2022 北京石景山初二（上）期末

数　　学

学校_________姓名________准考证号

考生须知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 100 分钟。 2．在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。 3．试卷答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 4．考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1． 25 的平方根是

(A) 5　　(B) -5　　(C) ± 5　　(D) $\pm\sqrt{5}$

2．下列各式从左到右变形正确的是

(A) $\frac{3x^2}{6x}=\frac{x}{2}$　　(B) $\frac{n}{m}=\frac{n+1}{m+1}$

(C) $\frac{n}{m}-\frac{m}{n}=\frac{n-m}{mn}$　　(D) $\frac{n}{m}=\frac{n^2}{m^2}$

3．如图 1，北京 2022 年冬季奥林匹克运动会会徽（冬梦）主要由会徽图形、文字标志、奥林匹克五环标志三个部分组成，图形主体形似汉字“冬”的书法形态；如图 2，冬残奥会会徽（飞跃）主要由会徽图形、文字标志、国际残奥委会标志三部分组成，图形主体形似汉字“飞”的书法字体．

图 1

图 2

以下图案是会徽中的一部分，其中是轴对称图形的为


(A)


(B)


(C)


(D)

4．下列运算正确的

(A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{20}\div\sqrt{10}=2$

(C) $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$　　(D) $\sqrt{(-3)^2}=-3$

5．下列说法正确的是

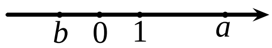
(A)“抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上”是随机事件

(B)“打开电视机，正在播放乒乓球比赛”是必然事件

(C)“面积相等的两个三角形全等”是不可能事件

(D) 投掷一枚质地均匀的硬币100 次，正面朝上的次数一定是 50 次

6．实数 a ，b 在数轴上的位置如图所示，化简 $\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{b^2}$ 的结果是



(A) $-a+b$　　　　(B) $-a-b$

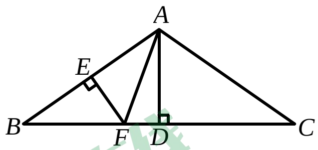
(C) $a+b$　　　　(D) $a-b$

7．如图，有 5 张形状、大小、材质均相同的卡片，正面分别印着北京 2022 年冬奥会的越野滑雪、速度滑冰、花样滑冰、高山滑雪、单板滑雪大跳台的体育图标，背面完全相同. 现将这 5 张卡片洗匀并正面向下放在桌上，从中随机抽取一张，抽出的卡片正面恰好是“滑冰”项目的图案的可能性是

越野滑雪　　速度滑冰　　花样滑冰　　高山滑雪　　单板滑雪大跳台

(A) $\frac{1}{5}$　　　　(B) $\frac{2}{5}$　　　　(C) $\frac{3}{5}$　　　　(D) $\frac{4}{5}$

8．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=110^\circ$，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D，AB 的垂直平分线交 AB 于点 E，交 BC 于点 F，连接 AF，则 $\angle FAD$ 的度数为



(A) 20°　　　　(B) 30°

(C) 35°　　　　(D) 70°

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．若代数式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是________.

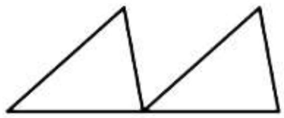
10．有下列命题：①可以在数轴上表示无理数 $\sqrt{3}$；②若 $a^2>b^2$，则 $a>b$；③无理数的相反数还是无理数．其中是真命题的为________（填序号）.

11. 已知三角形的两边长分别为 3 和 5，则这个三角形的第三边长可以是_____（写出一个即可）.

12．如图，点 C 是线段 AB 的中点，$DA\parallel EC$．请你只添加一个条件，使得 $\triangle DAC\cong\triangle ECB$.

（1）你添加的条件是________;

（要求：不再添加辅助线，只需填一个答案即可）

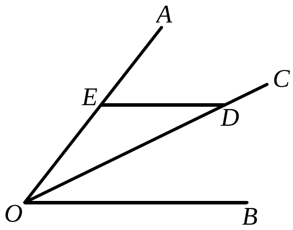


（2）依据所添条件，判定 $\triangle DAC$ 与 $\triangle ECB$ 全等的理由是__________.

