北京市朝阳区 2023~2024 学年度第一学期期末质量检测

高一数学

2024.1

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 已知集合 $A=\{-2,1,2,3\}$，$B=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{-2,1\}$　　(B) $\{-2,2\}$

(C) $\{1,2\}$　　(D) $\{2,3\}$

(2) 命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|x|+x\geqslant 0$"的否定为

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $|x|+x<0$　　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $|x|+x\geqslant 0$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|x|+x\leqslant 0$　　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|x|+x<0$

(3) 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是

(A) $a^2>b^2$　　(B) $ac>bc$

(C) $2^a>2^b$　　(D) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

(4) 已知 $x\in\mathbf{R}$，则"$x>1$"是"$x^2>1$"的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知 x_0 是函数 $f(x)=e^x+x^3$ 的一个零点，且 $a\in(-\infty,x_0)$，$b\in(x_0,0)$，则

(A) $f(a)<0,\ f(b)<0$　　(B) $f(a)>0,\ f(b)>0$

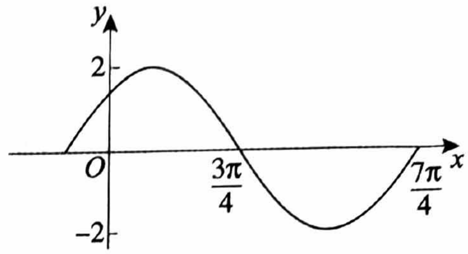
(C) $f(a)>0,\ f(b)<0$　　(D) $f(a)<0,\ f(b)>0$

(6) 已知 $a=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{2}$，则

(A) $a<b<c$　　(B) $c<a<b$

(C) $b<a<c$　　(D) $c<b<a$

(7) 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则



(A) $\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{4}$

(B) $\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{4}$

(C) $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{4}$

(D) $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{4}$

(8) 函数 $f(x)=|\sin x|+\cos x$ 是

(A) 奇函数，且最小值为 $-\sqrt{2}$　　(B) 奇函数，且最大值为 $\sqrt{2}$

(C) 偶函数，且最小值为 $-\sqrt{2}$　　(D) 偶函数，且最大值为 $\sqrt{2}$

(9) 已知函数 $f(x)$ 的图象是在 $\mathbf{R}$ 上连续不断的曲线，$f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且满足 $f(2-x)+f(x)=0$，$f(2)=3$，则不等式 $-3<f(x+1)<3$ 的解集为

(A) $(-2,2)$　　(B) $(-1,1)$　　(C) $(0,2)$　　(D) $(1,3)$

(10) 在一定通风条件下，某会议室内的二氧化碳浓度 c 随时间 t(单位:min) 的变化规律可以用函数模型 $c=c_0+\lambda e^{-\frac{t}{5}}$ 近似表达. 在该通风条件下测得当 $t=0,t=5,t=10$ 时此会议室内的二氧化碳浓度，如下表所示，用该模型推算当 $t=15$ 时 c 的值约为

t	0	5	10
c	0.15%	0.09%	0.07%

(A) 0.04%　　(B) 0.05%　　(C) 0.06%　　(D) 0.07%

第二部分(非选择题　共 100 分)

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

(11) 函数 $f(x)=\lg(x+1)$ 的定义域是________.

(12) 已知 $x>1$，则 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值是________.

(13) 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，若角 α 的终边经过点 $P(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$，角 β 的终边与角 α 的终边关于原点对称，则 $\sin\alpha=$________，$\cos\beta=$________.

(14) 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x-1$ 的图象过原点，则 $a=$________；若对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>m$，则 m 的最大值为________.

(15) 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象.若函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 φ 的一个取值为________.

(16) 已知函数 $f(x)=2x+b$，$g(x)$ 为偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-4x$. 记函数 $T(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ g(x), & f(x)<g(x),\end{cases}$ 给出下列四个结论：

① 当 $b=0$ 时，$T(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上单调递增；

② 当 $b=-8$ 时，$T(x)$ 是偶函数；

③ 当 $b<0$ 时，$T(x)$ 有 3 个零点；

④ 当 $b\geqslant 8$ 时，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $T(x)>0$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

(17)（本小题 13 分）

已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x-a>0\}$.

（Ⅰ）当 $a=4$ 时，求 $A\cup B$；

（Ⅱ）若 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(18)（本小题 13 分）

已知 α,β 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的值；

（Ⅱ）求 $\alpha+2\beta$ 的值.

(19)(本小题 15 分)

设函数 $f(x)=\log_2(4^x+m)(m>-1)$.

