2023 北京丰台高三（上）期中

数　　学

2023.11

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $P=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$Q=\left\{x\in\mathbf{N}\,|\,\dfrac{x}{x-2}\leqslant 0\right\}$，则 $P\cap Q=$

（A）$\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$　　（B）$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 0\}$

（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{0,1\}$

2．下列函数中，既是奇函数又在定义域上单调递增的是

（A）$y=2^x$　　（B）$y=\ln|x|$

（C）$y=x^3$　　（D）$y=\tan x$

3．在复平面上，复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 所对应的点在第二象限，则实数 a 的值可以为

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）1

（C）2　　（D）3

4．已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

（A）12　　（B）4

（C）$2\sqrt{3}$　　（D）2

5．在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=c$，则 $A=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$

（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

6．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2023}=$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）3

（C）-2　　（D）$-\dfrac{1}{3}$

7．设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，则“函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增”是“$x\in(a,b)$ 时，导函数 $f'(x)>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

8．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $y=f(x)+g(x)$ 的最大值为 a，则 a 的值不可能为

（A）1　　（B）$\sqrt{2}-1$

（C）2　　（D）$\sqrt{2}+1$

9．分贝（dB）、奈培（Np）均可用来量化声音的响度，其定义式分别为 $1\text{dB}=10\lg\dfrac{A}{A_0}$，$1\text{Np}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{A}{A_0}$，其中 A 为待测值，A_0 为基准值．如果 $1\text{dB}=t\text{Np}(t\in\mathbf{R})$，那么 $t\approx$（参考数据：$\lg \text{e}\approx 0.4343$）

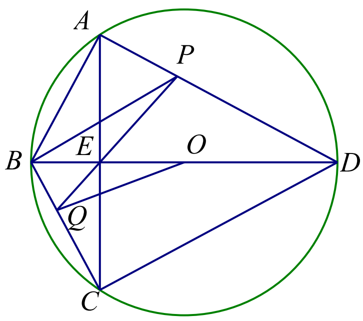
（A）8.686　　（B）4.343

（C）0.8686　　（D）0.115

10．如图，已知 BD 是圆 O 的直径，AC 是与 BD 垂直的弦，且 AC 与 BD 交于点 E，点 P 是线段 AD 上的动点，直线 PE 交 BC 于点 Q. 当 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值时，下列结论中一定成立的是

（A）$OQ\perp BC$　　（B）$OP\perp AD$

（C）$PQ\,/\!/\,AB$　　（D）$OP\,/\!/\,AC$



二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$ 的定义域为___.

12．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(2,-1)$，若 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，则 m 的值为___.

13．能说明命题“对于任意 $s,t\in\mathbf{R}$，$[\max\{s,t\}]^2=\max\{s^2,t^2\}$”为假命题的一组整数 s,t 的值依次为___.

（$\max\{a,b\}$ 表示实数 a,b 中的最大值）

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}, & x<a,\\ x^2-2x, & x\geqslant a,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为___；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的值域为 A，存在实数 $m\notin A$，则 a 的取值范围为___.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}a_n^2+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则

① 当 $a=-1$ 时，存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=2$；

② 当 $a=1$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_n<2$ 恒成立；

③ 存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $\{a_n\}$ 中既有最大值，又有最小值；

④ 对任意的 $a\in\mathbf{R}$，存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，当 $n>n_0$ 时，$|a_n-2|<\frac{1}{2023}$ 恒成立.

其中，正确结论的序号有___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=11$，$\cos C=\frac{3}{5}$.

（Ⅰ）求 $\triangle ABC$ 的面积；

（Ⅱ）求 c 及 $\sin A$ 的值.

17.（本小题 14 分）

在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，且 $a_3-a_1=3$，$S_3=7$.

（Ⅰ）求 a_n 和 S_n；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_2(S_n+1)$，记 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求 T_n.

18.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin x(a+\cos x)$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间.

19．（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\cos^2\omega x\ (0<\omega<2)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值．

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{5\pi}{12},\frac{1}{2})$；

条件②：函数 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；

条件③：函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$．

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分．

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$， $g(x)=kx$．

（Ⅰ）当 $k=1$ 时，求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 k 的值．

21．（本小题 15 分）

对于一个 n 行 n 列的数表 $A_{n\times n}\ (n\geqslant 2)$，用 $a_{i,j}$ 表示数表中第 i 行第 j 列的数，其中 $a_{i,j}\in\mathbf{Z}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，且数表 $A_{n\times n}$ 满足以下两个条件：

① $\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}=n$；

② $a_{i+1,j+1}=a_{i,j}$，规定 $a_{i+1,n+1}=a_{i+1,1}\ (i=1,2,\cdots,n-1,\ j=1,2,\cdots,n)$．

（Ⅰ）已知数表 $A_{3\times 3}$ 中，$a_{1,1}=3$， $a_{1,2}=-1$．写出 $a_{1,3}$， $a_{2,2}$， $a_{3,1}$ 的值；

（Ⅱ）若 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k=\max\left\{a_{1,1}-1,a_{1,1}+a_{1,2}-2,\cdots,a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}(k\in\{1,2,\cdots,n\})$，其中 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数．规定 $a_{1,n+1}=a_{1,1}$．证明： $a_{1,k+1}-1\leqslant 0$；

（Ⅲ）证明：存在 $m\in\{1,2,\cdots,n\}$，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$．