2023 北京理工大附中高一 12 月月考

数　　学

班级______　姓名______　学号______

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1. 已知全集$U=\{0,1,2,3\}$，$C_U A=\{0,2\}$，则集合 A 的真子集共有（　）

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

2. 命题“$\exists x>1$，$x+x^2\geq 2$”的否定形式是（　）

A. $\forall x\leq 1$，$x+x^2<2$　　B. $\forall x>1$，$x+x^2<2$

C. $\exists x>1$，$x+x^2<2$　　D. $\exists x\leq 1$，$x+x^2<2$

3. “$0<a<4$”是“关于 x 的方程$ax^2+ax+1=0$无实根”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}-x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

5. 下列函数中，随着 x 的增长，增长速度最快的是（　）

A. $y=50$　　B. $y=1000x$　　C. $y=2\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{1000}\mathrm{e}^x$

6. 地震里氏震级是地震强度大小的一种度量．地震释放的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$ 已知两次地震的里氏震级分别为 8.0 级和 7.5 级，若它们释放的能量分别为 E_1 和 E_2，则$\dfrac{E_1}{E_2}=$（　）

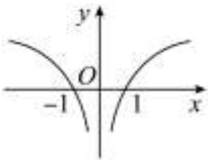
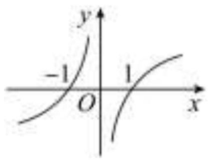
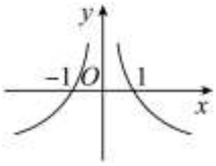
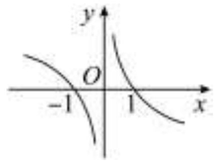
A. $10^{1.05}$　　B. 1.05　　C. $10^{0.75}$　　D. 0.75

7. 已知$a=3^{\frac{1}{2}}$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$，$c=\log_2\dfrac{1}{3}$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

8. 函数 $y=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 的图象是（　）

A. 
B. 
C. 
D. 

9. 已知正数a，b满足$\sqrt[a]{9}\times\sqrt[b]{27}=3$，则$3a+2b$的最小值为（　）

A. 10　　B. 12　　C. 18　　D. 24

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}|x+m|,x\le m\\ x^2,x>m\end{cases}$，若存在实数$b$，使得关于　的方程$f(x)=b$有三个不同的根，则实数$m$的取值范围是（　）

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　C. $(-2,0)$　　D. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分.）

11. 已知$3^a=2$，$3^b=\dfrac{1}{5}$，则$3^{2a-b}=$________.

12. 已知$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，当$x\ge 0$时，$f\left(x\right)=3^x+m$(m为常数)，则$f\left(-\log_3 5\right)=$

_______.

13. 函数$f\left(x\right)=\log_a\left(2x-3\right)+8$的图象恒过定点$A$，且点$A$在幂函数$g\left(x\right)=x^a$的图象上，则$f\left(x\right)=$

______，$f\left(3\right)=$______.

14. 已知$f\left(x\right)=\log_4\left(-ax+3\right)$在$\left[0,1\right]$上是关于$x$的减函数，则实数$a$的取值范围是______.

15. 若函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x+6,x\le 2\\ 3+\log_a x,x>2\end{cases}$（$a>0$且$a\ne 1$）的值域是$\left[4,+\infty\right)$，则实数$a$的取值范围是

_________.

三、解答题（本大题共4小题，共40分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

16. 令$P=8^{0.25}\times\sqrt[4]{2}+\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(-2023\right)^0$，$Q=\lg 25+\lg 2\cdot\lg 50+\left(\lg 2\right)^2$.

（1）分别求P和Q;

（2）若$2^a=5^b=m$，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=Q$，求$m$.

17.已知幂函数$f\left(x\right)=\left(k^2+k-1\right)x^{(2-k)(1+k)}$，且$f\left(2\right)<f\left(3\right)$.

（1）求函数$f\left(x\right)$的解析式;

（2）试判断是否存在正数m，使得函数$g\left(x\right)=1-f\left(x\right)+2mx$在区间$\left[0,1\right]$上的最大值为5，若存在，求出$m$的值，若不存在，请说明理由.

