2023 北京西城高一（上）期末

数　　学

2023.1

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$， $B=\{x\mid x^2\leqslant 9\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[-5,3]$　　（B）$(-3,1]$

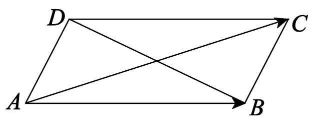
（C）$[-3,1)$　　（D）$[-3,3]$

（2）已知命题 $p:\exists x<1$， $x^2\leqslant 1$，则 $\neg p$ 为

（A）$\forall x\geqslant 1$，$x^2>1$　　（B）$\exists x<1$，$x^2>1$

（C）$\forall x<1$，$x^2>1$　　（D）$\exists x\geqslant 1$，$x^2>1$

（3）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=$



（A）$\overrightarrow{CB}$　　（B）$\overrightarrow{AD}$

（C）$\overrightarrow{BD}$　　（D）$\overrightarrow{CD}$

（4）若 $a>b$，则下列不等式一定成立的是

（A）$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（B）$a^2>b^2$　　（C）$e^{-a}<e^{-b}$　　（D）$\ln a>\ln b$

（5）不等式 $\dfrac{2x+1}{x-2}\leqslant 1$ 的解集为

（A）$[-3,2]$　　（B）$(-\infty,-3]$

（C）$[-3,2)$　　（D）$(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$

（6）正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}|=$

（A）1　　（B）3　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{5}$

（7）某物流公司为了提高运输效率，计划在机场附近建造新的仓储中心. 已知仓储中心建造费用 C（单位：万元）与仓储中心到机场的距离 s（单位：km）之间满足的关系为 $C=\dfrac{800}{s}+2s+2000$，则当 C 最小时，s 的值为

（A）20　　（B）$20\sqrt{2}$　　（C）40　　（D）400

（8）设 $\log_2 3=a$，则 $2^{1+2a}=$

（A）8　　（B）11

（C）12　　（D）18

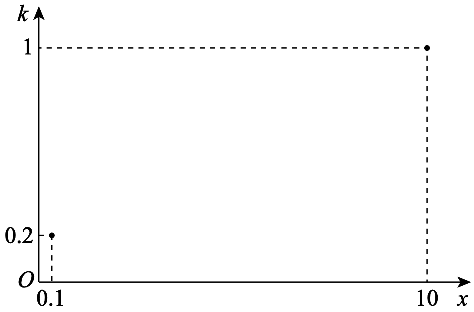
（9）已知$\boldsymbol{a}$为单位向量，则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{b}|=1$”是“存在$\lambda>0$，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）近年来，踩踏事件时有发生，给人们的生命财产安全造成了巨大损失. 在人员密集区域，人员疏散是控制事故的关键，而能见度x（单位：米）是影响疏散的重要因素. 在特定条件下，疏散的影响程度k与能见度x满足函数关系：

$$k=\begin{cases}0.2, & x<0.1,\\ ax^{b}+1.4, & 0.1\leqslant x\leqslant 10,\\ 1, & x>10,\end{cases}$$（a,b是常数）. 如图记录了两次实验的数据，根据上述函数模型和实验数据，b的值是



（参考数据：$\lg 3\approx 0.48$）

（A）-0.24　　（B）-0.48

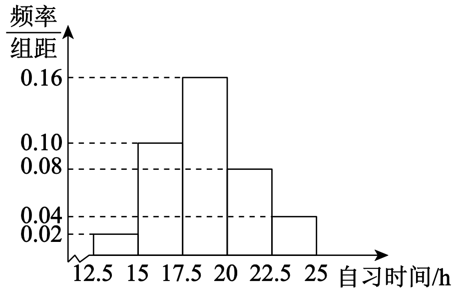
（C）0.24　　（D）0.48

第二部分（非选择题共110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数$f(x)=\log_2(1-x)+\sqrt{x}$的定义域是_____.

