



2023 北京石景山高 一（上） 期末

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ ，则 $\neg p$ 为（ ）

- A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ C. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

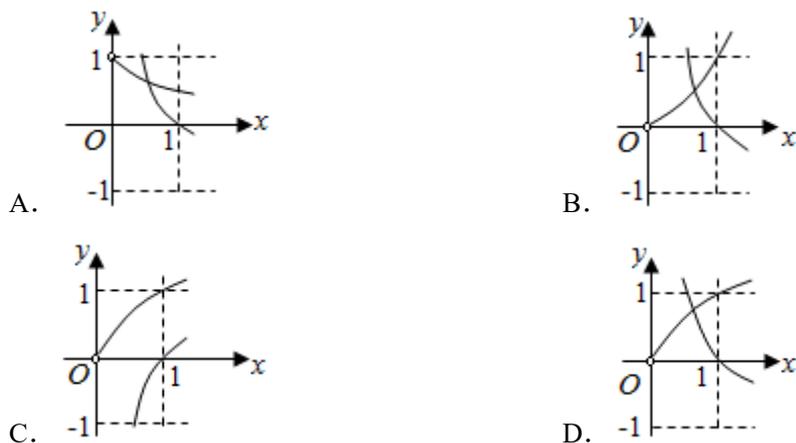
2. 不等式 $\frac{2}{x-1} \geq 1$ 的解集为（ ）

- A. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[1, 3]$
C. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ D. $(1, 3]$

3. 掷两颗均匀的骰子，则点数之和为 5 的概率等于（ ）

- A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

4. 在同一直角坐标系中，函数 $f(x) = x^a (x > 0)$ ， $g(x) = \log_a x$ 的图象可能是（ ）



5. 已知 a, b, c 都是实数，则 “ $a < b$ ” 是 “ $ac^2 < bc^2$ ” 的（ ）

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

6. 若 $a > b > 0, 0 < c < 1$ ，则（ ）

- A. $\log_a c < \log_b c$ B. $\log_c a < \log_c b$
C. $a^c < b^c$ D. $c^a > c^b$

7. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ ，则 $f(x)$ 的零点个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 甲、乙两人进行飞镖游戏，甲的 10 次成绩分别为 8, 6, 7, 7, 8, 10, 10, 9, 7, 8，乙的 10 次成绩的平均数为 8，方差为 0.4，则下列说法不正确的是（ ）

- A. 甲的 10 次成绩的极差为 4
B. 甲的 10 次成绩的 75% 分位数为 8
C. 甲和乙的 20 次成绩的平均数为 8



D. 乙比甲的成绩更稳定

9. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 若存在两个不等实数 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称函数 $f(x)$ 具有性质 P , 那么下列函数:

① $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$; ② $f(x) = x^3$; ③ $f(x) = |x^2 - 1|$; ④ $f(x) = x^2$. 不具有性质 P 的函数为 ()

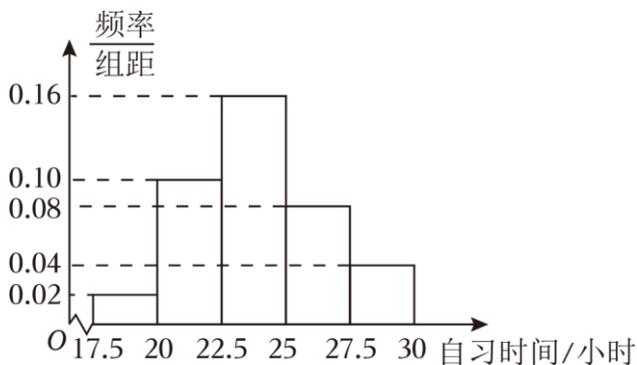
- A. ① B. ② C. ③ D. ④

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的人数为_____.

12. 函数 $y = \frac{1}{x^2 + \log_2(1-x)}$ 的定义域为_____.

13. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 并制成了频率分布直方图, 如图所示, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据频率分布直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数为_____.



14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq a \\ 2^x, & x > a \end{cases}$, 若 $f(1) = 2f(0)$, 则实数 a 可以为_____. (只需写出满足题意的一个数值即可)

15. 设 P 为非空实数集且满足: 对任意给定的 $x, y \in P$ (x, y 可以相同), 都有 $x+y \in P$, $x-y \in P$, $xy \in P$, 则称 P 为幸运集. 有以下结论:

- ① 集合 $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 为幸运集;
- ② 集合 $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$ 为幸运集;
- ③ 若集合 P_1, P_2 为幸运集, 则 $P_1 \cup P_2$ 为幸运集;



④若集合 P 为幸运集, 则一定有 $0 \in P$.