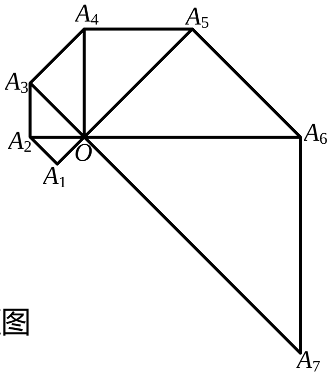
13．计算 $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ 的结果是________.

14．若 $x^2+x-3=0$，则代数式 $(x-\frac{1}{x})\cdot\frac{x^2}{x-1}$ 的值是________.

15．如图，点 D 是 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上一点，过点 D 作 $DE\parallel OB$ 交射线 OA 于点 E，则线段 DE 与 OE 的数量关系为：DE ____ OE （填“>”或“=”或“<”）.



第 15 题图



第 16 题图

16．如图，在 Rt$\triangle OA_1A_2$ 中，$\angle A_1=90^\circ$，$A_2A_1=OA_1=1$，

以 OA_2 为直角边作等腰直角 $\triangle OA_2A_3$，再以 OA_3 为直角边作等腰直角 $\triangle OA_3A_4$，…，

按照此规律作图，则 OA_4 的长度为_____，OA_n 的长度为_____.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．计算：$\sqrt{27}-\sqrt[3]{8}+\left|\sqrt{3}-1\right|+\left(-\sqrt{3}\right)^2$.

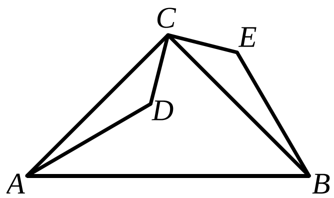
18．计算：$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)$.

19．如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB$，

点 D 是 $\triangle ACB$ 内一点，连接 CD，过点 C 作

$CE\perp CD$ 且 $CE=CD$，连接 AD，BE.

求证：$AD=BE$.



20．计算：$\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{x-1}{x-2}$.

21．下面是小明设计的“过直线上一点作这条直线的垂线”的尺规作图过程.

已知：如图 1，直线 l 及直线 l 上一点 P.

求作：直线 PQ，使得 $PQ\perp l$.

图 1

作法：如图 2，

①以点 P 为圆心，任意长为半径作弧，交直线 l 于点 A，B；

②分别以点 A，B 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}AB$ 的同样长为半径作弧，两弧在直线 l 的同侧交于点 Q；

③作直线 PQ.

直线 PQ 就是所求作的直线.

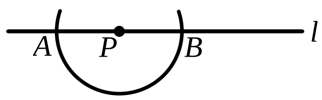


图 2

根据小明设计的尺规作图的过程，

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 QA，QB.

∵ $QA=$____，$PA=PB$，

∴ $PQ\perp l$（________________）（填推理的依据）.

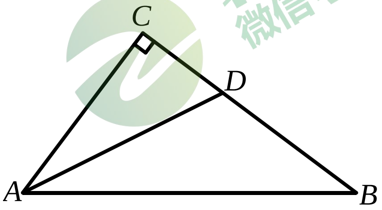
22．已知 $x=2-\sqrt{2}$，求代数式 $\left(2+\dfrac{10}{x-3}\right)\div\dfrac{x^2-4}{x-3}$ 的值.

23．解分式方程：$\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{3}{x+2}=1$.

24．如图，在 Rt△ACB 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=10$，$AC=6$．AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 D.

（1）求 BC 的长；

（2）求 CD 的长.



25．列方程解应用题.

某工程队承担了750米长的道路改造任务，工程队在施工完210米道路后，引进了新设备，每天的工作效率比原来提高了20%，结果共用22天完成了任务.求引进新设备前工程队每天改造道路多少米？

26．小石根据学习“数与式”积累的经验，想通过“由特殊到一般”的方法探究下面二次根式的运算规律.

下面是小石的探究过程，请补充完整：

（1）具体运算，发现规律.