（12）某高校调查了200名学生每周的自习时间(单位：小时)，制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是$[12.5,25]$，样本数据分组为$[12.5,15)$，$[15,17.5)$，$[17.5,20)$，$[20,22.5)$，$[22.5,25]$. 根据频率分布直方图，这200名学生中每周的自习时间不少于20小时的人数是_____.



（13）写出一个同时满足下列两个条件的函数$f(x)=$_____.

①对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，有$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；

②当$x\in(4,+\infty)$时，$f(x)>1$恒成立.

（14）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x}+a, & x\geqslant 0,\\ ax, & x<0,\end{cases}$若$a=-4$，则$f(x)>0$的解集为_____；

若$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$，则a的取值范围为_____.

（15）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$，给出下列四个结论：

① $f(0)=1$或-1；

② $f(x)$ 一定不是偶函数；

③若 $f(x)>0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④若 $f(x)$ 有最大值，则 $f(x)$ 一定有最小值.

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

某射手打靶命中 9 环、10 环的概率分别为 $0.25, 0.2$．如果他连续打靶两次，且每次打靶的命中结果互不影响.

（Ⅰ）求该射手两次共命中 20 环的概率；

（Ⅱ）求该射手两次共命中不少于 19 环的概率.

（17）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（Ⅱ）证明函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数；

（Ⅲ）写出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的单调性（结论不要求证明）.

（18）（本小题 14 分）

甲和乙分别记录了从初中一年级（2017 年）到高中三年级（2022 年）每年的视力值，如下表所示.

	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年
甲	4.94	4.90	4.95	4.82	4.80	4.79
乙	4.86	4.90	4.86	4.84	4.74	4.72

（Ⅰ）计算乙从 2017 年到 2022 年这 6 年的视力平均值；

（Ⅱ）从 2017 年到 2022 年这 6 年中随机选取 2 年，求这两年甲的视力值都比乙高 0.05 以上的概率；

（Ⅲ）甲和乙的视力平均值从哪年开始连续三年的方差最小？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

函数 $f(x)=|1-\lg x|-c$，其中 $c\in \mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $c=0$，求 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求 $4x_1+x_2$ 的取值范围.

（20）（本小题 13 分）

某商贸公司售卖某种水果. 经市场调研可知：在未来 20 天内，这种水果每箱的销售利润 r（单位：元）与时间 t（$1\leqslant t\leqslant 20$，$t\in \mathbf{N}$，单位：天）之间的函数关系式为 $r=\dfrac{1}{4}t+10$，且日销售量 p（单位：箱）与时间 t 之间的函数关系式为 $p=120-2t$.

（Ⅰ）求第几天的日销售利润最大？最大值是多少？

（Ⅱ）在未来的这 20 天中，在保证每天不赔本的情况下，公司决定每销售 1 箱该水果就捐赠 $m(m\in \mathbf{N}^*)$ 元给“精准扶贫”对象，为保证销售积极性，要求捐赠之后每天的利润随时间 t 的增大而增大，求 m 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于区间 $I=[a,b](a<b,I\subseteq D)$，若满足以下两条性质之一，则称 I 为 $f(x)$ 的一个“Ω 区间”.

性质 1：对任意 $x\in I$，有 $f(x)\in I$；

性质 2：对任意 $x\in I$，有 $f(x)\notin I$.

（Ⅰ）分别判断区间 $[1,2]$ 是否为下列两函数的“Ω 区间”（直接写出结论）；

① $y=3-x$；　　② $y=\dfrac{3}{x}$；

（Ⅱ）若 $[0,m](m>0)$ 是函数 $f(x)=-x^2+2x$ 的“Ω 区间”，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上，且图象连续不断的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in \mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<-1$.