其中正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 5 小题, 共 35 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (6 分) 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 若集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x - m \leq 0\}$.

- (1) 若 $m = 3$, 求 $C_u B$, $A \cup B$;
- (2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

17. (6 分) 下列是一道利用基本不等式求最值的习题:

已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 求 $y = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

小明和小华两位同学都巧妙地用了“ $a + b = 1$ ”, 但结果并不相同.

小明的解法: 由于 $a + b = 1$, 所以 $y = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + 1 - 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + a + b - 1 = a + \frac{1}{a} + b + \frac{2}{b} - 1$, 而 $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$, $b + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{2}{b}} = 2\sqrt{2}$. 那么 $y \geq 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$. 则最小值为 $1 + 2\sqrt{2}$.

小华的解法: 由于 $a + b = 1$, 所以 $y = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b})(a + b) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b}$, 而 $3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 3 + 2\sqrt{2}$. 则最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$.

- (I) 你认为哪位同学的解法正确, 哪位同学的解法有错误?
- (II) 请说明你判断的理由.

18. (8 分) 某质检机构检测某产品的质量是否合格, 在甲、乙两厂匀速运行的自动包装传送带上每隔 10 分钟抽一包产品, 称其质量 (单位: 克), 分别记录抽查数据, 获得质量数据茎叶图 (如图).

- (1) 根据样本数据, 求甲、乙两厂产品质量的平均数和中位数;
- (2) 若从甲厂 6 件样品中随机抽取两件, 列举出所有可能的抽取结果; 记它们的质量分别是 a 克, b 克, 求 $|a - b| < 4$ 的概率.

甲					乙			
			8	10	8	9		
6	4	2	1	11	2	4	5	
			3	12			6	

19. (8 分) 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1+ax}{x-1}$ (a 为常数) 是奇函数.

- (I) 求 a 的值与函数 $f(x)$ 的定义域;
- (II) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_2(x - 1) > m$ 恒成立. 求实数 m 的取值范围.

20. (7 分) 甲、乙两人进行羽毛球比赛, 采取“三局两胜”制, 即两人比赛过程中, 谁先胜两局即结束比赛, 先胜两局的是胜方, 另一方是败方. 根据以往的数据分析, 每局比赛甲胜乙的概率均为 $\frac{3}{5}$, 甲、乙比赛没有平局, 且每局比赛是相互独立的.



- (1) 求比赛恰进行两局就结束的概率;
- (2) 求这场比赛甲获胜的概率.



参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】根据特称命题的否定是全称命题即可得到结论.

【解答】解：命题的否定是： $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$,

故选：C.

【点评】本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础.

2. 【分析】先将不等式进行化简变形，然后等价转化，求解即可.

【解答】解：因为不等式 $\frac{2}{x-1} \geq 1$ 可变形为 $\frac{x-3}{x-1} \leq 0$,

即 $\begin{cases} (x-3)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $1 < x \leq 3$,

所以不等式 $\frac{2}{x-1} \geq 1$ 的解集为 $(1, 3]$.

故选：D.

【点评】本题考查了不等式的求解，主要考查了分式不等式的解法，属于基础题，

3. 【分析】本题是一个求概率的问题，考查事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”这是一个古典概率模型，求出所有的基本事件数 N 与事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”包含的基本事件数 n ，再由公式 $\frac{n}{N}$ 求出概率得到答案

【解答】解：抛掷两颗骰子所出现的不同结果数是 $6 \times 6 = 36$

事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”所包含的基本事件有 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 共四种

故事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”的概率是 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$,

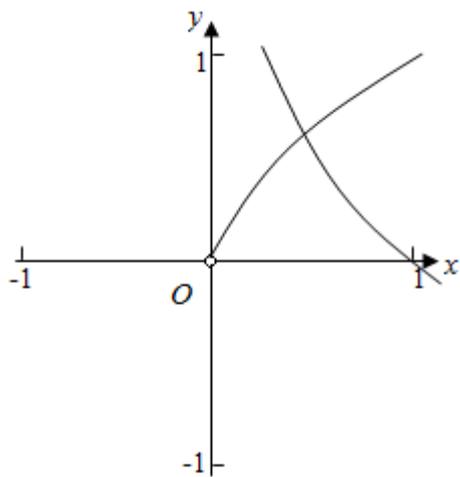
故选：B.