18. 已知函数$f\left(x\right)=2^x+2^{-x}$，$g\left(x\right)=\dfrac{x}{2}+\log_2\left(1+2^{-x}\right)$.

（1）判断函数 $g(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（2）若 $g(x)\le\frac{1}{2}\log_2 f(x)+a$ 对一切实数 成立，求实数 a 的取值范围.

19.设整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$，其中 $1\le a_1<a_2<\cdots<a_{100}\le 205$，且对于任意 $i,j(1\le i\le j\le 100)$，若 $i+j\in A$，则 $a_i+a_j\in A$.

（1）请写出一个满足条件的集合 A；

（2）证明：任意 $x\in\{101,102,\cdots,200\}$，$x\notin A$.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1.【答案】A

【分析】先计算集合　，再计算集合　的真子集个数.

【详解】全集　　　　　　　，　　　　　　　则 $A=\{1,3\}$

故集合　的真子集共有 $2^2-1=3$ 个

故选：

【点睛】本题考查了补集，真子集的个数问题，混淆子集和真子集是容易发生的错误.

2.【答案】B

【分析】利用含有一个量词的命题的否定的定义求解.

【详解】解：因为命题“　　　，　　　　　　”是存在量词命题，

所以其否定是全称量词命题，即　　　　，　　　　　　，

故选：B

3.【答案】A

【分析】由“关于　的方程　　　　　　　　　无实根”得 $0\le a<4$，根据 $\{a\,|\,0<a<4\}$ 是 $\{a\,|\,0\le a<4\}$ 的真子集得解.

【详解】当 $a=0$ 时，所给方程无实数根；

当 $a\ne 0$ 时，若所给方程无实数根，则有 $\Delta=a^2-4a<0$，解得　　　　.

所以当　　　　　　　　　无实数根时，则有 $0\le a<4$.

因为 $\{a\,|\,0<a<4\}$ 是 $\{a\,|\,0\le a<4\}$ 的真子集，

所以“　　　　”是“关于　的方程　　　　　　　　　无实根”的充分不必要条件.

故选 A

【点睛】本题主要考查二次型方程的根的判断，考查充要条件的判断，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.

4.【答案】A

【分析】

解不等式 $\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}>0\\ x\ge 0\end{cases}$ 即得函数的定义域.

【详解】由题得 $\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}>0\\ x\ge 0\end{cases}\therefore\begin{cases}x>0\text{或}x<-1\\ x\ge 0\end{cases},\therefore x>0$

所以函数的定义域为 .

故选 A

【点睛】本题主要考查函数的定义域的求法，考查对数函数和幂函数的定义域，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.

5.【答案】D

【分析】按照基本函数的性质即可求解.

【详解】依据常函数、一次函数、对数函数、指数函数的性质可知增长速度最快的函数模型是指数函数，

故随着 x 的增长， —— 增长速度最快.

故选：D.

6.【答案】C

【分析】先把数据代入已知解析式，再利用对数的运算性质即可得出.

【详解】$\because \lg E=4.8+1.5M$，

$\therefore \lg E_1=4.8+1.5\times 8=16.8$，$\lg E_2=4.8+1.5\times 7.5=16.05$，

$\therefore E_1=10^{16.8}$，$E_2=10^{16.05}$，

$\therefore \dfrac{E_1}{E_2}=10^{0.75}$，

故选：C

7.【答案】A

【分析】利用对数的性质和指数的性质对 a,b,c 化简后与中间量“0”，“1”比较大小即可

【详解】解：因为 $a=\sqrt{3}>1$，$0<b=\log_{\_}$ — $=\log_3 2<1$，$c=\log_2$ — $=-\log_2 3<0$，

故 $a>b>c$，

故选：A.

【点睛】此题考查对数式和指数式比较大小问题，考查对数的运算性质，属于基础题

8.【答案】B

【分析】先根据 $x>0$ 时，$y=\ln x$ 的图象判断 CD 错误；再判断 $f\left(x\right)$ 是奇函数，根据对称性判断 A 错误，B 正确，即得结果.

【详解】函数 $y=f\left(x\right)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 中，定义域为 $\left\{x\middle|x\neq 0\right\}$.

