

北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期期中阶段练习

高一数学

2023.11

班级_____ 姓名_____ 学号_____

本试卷共 2 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

A 卷 本卷满分：100 分

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 集合 $\{x \in \mathbb{Z} \mid (3x-1)(x+3) = 0\}$ 可化简为

- A. $\left\{\frac{1}{3}, -3\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$ C. $\{-3\}$ D. $\{3\}$

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ，则

- A. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ，且 $\neg p$ 是真命题 B. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ，且 $\neg p$ 是真命题
C. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ，且 $\neg p$ 是假命题 D. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ，且 $\neg p$ 是假命题

3. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a > b$ ，则

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a - c > b - c$ D. $ac > bc$

4. 已知集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $N = \{1, 3, 5\}$ ， $P = M \cap N$ ，则 P 的子集共有

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 设正数 a, b 满足 $a + b = 1$ ，则 \sqrt{ab}

- A. 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 有最小值 $\frac{1}{2}$ C. 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 有最大值 $\frac{1}{2}$

6. 下列函数中，在函数定义域内，既是增函数又是奇函数的是

- A. $f(x) = 3x + 1$ B. $f(x) = x^3$
C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

7. 函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 的零点个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知 $a, b \in (0, 1)$, 记 $M = ab, N = a + b - 1$, 则 M 与 N 的大小关系是

- A. $M > N$ B. $M = N$ C. $M \neq N$ D. 不确定

9. 荀子曰：“故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”这句来自先秦时期的名言阐述了做事情不一点一点积累，就永远无法达成目标的哲理.由此可得，“积跬步”是“至千里”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1, \\ -x^2 + a, & x < 1, \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$

二、填空题：本大题共 6 道小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

11. 方程组 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x \end{cases}$ 的解集为_____.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ 的最大值为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x-1), & x \geq 0, \\ 2x-3, & x < 0, \end{cases}$, 则 $f(2) =$ _____.

14. 关于 x 的方程 $x^2 - ax + 2a - 1 = 0$ 的两个实数根的平方和为 7, 则 $a =$ _____.

15. 某班共 42 人, 其中 20 人喜爱篮球运动, 25 人喜爱乒乓球运动, 12 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为_____.

16. 若关于 x 的不等式 $|x-1| + |x+1| > a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共3小题，共36分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12分) 设全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-2} < 0 \right\}$ ， $B = \{ x \mid ax - 1 > 0, (a > 0) \}$ ，若 $B \subsetneq C_U A$ ，求实数 a 的取值范围.

18. (12分) 欲修建一个容积为8立方米，深为2米的长方体无盖水池，如果池底造价是120元/平方米，池壁的造价是80元/平方米.

(I) 求水池的总造价 y 元与池底宽 x 米之间的函数关系式；

(II) 该水池池底宽多少米时，可使水池的总造价最低？最低造价是多少？

19. (12分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

(I) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

(II) 用单调性的定义证明：函数 $f(x)$ 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增.

B 卷 本卷满分：50分

四、填空题：本大题共5小题，每小题4分，共20分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

20. 不等式 $\frac{a}{x-1} < 1$ 的解集为 A ，若 $2 \notin A$ ，则实数 a 的取值范围是_____.

21. 函数 $f(x) = \sqrt{2x+1} + x$ 的值域为_____.

22. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的函数， $f(2) = 2$ ，且 $g(x) = f(2x) + x^2$ 为奇函数.

则 $f(-2) =$ _____.

23. 写出一个同时满足下列条件①②③的函数 $f(x) =$ _____.

① $f(x)$ 为偶函数；

② $f(x)$ 的最大值为2；

③ $f(x)$ 不是二次函数.

24. 函数 $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$)，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 的值域是 $(-1, 1)$ ；

② 任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ；

③ 任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ；

④ 规定 $f_1(x) = f(x)$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ ，则 $f_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$ 。

其中，所有正确结论的序号是_____。

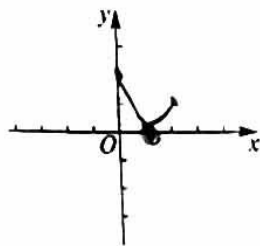
五、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

25. (10 分) 若二次函数 $f(x)$ 对任意实数 x 都满足 $f(1+x) = f(1-x)$ ， $f(x)$ 最小值为 -1 ，且 $f(0) = 0$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的解析式；

(II) 若在区间 $[0, 1]$ 上， $f(x)$ 的图象恒在 $y = 2x + 1 + m$ 的上方，求实数 m 的取值范围。

26. (12 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



(I) $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ 的值；

(II) 记 $F(x) = |f(x) - 1|$ ，画出函数 $F(x)$ 的图象，写出其单调递减区间（无需证明）；

(III) 若实数 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶不动点，求 $f(x)$ 的二阶不动点的个数。

27. (8 分) 已知集合 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 4$)，对于集合 S_n 的非空子集 A ，若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a, b, c ，使得 $a+b, b+c, c+a$ 均属于 A ，则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”。

(I) 试判断集合 $A_1 = \{3, 4, 5\}$ ， $A_2 = \{3, 5, 7\}$ 是否为集合 S_4 的“期待子集”；（直接写出答案，不必说明理由）

(II) 如果一个集合中含有三个元素 x, y, z ，同时满足① $x < y < z$ ，② $x + y > z$ ，③ $x + y + z$ 为偶数。那么称该集合具有性质 P 。对于集合 S_n 的非空子集 A ，证明：集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 A 具有性质 P 。