【点评】本题是一个古典概率模型问题，解题的关键是理解事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”，由列举法计算出事件所包含的基本事件数，判断出概率模型，理解求解公式 $\frac{n}{N}$ 是本题的重点，

正确求出事件“抛掷两颗骰子，所得两颗骰子的点数之和为 5”所包含的基本事件数是本题的难点.

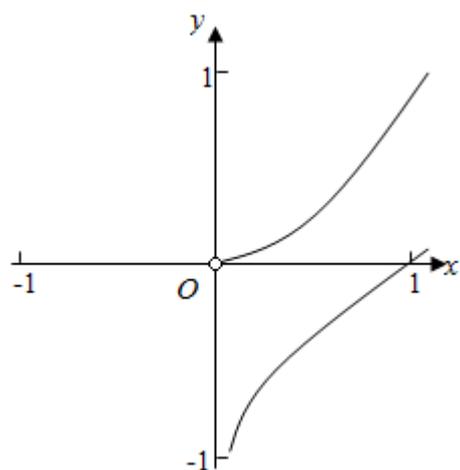
4. 【分析】结合对数函数和幂函数的图象和性质，分当 $0 < a < 1$ 时和当 $a > 1$ 时两种情况，讨论函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$, $g(x) = \log_a x$ 的图象，比照后可得答案.

【解答】解：当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$, $g(x) = \log_a x$ 的图象为：



此时答案 D 满足要求,

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$, $g(x) = \log_a x$ 的图象为:



无满足要求的答案,

故选: D .

【点评】本题考查的知识点是函数的图象, 熟练掌握对数函数和幂函数的图象和性质, 是解答的关键.

5. 【分析】取 $c^2 = 0$ 判定不充分, 再由不等式的性质判断必要性.

【解答】解: 由 $a < b$, 不一定有 $ac^2 < bc^2$, 若 $c^2 = 0$;

反之, 由 $ac^2 < bc^2$, 一定有 $c^2 > 0$, 可得 $a < b$.

\therefore “ $a < b$ ” 是 “ $ac^2 < bc^2$ ” 的必要非充分条件.

故选: B .

【点评】本题考查充分必要条件的判定及应用, 考查分析问题与解决问题的能力, 是基础题.

6. 【分析】根据指数函数, 对数函数, 幂函数的单调性结合换底公式, 逐一分析四个结论的真假, 可得答案.

【解答】解: $\because a > b > 0, 0 < c < 1$,

$\therefore \log_c a < \log_c b$, 故 B 正确;

\therefore 当 $a > b > 1$ 时,

$0 > \log_a c > \log_b c$, 故 A 错误;



$a^c > b^c$, 故 C 错误;

$c^a < c^b$, 故 D 错误;

故选: B .

【点评】本题考查的知识点是指数函数, 对数函数, 幂函数的单调性, 难度中档.

7. 【分析】函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ 的零点为方程 $2^x = x + 1$ 的根, 作出函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = x + 1$ 的图象, 即可得出答案.

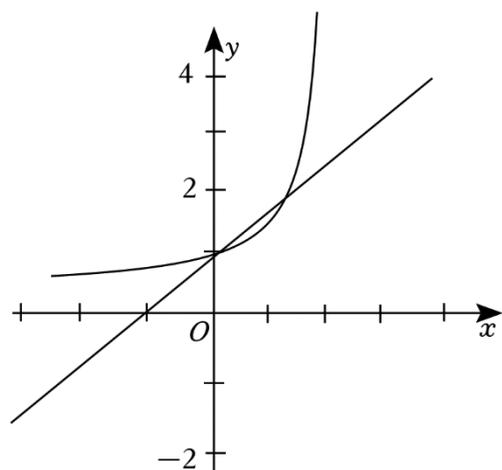
【解答】解: 函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ 的零点为方程 $2^x = x + 1$ 的根, 函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = x + 1$ 的图象如下:

所以函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = x + 1$ 有两个交点,

所以方程 $2^x = x + 1$ 有两个实数根,

所以函数 $f(x)$ 有两个零点,

故选: C .