当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，根据对数函数的图象可知，CD 错误；

又 $f\left(-x\right)=\dfrac{-x\ln|x|}{|x|}=-f\left(x\right)$，故 $f\left(x\right)$ 是奇函数，图象关于原点对称，故 A 错误，B 正确.

故选：B.

9.【答案】D

【分析】将根式表示为分数指数幂，得 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，利用基本不等式求 $3a+2b$ 的最小值.

【详解】$\sqrt[a]{9}\times\sqrt[b]{27}=3^{\frac{2}{a}}\times3^{\frac{3}{b}}=3^{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}}=3$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，

因为 a，b 为正数，

所以 $3a+2b=(3a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)=12+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\geq12+2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{9a}{b}}=24$，

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$ 时，即 $a=4$，$b=6$ 时，等号成立，

所以 $3a+2b$ 的最小值为 24.

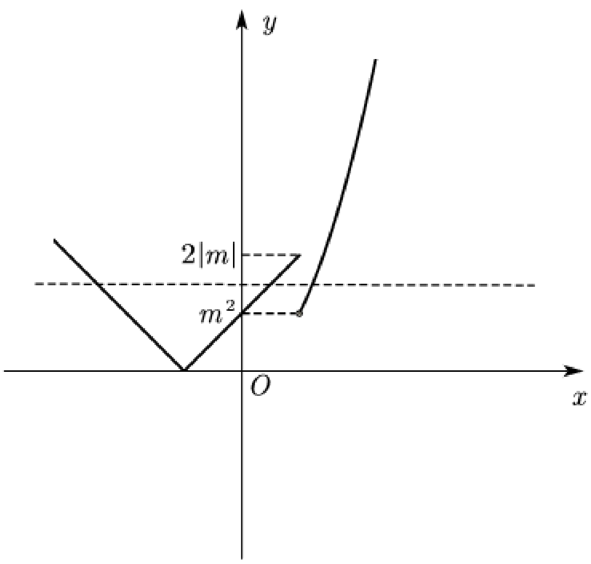
故选：D.

10.【答案】B

【分析】作出函数 $f(x)$ 的图象，分 $m>0$、$m=0$、$m<0$ 三段讨论即可.

【详解】分情况讨论，

当 $m>0$ 时，要使 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 $\begin{cases}|2m|>m^2\\ m>0\end{cases}\Rightarrow 0<m<2$；



当 $m<0$ 时，要使 $f(x)=b$ 有三个不同的根，同理可知，需要 $\begin{cases}m^2>|2m|\\ m<0\end{cases}\Rightarrow m<-2$.

当 $m=0$ 时，两个分段点重合，不可能有三个不同的根，故舍去.

$\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,2)$，

故选：B.

【点睛】本题考查根的存在性及根的个数判断，数形结合思想的运用是关键，分析得到临界位置的高低是难点，属于中档题.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.）

11.【答案】20

【分析】利用指数幂的运算性质即可求解.

【详解】解析：$3^{2a-b}=\frac{3^{2a}}{3^{b}}=\frac{\left(3^{a}\right)^{2}}{3^{b}}=\frac{2^{2}}{\frac{1}{5}}=20$.

故答案为：20

【点睛】本题考查了指数的运算性质，掌握指数的运算是解题的关键，考查了基本运算能力，属于基础题.

12.【答案】-4

【分析】由奇函数的性质与对数的运算性质求解，

【详解】由 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，故 $f(0)=1+m=0$，得 $m=-1$，

而 $f\left(\log_{3}5\right)=3^{\log_{3}5}-1=4$，则 $f\left(-\log_{3}5\right)=-4$，

故答案为：-4

13.【答案】 ①. $\log_{3}\left(2x-3\right)+8\left(x>\frac{3}{2}\right)$ ②. 9

【分析】令 $2x-3=1$ 求得 $f\left(x\right)=\log_{a}\left(2x-3\right)+8$ 的图象恒过定点 $A\left(2,8\right)$，再通过点 A 在幂函数 $g\left(x\right)=x^{a}$ 上求得，进而即得.