求证：$f(x)$ 存在“Ω 区间”，且存在 $x_0\in \mathbf{R}$，使得 x_0 不属于 $f(x)$ 的所有“Ω 区间”.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. A	2. C	3. B	4. C	5. C
6. D	7. A	8. D	9. B	10. A

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $[0,1)$　　　　12. 60

13. $\log_2 x$（答案不唯一，对数函数的底数 $a\in(1,4]$ 即可）

14. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$，$-1<a<0$

15. ①③

注：第 14 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16.（本小题 13 分）

解：记事件 A_i：某射手第 i 次打靶，命中 9 环，B_i：某射手第 i 次打靶，命中 10 环，

其中 $i=1,2$，则 $P(A_1)=P(A_2)=0.25$，$P(B_1)=P(B_2)=0.2$.

（Ⅰ）因为 B_1,B_2 相互独立，所以

$$P(B_1B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=0.2\times0.2=0.04.$$

即连续打靶两次，命中 20 环的概率为 0.04.

（Ⅱ）连续打靶两次，命中不少于 19 环，可能第一次命中 9 环，第二次命中 10 环，

可能第一次命中 10 环，第二次命中 9 环，还可能两次都命中 10 环，

即 $A_1B_2+B_1A_2+B_1B_2$.

因为 A_1 与 B_2，B_1 与 A_2，B_1 与 B_2 相互独立，且 A_1B_2，B_1A_2，B_1B_2 互斥，因此

$$\begin{aligned}P(A_1B_2+B_1A_2+B_1B_2)&=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)+P(B_1B_2)\\&=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)+P(B_1)P(B_2)\\&=0.25\times0.2+0.2\times0.25+0.2\times0.2=0.14.\end{aligned}$$

即连续打靶两次，命中不少于 19 环的概率为 0.14.

17.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

又因为 $f(-x)=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

（Ⅱ）任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1(x_2^2+1)-x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$=\frac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

因为$1 \leqslant x_1 < x_2$，所以$x_2 - x_1 > 0$， $x_1x_2 - 1 > 0$，

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$.

根据函数单调性定义， $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ 在$[1, +\infty)$上是减函数.

（III） $f(x)$在$(-\infty, -1]$上是减函数.

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）乙从 2017 年到 2022 年这 6 年的视力平均值为

$$\frac{4.86+4.90+4.86+4.84+4.74+4.72}{6} = 4.82.$$

（Ⅱ）甲的视力值比乙高 0.05 以上的年份有：2017 年、2019 年、2021 年、2022 年.

从 2017 年到 2022 年这 6 年中随机选取 2 年，所有可能的结果有15 种，它们是：

$(2017, 2018), (2017, 2019), (2017, 2020), (2017, 2021), (2017, 2022), (2018, 2019),$

$(2018, 2020), (2018, 2021), (2018, 2022), (2019, 2020), (2019, 2021), (2019, 2022),$

$(2020, 2021), (2020, 2022), (2021, 2022).$

用A表示“这两年甲的视力值都比乙高 0.05 以上”这一事件，则A中的结果有 6 个，它们是：

$(2017, 2019), (2017, 2021), (2017, 2022), (2019, 2021), (2019, 2022), (2021, 2022),$ 所以，所求得概率$P(A) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

（III）甲和乙的视力平均值从2017年开始连续三年的方差最小.

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当$c = 0$时， $f(x) = |1 - \lg x|$，令$|1 - \lg x| = 0$，解得$x = 10$，

所以函数零点为$x = 10$.

（Ⅱ）由已知， $f(x) = \begin{cases} 1 - \lg x - c, & 0 < x \leqslant 10, \\ \lg x - 1 - c, & x > 10, \end{cases}$

当$c > 0$时， $f(x)$有两个零点x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$，

$1 - \lg x_1 = c$， $\lg x_2 - 1 = c$，所以$x_1 = 10^{1-c}$， $x_2 = 10^{1+c}$，

所以$4x_1 + x_2 = 4 \times 10^{1-c} + 10^{1+c} = \dfrac{40}{10^c} + 10 \times 10^c$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{40}{10^c} \times 10 \times 10^c} = 40.$$

当且仅当$\dfrac{40}{10^c} = 10 \times 10^c$，即$c = \lg 2$时，等号成立，

所以$4x_1 + x_2 \in [40, +\infty)$.

