therefore \angle DCF = \angle ECF = 30°$，

由旋转可得$CD = C'A$，$\angle C'BC = 60°$，$BC = BC'$，

$\therefore \angle BC'P = 30°$，$\triangle BCC'$是等边三角形，

$\because \angle BCP = \angle ECF = 30°$，

$\therefore \angle BCP = \angle C'CP = 30°$，

$\therefore CP$是BC'的垂直平分线，

$\therefore BP = C'P$，

$\because AC' = PA - PC'$，

$\therefore CD = PA - PB$

$\therefore$直线CE上存在点P，使得$PA - PB = CD$成立.

【点睛】本题是三角形的综合题，涉及了旋转作图、等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质，旋转的性质等等，灵活的应用等边三角形的判定与性质是解题的关键.

28.【答案】（1）3，$\sqrt{13}$

（2）$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$

（3）$\sqrt{5}\le x\le 3\sqrt{5}$

（4）$\frac{4\sqrt{14}}{3}\le b\le 5$

【分析】（1）观察图像，d的最小值是OA，最大值为OB，由勾股定理求出OB即可得解；

（2）分别求出$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$到线段$AB$上一点的距离最小值为3；$P_2\left(1,4\right)$到线段$AB$上一点的距离最大值为$\sqrt{2}$；$P_3\left(-3,0\right)$到线段$AB$上一点的距离最小值为$3\sqrt{2}$；再根据平衡点的定义求解；

（3）如图，根据平衡点的定义得到需要满足E_1到$\odot O$的最大距离是4，E_2到$\odot O$的最小距离是6，然后分别求出x的最小值和最大值即可；

（4）由点C在以O为圆心5为半径的上半圆上运动，推出以C为圆心2为半径的圆刚好与HK相切，此时要想HK上的任意两点都是圆的平衡点，需要满足$CK\le 6$，$CH\le 6$，分别求出b值，再由点C在$CK=6$和$CH=6$中间时，$a=0$，$b=5$，b取最大值，即可得出答案.

【小问1详解】

解：∵$A\left(0,3\right),B\left(2,3\right)$，

∴$OA=3$，$AB=2$，

∴$OB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

观察图像可得：d的最小值为3，最大值为$\sqrt{13}$，

故答案为：3，$\sqrt{13}$；

【小问2详解】

解：由（1）知点O与线段AB上一点的距离最小值为3，最大值为$\sqrt{13}$，

∵$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$到线段$AB$上一点的距离最小值为3，

∴在线段AB上存在点M，N（M，N可以重合）使得$P_1M=ON$，

∴点$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$与点$O$是线段$AB$的“一对平衡点”；

∵$P_2\left(1,4\right)$到线段AB上一点的距离最大值为$P_2A=P_2B=\sqrt{1^2+\left(4-3\right)^2}=\sqrt{2}<3$，

∴在线段AB上不存在点M，N（M，N可以重合）使得$P_2M=ON$，

∴点 $P_2(1,4)$ 与点 O 不是线段 AB 的“一对平衡点”；

∵ $P_3(-3,0)$ 到线段 AB 上一点的距离最小值为 $P_3A=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}>\sqrt{13}$，

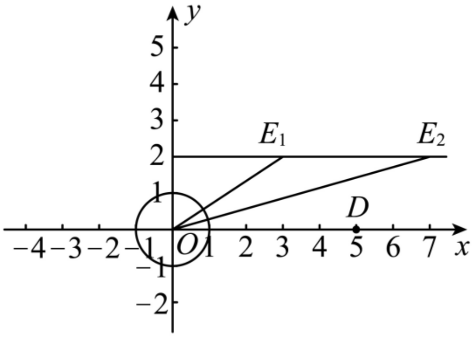
∴在线段 AB 上不存在点 M，N（M，N 可以重合）使得 $P_3M=ON$，

∴点 $P_3(-3,0)$ 与点 O 不是线段 AB 的“一对平衡点”；

故答案为：$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$；

【小问 3 详解】

如图，由题意得，点 D 到 $\odot O$ 的最近距离是 4，最远距离是 6，



∵点 D 与点 E 是 $\odot O$ 的一对平衡点，

∴需要满足 E_1 到 $\odot O$ 的最大距离是 4，即 $OE_1=3$，

∴此时 $x=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

同理，需要满足 E_2 到 $\odot O$ 的最小距离是 6，即 $OE_2=7$，

∴此时 $x=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

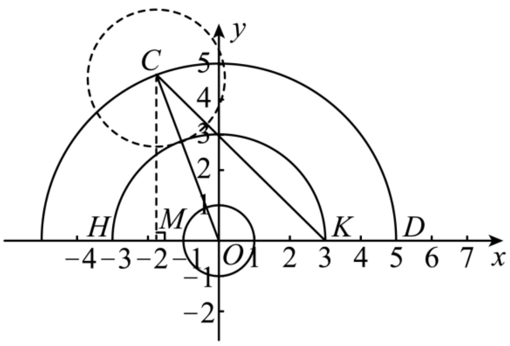
综上所述，满足条件的 x 的取值范围为：$\sqrt{5}\le x\le 3\sqrt{5}$；

【小问 4 详解】

∵点 C 在以 O 为圆心，5 为半径的圆上运动，

∴以 C 为圆心、2 为半径的圆刚好与 HK 相切，此时要想 HK 上任意的两点都是 $\odot C$ 的平衡点，需要满足 $CK\le 6$，$CH\le 6$，

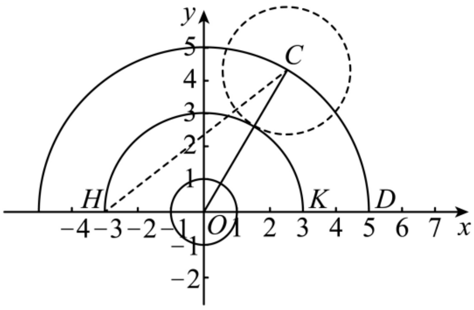
如下图，当 $CK=6$ 时，作 $CM\perp HK$ 于点 M，



根据题意有：$\begin{cases} a^2+b^2=5^2 \\ (3-a)^2+b^2=6^2 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{4\sqrt{14}}{3} \end{cases}$，（$b$ 为负值的已舍去），

当 $CH=6$ 时，如下图，同理可得 $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{4\sqrt{14}}{3} \end{cases}$，



在 $CK=6$ 和 $CH=6$ 中间时，$a=0$，$b=5$，b 取最大值，

∴满足条件的 b 的取值范围为：$\dfrac{4\sqrt{14}}{3} \le b \le 5$.

【点睛】本题属于圆的综合题，考查了新定义，两点间距离公式，点和圆的位置关系，圆与圆的位置关系，坐标与图形性质等知识，解题的关键是理解题意，学会取特殊位置解决问题，属于压轴题.