【详解】解：令 $2x-3=1$，解得 $x=2$，则 $f\left(2\right)=\log_{a}1+8=8$，

所以 $f\left(x\right)=\log_{a}\left(2x-3\right)+8$ 的图象恒过定点 $A\left(2,8\right)$，

$2^{a}=8=2^{3}$，解得 $a=3$，

所以 $f\left(x\right)=\log_{3}\left(2x-3\right)+8$， $f\left(3\right)=\log_{3}3+8=9$，

故答案为：$\log_{3}\left(2x-3\right)+8\left(x>\frac{3}{2}\right)$； 9.

14.【答案】$0<a<3$

【分析】根据对数函数、一次函数的单调性，再由复合函数的单调性建立不等式求解即可.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\log_{4}\left(-ax+3\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上是关于 x 的减函数，

而 $y=\log_{4}t$ 是增函数，

所以由复合函数单调性可知，$t=-ax+3(t>0)$ 为 $\left[0,1\right]$ 上的减函数，

故 $\begin{cases}-a<0\\-a\times1+3>0\end{cases}$，解得 $0<a<3$.

故答案为：$0<a<3$

15.【答案】$\left(1,2\right]$

【详解】试题分析：由于函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+6,x\le 2\\ 3+\log_a x,x>2\end{cases}\left(a>0,a\ne 1\right)$ 的值域是 $\left[4,+\infty\right)$，故当 $x\le 2$ 时，满足 $f\left(x\right)=6-x\ge 4$，当 $x>2$ 时，由 $f\left(x\right)=3+\log_a x\ge 4$，所以 $\log_a x\ge 1$，所以 $\log_a 2\ge 1\Rightarrow 1<a<2$，所以实数 a 的取值范围 $1<a\le 2$.

考点：对数函数的性质及函数的值域.

【方法点睛】本题以分段为背景主要考查了对数的图象与性质及函数的值域问题，解答时要牢记对数函数的单调性及对数函数的特殊点的应用是解答的关键，属于基础题，着重考查了分类讨论的思想方法的应用，本题的解答中，当 $x>2$ 时，由 $f\left(x\right)\ge 4$，得 $\log_a x\ge 1$，即 $\log_a 2\ge 1$，即可求解实数 a 的取值范围.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

16.【答案】（1）$P=\dfrac{7}{3},Q=2$

（2）$\sqrt{10}$

【分析】（1）根据指数幂的运算性质和对数的运算性质求解即可；

（2）根据指数与对数的互化可得 $a=\log_2 m,b=\log_5 m$，结合对数的运算性质和换底公式即可得出答案.

【小问 1 详解】

$P=8^{0.25}\times\sqrt[4]{2}+\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}-(-2023)^0$

$=2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}-1$

$=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}+\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{7}{3}$，

$Q=\lg 25+\lg 2\cdot\lg 50+(\lg 2)^2$

$=\lg 25+\lg 2\cdot\left(2\lg 5+\lg 2\right)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 5+2\lg 2\cdot\lg 5+2(\lg 2)^2$

$=2\lg 5+2\lg 2\cdot\left(\lg 5+\lg 2\right)$

$=2\lg 5+2\lg 2$

$=2\lg 10=2$，

所以 $P=\dfrac{7}{3},Q=2$；

【小问 2 详解】

由 $2^a=5^b=m$，得 $a=\log_2 m,b=\log_5 m$，且 $m>0$，

则$\frac{1}{a}=\log_m 2, \frac{1}{b}=\log_m 5$，

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_m 2+\log_m 5=\log_m 10=2$，

所以$m^2=10$，即$m=\sqrt{10}$.

17.【答案】（1）$f(x)=x^2$

（2）存在，$m=\frac{5}{2}$

【分析】（1）根据函数$f(x)$是幂函数，则$k^2+k-1=1$，并检验$f(2)<f(3)$，即可；

（2）化简得$g(x)=1-f(x)+2mx=-x^2+2mx+1$，求出对称轴，分$0<m<1$，$m\geq 1$两种情况分别求得函数的最大值，即可求出实数$m$的值.

【小问1详解】

由题知，$k^2+k-1=1$，解得$k=-2$或$k=1$，

当$k=1$时，$f(x)=x^2$，满足$f(2)<f(3)$，

当$k=-2$时，$f(x)=x^{-4}$，不满足$f(2)<f(3)$，

所以$f(x)=x^2$.