【点评】本题考查函数与方程的关系, 解题中注意转化思想的应用, 属于中档题.

8. 【分析】根据平均数、方差、百分位数的计算方法, 即可得解.

【解答】解: 甲的 10 次成绩的极差为 $10 - 6 = 4$, 即 A 正确;

甲的 10 次成绩按从小到大顺序排列为 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10,

由 $10 \times 75\% = 7.5$ 知, 75% 分位数为 9, 即 B 错误;

甲的 10 次成绩的平均数为 $\frac{1}{10} \times (8 + 6 + 7 + 7 + 8 + 10 + 10 + 9 + 7 + 8) = 8$,

方差为 $\frac{1}{10} \times [(8 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (8 - 8)^2] = 1.6$,

所以甲、乙两人成绩的平均数相等, 甲的方差比乙的方差大,

所以甲和乙的 20 次成绩的平均数为 8, 乙比甲的成绩更稳定, 即 C, D 均正确.

故选: B .

【点评】本题考查用样本估计总体, 熟练掌握平均数、方差、百分位数的计算方法是解题的关键, 考查



逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

9. 【分析】把已知数据代入 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ，化简后利用对数的运算性质求解.

【解答】解：设太阳的星等是 $m_1 = -26.7$ ，天狼星的星等是 $m_2 = -1.45$ ，

由题意可得： $-1.45 - (-26.7) = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ，

$\therefore \lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{50.5}{5} = 10.1$ ，则 $\frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}$.

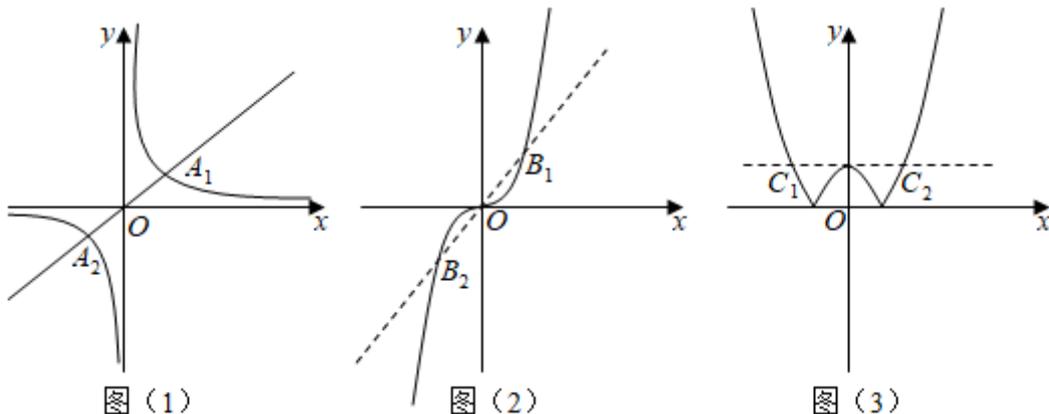
故选：A.

【点评】本题考查对数的运算性质，是基础的计算题.

10. 【分析】根据条件分别进行判断即可.

【解答】解：①选择的两点关于原点对称即可，如图：(1) 中的 A, B ，

②同①，选择的两点关于原点对称即可，如图(2)



③如图， $y=1$ 与 $f(x)$ 的交点，满足题意，

④没有满足的点，假设存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，使得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，

即 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$ 得， $x_1=x_2$ 与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾，故④不存在，

故选：D.

【点评】本题主要考查函数与方程的应用，结合条件，利用数形结合分别进行判断是解决本题的关键，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 【分析】根据田径队的男女运动员数目和用分层抽样要抽取的数目，得到每个个体被抽到的概率，利用每个个体被抽到的概率乘以男运动员的数目，得到结果.

【解答】解： \because 田径队有男运动员 48 人，女运动员 36 人，

\therefore 这支田径队共有 $48+36=84$ 人，

用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本，



∴每个个体被抽到的概率是 $\frac{21}{84} = \frac{1}{4}$,

∴田径队有男运动员 48 人,

∴男运动员要抽取 $48 \times \frac{1}{4} = 12$ 人,

故答案为: 12.

【点评】本题考查分层抽样, 在抽样过程中每个个体被抽到的概率相等, 这是解决这种问题的依据, 本题是一个基础题.

12. 【分析】根据函数的解析式, 列出使函数解析式有意义的不等式组, 求出解集即可.