(Ⅰ)当 $m=0$ 时,求 $f(1)$ 的值;

(Ⅱ)判断 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调性,并用函数单调性的定义证明你的结论;

(Ⅲ)当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$f(x)$ 的最小值为 3,求 m 的值.

(20)(本小题 14 分)

设函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0)$,且 $f(0)=1$.

(Ⅰ)求 m 的值;

(Ⅱ)再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知,使函数 $f(x)$ 存在,求 ω 的值及 $f(x)$ 的零点.

条件 ①:$f(x)$ 是奇函数;

条件 ②:$f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是 π;

条件 ③:$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增,在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

注:如果选择的条件不符合要求,第(Ⅱ)问得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(21)(本小题 15 分)

已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 4$,$a_i\in\mathbf{N}^*(i=1,2,\cdots,n)$,非空集合 $B\subseteq A$,记 $T(B)$ 为集合 B 中所有元素之和,并规定当 B 中只有一个元素 b 时,$T(B)=b$.

(Ⅰ)若 $A=\{1,2,5,6,7,8\}$,$T(B)=8$,写出所有可能的集合 B;

(Ⅱ)若 $A=\{3,4,5,9,10,11\}$,$B=\{b_1,b_2,b_3\}$,且 $T(B)$ 是 12 的倍数,求集合 B 的个数;

(Ⅲ)若 $a_i\in\{1,2,3,\cdots,2n-1\}(i=1,2,\cdots,n)$,证明:存在非空集合 $B\subseteq A$,使得 $T(B)$ 是 $2n$ 的倍数.

北京市朝阳区 2023~2024 学年度第一学期期末质量检测

高一数学参考答案

2024. 1

一、选择题(共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

(1)B　(2)A　(3)C　(4)A　(5) D

(6)C　(7)B　(8)D　(9)B　(10)C

二、填空题(共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

(11)$\{x|x>-1\}$　(12)3　(13)$\frac{3}{5}$　$\frac{4}{5}$

(14)1　-1　(15)$\frac{\pi}{4}$(答案不唯一)　(16)①③

三、解答题(共 5 小题,共 70 分)

(17)(共 13 分)

解:由 $x^2-3x-4\leqslant 0$,得 $-1\leqslant x\leqslant 4$.所以 $A=[-1,4]$.

(Ⅰ)因为当 $a=4$ 时,$B=(4,+\infty)$,

所以 $A\cup B=[-1,+\infty)$. ……………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $A=[-1,4]$,$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,a]$,

又因为 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$,

所以 $a<-1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$. ……………………………… 13 分

(18)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 α 为锐角,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$,

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{7}$.

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$,

所以 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$.

故 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$,$\tan\beta=\frac{1}{3}$. ……………………………… 7 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\tan\beta=\frac{1}{3}$,又因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$,

所以 $\tan(\alpha+2\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\beta]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$.

因为 α,β 为锐角，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，

所以 $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$.所以 $0<\alpha+2\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

故 $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………………………………………………… 13 分

(19)(共 15 分)

解：(Ⅰ)因为当 $m=0$ 时，$f(x)=\log_2 4^x$，

所以 $f(1)=\log_2 4=2$. ………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增.理由如下：

任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，那么

$f(x_1)-f(x_2)=\log_2(4^{x_1}+m)-\log_2(4^{x_2}+m)=\log_2\dfrac{4^{x_1}+m}{4^{x_2}+m}$.

因为 $0\leqslant x_1<x_2$，函数 $y=4^x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $1\leqslant 4^{x_1}<4^{x_2}$.

又因为 $m>-1$，所以 $0<4^{x_1}+m<4^{x_2}+m$.

所以 $0<\dfrac{4^{x_1}+m}{4^{x_2}+m}<1$.

因为函数 $y=\log_2 x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\log_2\dfrac{4^{x_1}+m}{4^{x_2}+m}<0$.

从而 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………… 10 分

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0)$.

又因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 3，

所以 $\log_2(1+m)=3$.故 $m=7$. …………………………………………………………… 15 分

(20)(共 14 分)

解：(Ⅰ)因为 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m$，

由 $f(0)=1$，得 $2+m=1$，

所以 $m=-1$. ……………………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)选择条件②：$f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是 π.

由(Ⅰ)可知，$f(x)=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-1$

$=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x$

$=2\times(\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x)$

$= 2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$. ………………………………………………… 6 分

因为 $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是 π,

所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=2\pi(\omega>0)$,故 $\omega=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

由 $2\sin(x+\frac{\pi}{6})=0$,得 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的零点为 $k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………… 14 分

选择条件③:$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增,在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

由(Ⅰ)可知,$f(x)=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-1$

$=\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x$

$=2\times(\frac{1}{2}\cos2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x)$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$. ………………………………………………… 6 分

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增,在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减,

所以当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,$2\omega x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=6k+1(k\in\mathbf{Z})$.