【小问2详解】

$g(x)=1-f(x)+2mx=-x^2+2mx+1$.

当$0<m<1$时，$g(x)$在区间$[0,m]$上单调递增，在$[m,1]$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g(m)=m^2+1=5$，

解得$m=\pm 2$，不合题意；

当$m\geq 1$时，$g(x)$在区间$[0,1]$上递增，

所以$g(x)_{\max}=g(1)=2m=5$，解得$m=\frac{5}{2}$.

综上所述，存在正数$m=\frac{5}{2}$，使得$g(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为5.

18.【答案】（1）$g(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数，证明见解析

（2）$a\geq\frac{1}{2}$

【分析】（1）判断出函数$g(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数，然后利用函数奇偶性的定义证明可得结论；

（2）利用参变量分离法可得出$2a\geq\log_2\frac{2^x\left(1+2^{-x}\right)^2}{2^x+2^{-x}}$，利用基本不等式可求得$\log_2\frac{2^x\left(1+2^{-x}\right)^2}{2^x+2^{-x}}$的取值

范围，即可求得实数a的取值范围.

【小问 1 详解】

解：$g(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数，证明如下：

对任意的$x\in\mathbf{R}$，$1+2^{-x}>0$，故函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

$$g(x)=\frac{x}{2}+\log_2\left(1+\frac{1}{2^x}\right)=\frac{x}{2}+\log_2\frac{2^x+1}{2^x}=\frac{x}{2}+\log_2\left(2^x+1\right)-\log_2 2^x=-\frac{x}{2}+\log_2\left(2^x+1\right)=g(-x),$$

因此，函数$g(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数.

【小问 2 详解】

解：$\because f(x)=2^x+2^{-x}$，$\because g(x)=\frac{x}{2}+\log_2\left(1+2^{-x}\right)$，$\therefore g(x)\le\frac{1}{2}\log_2 f(x)+a$，

即$\frac{x}{2}+\log_2\left(1+2^{-x}\right)\le\frac{1}{2}\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)+a$对一切实数 恒成立，

则$x+2\log_2\left(1+2^{-x}\right)\le\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)+2a$，

即$2a\ge\log_2 2^x+\log_2\left(1+2^{-x}\right)^2-\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)=\log_2\frac{2^x\left(1+2^{-x}\right)^2}{2^x+2^{-x}}$，

即$2a\ge\log_2\left(1+\frac{2}{2^x+2^{-x}}\right)$对一切实数 恒成立，

而$2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$，所以$\log_2\left(1+\frac{2}{2^x+2^{-x}}\right)\in(0,1]$，

当且仅当$2^x=1$时，即$x=0$时取等号，

$\therefore 2a\ge 1$，即$a\ge\frac{1}{2}$，即实数a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

19.【答案】(1) $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$（答案不唯一）

（2）证明见解析

【分析】(1) 根据题意可设$a_n=n$，满足条件即可得解；

（2）根据满足任意$x\in\{101,102,\cdots,200\}$，要证$x\notin A$的形式，考虑反证法即可证明.

【小问 1 详解】

令$a_n=n$，满足$1\le a_1<a_2<\cdots<a_{100}\le 205$，

当$i,j\,(1\le i\le j\le 100)$时，若满足$i+j\in A$，则$a_i+a_j=i+j\in A$成立，

即可写出一个满足条件的集合$A=\{1,2,3,\cdots,100\}$.

【小问 2 详解】

假设存在一个$x_0\in\{101,102,\cdots,200\}$使得$x_0\in A$，

令$x_0=100+s$，其中$s\in\mathrm{N}$且$1\leqslant s\leqslant 100$，

由题意，得 $a_{100}+a_s\in A$，

由 a_s 为正整数，得 $a_{100}+a_s>a_{100}$，这与 a_{100} 为集合 中的最大元素矛盾，

所以任意 $x\in\{101,102,\cdots,200\}$，$x\notin A$.

【点睛】关键点点睛：利用反证法证明第二问，假设存在一个 $x_0\in\{101,102,\cdots,200\}$ 使得 $x_0\in A$，首先把 x_0 拆成 $x_0=100+s$ 是解题推理的关键，其次利用集合是整数构成的，且 a_{100} 最大是解题的另外一个关键点.