20.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设第 t 日的销售利润为 $f(t)$，则

$$f(t)=rp=(\frac{1}{4}t+10)(120-2t)=-\frac{1}{2}t^2+10t+1200=-\frac{1}{2}(t-10)^2+1250.$$

当 $t=10$ 时，$f(t)_{\max}=1250$.

所以第 10 天的销售利润最大，最大值是 1250 元.

（Ⅱ）设捐赠之后第 t 日的销售利润为 $g(t)$，则

$$g(t)=(\frac{1}{4}t+10-m)(120-2t)=-\frac{1}{2}t^2+(10+2m)t+1200-120m.$$

依题意，m 应满足以下条件：

① $m\in\mathbf{N}^*$；

② $10+2m>\dfrac{19+20}{2}=19.5$，即 $m>4.75$；

③ $m\leqslant\dfrac{1}{4}t+10$ 对于 $1\leqslant t\leqslant 20, t\in\mathbf{N}$ 均成立，即 $m\leqslant 10.25$.

综上 $5\leqslant m\leqslant 10$，且 $m\in\mathbf{N}^*$.

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）①是，②不是.

（Ⅱ）记 $I=[0,m]$，$S=\{f(x)\,|\,x\in I\}$，注意到 $f(0)=0\in[0,m]$，

因此，若 I 为函数 $f(x)$ 的“Ω 区间”，则其不满足性质②，必满足性质①，

即 $S\subseteq I$.

$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$.

当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 在 I 上单调递增，且 $f(m)-m=-m(m-1)>0$，

所以 $S=[0,f(m)]$ 不包含于 $I=[0,m]$，不合题意；

当 $1\leqslant m\leqslant 2$ 时，$S=[f(0),f(1)]=[0,1]\subseteq[0,m]=I$，合题意；

当 $m>2$ 时，$f(m)<f(2)=f(0)=0$，所以 $f(m)\notin I$，不合题意.

综上，$m\in[1,2]$.

（Ⅲ）对于任意区间 $I=[a,b](a<b)$，记 $S=\{f(x)\,|\,x\in I\}$，

依题意，$f(x)$ 在 I 上单调递减，则 $S=[f(b),f(a)]$.

因为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<-1$，所以 $f(a)-f(b)>b-a$，

即 S 的长度大于 I 的长度，故不满足性质①.

因此，如果 I 为 $f(x)$ 的“Ω 区间”，只能满足性质②，即 $S\cap I=\varnothing$，

即只需存在 $a\in\mathbf{R}$ 使得 $f(a)<a$，或存在 $b\in\mathbf{R}$ 使得 $f(b)>b$.

因为 $f(x)=x$ 不恒成立，所以上述条件满足，所以 $f(x)$ 一定存在“Ω 区间”.

记 $g(x)=f(x)-x$，先证明函数 $g(x)$ 有唯一零点：

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

若 $f(0)=0$，则 $x_0=0$ 为 $g(x)$ 的唯一零点；

若 $f(0)=t>0$，则 $f(t)<f(0)=t$，即 $g(0)>0$，$g(t)<0$，

由零点存在定理，结合 $g(x)$ 单调性，可知存在唯一 $x_0\in(0,t)$，使得 $g(x_0)=0$；

若 $f(0)=t<0$，则 $f(t)>f(0)=t$，即 $g(0)<0$，$g(t)>0$，

由零点存在定理，结合 $g(x)$ 单调性，可知存在唯一 $x_0\in(t,0)$，使得 $g(x_0)=0$；

综上，函数 $g(x)$ 有唯一零点 x_0，即 $f(x_0)=x_0$，

已证 $f(x)$ 的所有“Ω 区间”I 都满足条件②，所以 $x_0\notin I$.