【解答】解: ∵ $y = x^{\frac{1}{2}} + \log_2(1-x)$,

$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}, \therefore 0 \leq x < 1,$$

∴定义域为 $[0, 1)$,

故答案为: $[0, 1)$.

【点评】本题考查了函数定义域的求法, 解题的关键是列出使函数解析式有意义的不等式组, 是基础题.

13. 【分析】结合频率分布直方图, 利用样本估计总体即可.

【解答】解: 由题意得,

这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数为

$$200 \times (0.16 + 0.08 + 0.04) \times 2.5 = 140 \text{ 人};$$

故答案为: 140.

【点评】本题考查了样本估计总体的应用, 属于基础题.

14. 【分析】根据题意, 由函数的解析式分析可得: 当 $a < 0$ 时, 满足 $f(1) = 2f(0)$, 故区间 $(-\infty, 0)$ 上的实数都符合题意, 由此可得答案.

【解答】解: 根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq a \\ 2^x, & x > a \end{cases}$,

当 $a < 0$ 时, $f(x) = 2^x, (x > a)$

有 $f(1) = 2^1 = 2, f(0) = 2^0 = 1$, 满足 $f(1) = 2f(0)$,

故区间 $(-\infty, 0)$ 上的实数都符合题意,

则实数 a 可以为 -1,

故答案为: -1 (答案不唯一).

【点评】本题考查分段函数的性质, 涉及函数值的计算, 属于基础题.

15. 【分析】直接利用幸运集的定义和赋值法判定①②③④四个结论.

【解答】解: P 为非空实数集满足: 对任意给定的 $x, y \in P$ (x, y 可以相同), 都有 $x+y \in P, x-y \in P, xy \in P$, 则称 P 为幸运集.

对于①, 由于 $-2 - 2 = -4 \notin A$, 故集合 $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 不为幸运集, 故①错误;



对于②, 设 $x, y \in A$, 则 $x=2k_1, y=2k_2$, 且 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 故 $x+y=2(k_1+k_2) \in A, x-y=2(k_1-k_2) \in A, xy=4k_1k_2 \in A$,

故集合 $p = \{x|x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$ 为幸运集, 故②正确;

对于③, 若集合 P_1, P_2 为幸运集, 设 $P_1 = \{x|x=\frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\}, P_2 = \{x|x=\frac{k}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ 为幸运集, 但是 $P_1 \cup P_2$

不为幸运集, 故③错误;

对于④, 若集合 P 为幸运集, 取 $x=y, x-y=0 \in P$, 则一定有 $0 \in P$, 故④正确.

故答案为: ②④.

【点评】本题考查集合的新定义, 注意运用赋值法, 考查运算能力和推理能力, 属于中档题.

三、解答题共 5 小题, 共 35 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【分析】(1) $m=3$, 求出集合 B , 由此能求出 $C_U B, A \cup B$.

(2) 由 $A \cap B = A$, 得 $A \subseteq B$, 由此能求出实数 m 的取值范围.

【解答】解: (1) $\because m=3, \therefore B = \{x|x \leq 3\}$,

$\because U = \mathbf{R}, \therefore C_U B = \{x|x > 3\}$,

$\because A = \{x|-2 \leq x \leq 4\}, \therefore A \cup B = \{x|x \leq 4\}$.

(2) $\because A \cap B = A, \therefore A \subseteq B$,

$\because A = \{x|-2 \leq x \leq 4\}, B = \{x|x \leq m\}$,

$\therefore m \geq 4$,

\therefore 实数 m 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

【点评】本题考查集合的运算, 考查交集、并集、补集的定义、不等式的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

17. 【分析】(I) 根据基本不等式的应用条件, “一正, 二定, 三相等” 三个条件缺一不可, 可判断小华的解法正确, 小明的解法错误.

(II) 小明的解法中, 两次应用基本不等式, 等号成立条件不满足题意, 故小明的解法错误; 小华的解法符号基本不等式的应用条件, 是正确的.

【解答】解: (I) 小华的解法正确, 小明的解法错误.