又由周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}$,$\omega>0$,得 $0<\omega\leqslant3$,故 $\omega=1$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

由 $2\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$,得 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的零点为 $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………… 14 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)所有可能的集合 B 为:$\{8\}$,$\{1,7\}$,$\{2,6\}$,$\{1,2,5\}$. ………………………… 4 分

(Ⅱ)设 $b_1<b_2<b_3$，由于 $3\leqslant b_1<b_2<b_3\leqslant 11$，且 $b_1,b_2,b_3\in A$，

所以 $3+4+5=12\leqslant T(B)=b_1+b_2+b_3\leqslant 30=9+10+11$.

由题意，$T(B)$ 是 12 的倍数时，$T(B)=12$ 或 24.

当 $T(B)=12$ 时，因为 $b_1+b_2+b_3\geqslant 3+4+5=12$，

所以当且仅当 $B=\{3,4,5\}$ 时，$T(B)=12$ 成立.故 $B=\{3,4,5\}$ 符合题意.

当 $T(B)=24$ 时，

若 $b_3=11$，则 $b_1+b_2=13$，故 $B=\{3,10,11\}$，$B=\{4,9,11\}$ 符合题意；

若 $b_3=10$，则 $b_1+b_2=14$，故 $B=\{5,9,10\}$ 符合题意；

若 $b_3\leqslant 9$，则 $b_1+b_2+b_3\leqslant 4+5+9=18$，不合题意.

综上，所有可能的集合 B 为 $\{3,4,5\}$，$\{3,10,11\}$，$\{4,9,11\}$，$\{5,9,10\}$，

故满足条件的集合 B 的个数是 4. …………………………………………………… 9 分

(Ⅲ)(1)当 $n\notin A$ 时，设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，

则 $a_1,a_2,\cdots,a_n,2n-a_1,2n-a_2,\cdots,2n-a_n\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n+1,\cdots,2n-1\}$，

这 $2n$ 个数取 $2n-2$ 个值，故其中必有两个数相等.

又因为 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，于是 $2n-a_1>2n-a_2>\cdots>2n-a_n$，

从而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，$2n-a_1,2n-a_2,\cdots,2n-a_n$ 互不相等，

所以存在 $u,v\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_u=2n-a_v$.又因 $a_u\neq n,a_v\neq n$，故 $u\neq v$.

取 $B=\{a_u,a_v\}$，则 $T(B)=a_u+a_v=2n$，结论成立.

(2)当 $n\in A$ 时，不妨设 $a_n=n$，

则 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}(n\geqslant 4)$ 在这 $n-1$ 个数中任取 3 个数 $a_i<a_j<a_k$.

若 a_j-a_i 与 a_k-a_j 都是 n 的倍数，$a_k-a_i=(a_k-a_j)+(a_j-a_i)\geqslant 2n$，

这与 $a_i,a_j,a_k\in(0,2n-1]$ 矛盾.

则 a_i,a_j,a_k 至少有 2 个数，它们之差不是 n 的倍数，

不妨设 $a_2-a_1(a_2>a_1)$ 不是 n 的倍数.

考虑这 n 个数：$a_1,a_2,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$.

①若这 n 个数除以 n 的余数两两不同，则其中必有一个是 n 的倍数，

又 $a_1,a_2<2n$ 且均不为 n，

故存在 $2\leqslant r\leqslant n-1$，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_r=pn(p\in\mathbf{N}^*)$.

若 p 为偶数，取 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$，则 $T(B)=pn$，结论成立；

若 p 为奇数，取 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_r,a_n\}$，则 $T(B)=pn+n=(p+1)n$，结论成立.

②若这 n 个数除以 n 的余数中有两个相同，则它们之差是 n 的倍数，

又 a_2-a_1,a_1 均不是 n 的倍数，

故存在 $2\leqslant s<t\leqslant n-1$，

使得 $(a_1+a_2+\cdots+a_t)-(a_1+a_2+\cdots+a_s)=a_{s+1}+\cdots+a_t=qn(q\in\mathbf{N}^*)$.

若 q 为偶数，取 $B=\{a_{s+1},\cdots,a_t\}$，则 $T(B)=qn$，结论成立；

若 q 为奇数，取 $B=\{a_{s+1},\cdots,a_t,a_n\}$，则 $T(B)=qn+n=(q+1)n$，结论成立.

综上，存在非空集合 $B\subseteq A$，使得 $T(B)$ 是 $2n$ 的倍数. ……………………………… 15 分