(II) 小明的解法中, $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$, 等号成立时 $a=1$; $b + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{2}{b}} = 2\sqrt{2}$, 等号成立时 $b = \sqrt{2}$,

那么取得最小值 $1+2\sqrt{2}$ 时, $a+b=1+\sqrt{2}$, 这与条件 $a+b=1$ 是相矛盾的,

所以小明的解法错误;

小华的解法中, $\frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{2}$, 等号成立的条件为 $b^2=2a^2$, 即 $b=\sqrt{2}a$, 再由已知条件 $a+b=1$, 即可解得满足条件的 a, b 的值,

所以小华的解法正确.

【点评】本题主要考查了基本不等式的应用, 使用时要注意 “一正, 二定, 三相等” 三个条件缺一不可,



属于基础题.

18. 【分析】(1) 把甲、乙两组数据分别从小到大排序, 即可计算得甲、乙两厂产品质量的平均数和中位数;

(2) 列举出甲厂 6 件样品中随机抽取两件的所有可能的抽取结果, 然后结合题意分析计算即可.

【解答】解: (1) 甲厂质量的平均数 $\frac{108+111+112+114+116+123}{6}=114$,

甲的中位数是 $\frac{112+114}{2}=113$,

乙厂产品质量的平均数是 $\frac{108+109+112+114+115+126}{6}=114$,

乙的中位数是 $\frac{112+114}{2}=113$.

(2) 从甲厂 6 件样品中随机抽两件, 结果共有 $n=15$ 个, 分别为: $\{108, 111\}$, $\{108, 112\}$, $\{108, 114\}$, $\{108, 116\}$, $\{108, 123\}$, $\{111, 112\}$, $\{111, 114\}$, $\{111, 116\}$, $\{111, 123\}$, $\{112, 114\}$, $\{112, 116\}$, $\{112, 123\}$, $\{114, 116\}$, $\{114, 123\}$, $\{116, 123\}$,

设 “ $|a-b|<4$ ” 为事件为 A , 由事件 A 共有 5 个结果: $\{108, 111\}$, $\{111, 112\}$, $\{111, 114\}$, $\{112, 114\}$, $\{114, 116\}$,

$\therefore |a-b|<4$ 的概率 $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

【点评】本题考查平均数和中位数的求法以及古典概型的概率计算, 考查运算求解能力, 属于基础题.

19. 【分析】(I) 直接由奇函数的定义列式求解 a 的值, 然后由对数式的真数大于 0 求解 x 的取值集合得答案;

(II) 化简 $f(x) + \log_2(x-1)$ 为 $\log_2(1+x)$, 由 x 的范围求其值域得答案.

【解答】解: (I) \because 知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1+ax}{x-1}$ 是奇函数,

$\therefore f(-x) = -f(x)$,

$\therefore \log_2 \frac{1-ax}{-x-1} = -\log_2 \frac{1+ax}{x-1}$,

即 $\log_2 \frac{ax-1}{x+1} = \log_2 \frac{x-1}{1+ax}$,

$\therefore a=1$.

令 $\frac{1+x}{x-1} > 0$, 解得: $x < -1$ 或 $x > 1$.

\therefore 函数的定义域为: $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$;

(II) $f(x) + \log_2(x-1) = \log_2(1+x)$,

当 $x > 1$ 时, $x+1 > 2$,

$\therefore \log_2(1+x) > \log_2 2 = 1$,

$\therefore x \in (1, +\infty)$, $f(x) + \log_2(x-1) > m$ 恒成立,



$\therefore m \leq 1$,

m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

【点评】 本题考查了函数奇偶性的性质，考查了利用函数的单调性求解不等式，体现了数学转化思想方法，是中档题.

20. 【分析】 (1) 比赛两局就结束即甲连胜两局或乙连胜两局，分别求概率即可；(2) 分别比赛两局结束和比赛三局结束，分别求概率即可.

【解答】 解：(1) 比赛恰进行两局就结束对应的事件 A 有两种可能，事件 A_1 ：甲胜乙，事件 A_2 ：乙胜甲.

$$P(A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}, \quad P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \quad P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{13}{25}.$$

(2) 这场比赛甲获胜对应的事件 B 有两种可能，事件 B_1 ：比赛两局结束且甲获胜；事件 B_2 ：比赛三局结束且甲获胜.

$$P(B_1) = \frac{9}{25}, \quad P(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}, \quad \therefore$$

$$P(B) = P(B_1 + B_2) = \frac{9}{25} + \frac{36}{125} = \frac{81}{125}.$$

【点评】 本题考查概率的求法，是基础题，解题时要认真审题.