特例1：$\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，

特例2：$\sqrt{2-\dfrac{2}{5}}=\sqrt{\dfrac{2\times5-2}{5}}=\sqrt{\dfrac{2\times(5-1)}{5}}=2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，

特例3：$\sqrt{3-\dfrac{3}{10}}=\sqrt{\dfrac{3\times10-3}{10}}=\sqrt{\dfrac{3\times(10-1)}{10}}=3\sqrt{\dfrac{3}{10}}$，

特例4：$\sqrt{4-\dfrac{4}{17}}=4\sqrt{\dfrac{4}{17}}$，

特例5：$\sqrt{5-\dfrac{5}{26}}=$______（填写运算结果）.

（2）观察、归纳，得出猜想.

如果 n 为正整数，用含 n 的式子表示上述的运算规律为：

__________________.

（3）证明你的猜想.

（4）应用运算规律.

①化简：$\sqrt{10-\frac{10}{101}}\times\sqrt{\frac{202}{5}}=$__________；

②若 $\sqrt{a-\frac{a}{50}}=7\sqrt{\frac{7}{b}}$（$a$，$b$ 均为正整数），则 $a+b$ 的值为_______.

27．点 P 为等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 延长线上的动点，点 B 关于直线 PC 的对称点为 D，连接 AD.

（1）如图1，若 $BP=AB=2$，依题意补全图形，并直接写出线段 AD 的长度；

（2）如图2，线段 AD 交 PC 于点 E，

①设 $\angle BCP=\alpha$，求 $\angle AEC$ 的度数；

②求证：$AE=CE+DE$.

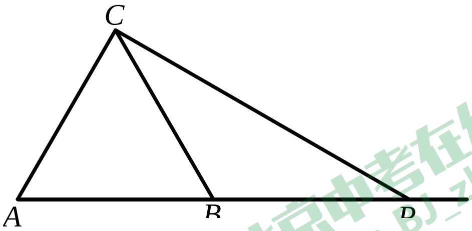


图1

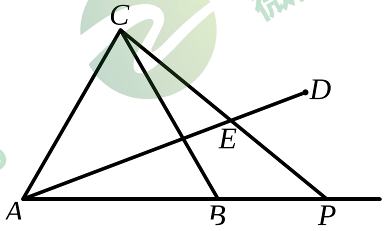


图2

28．在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB=6$，点 P 是线段 CB 上的一个动点（不与点 B，C 重合），过点 P 作直线 $l\perp CB$ 交 AB 于点 Q.给出如下定义：

若在 AC 边上存在一点 M，使得点 M 关于直线 l 的对称点 N 恰好在 $\triangle ACB$ 的边上，则称点 M 是 $\triangle ACB$ 的关于直线 l 的“反称点”.

例如，图1中的点 M 是 $\triangle ACB$ 的关于直线 l 的“反称点”.

（1）如图2，若 $CP=1$，点 M_1，M_2，M_3，M_4 在 AC 边上且 $AM_1=1$，$AM_2=2$，$AM_3=4$，$AM_4=6$.在点 M_1，M_2，M_3，M_4 中，是 $\triangle ACB$ 的关于直线 l 的“反称点”为__________；

（2）若点 M 是 $\triangle ACB$ 的关于直线 l 的“反称点”，恰好使得 $\triangle ACN$ 是等腰三角形，求 AM 的长；

（3）存在直线 l 及点 M，使得点 M 是 $\triangle ACB$ 的关于直线 l 的“反称点”，直接写出线段 CP 的取值范围.

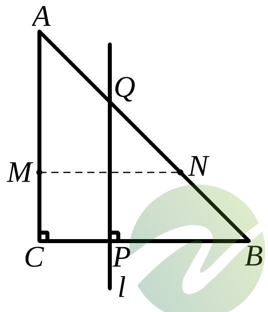


图1

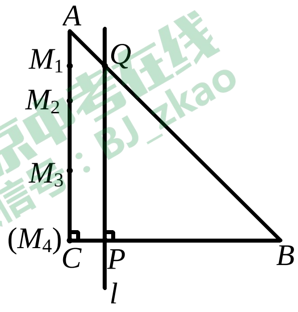
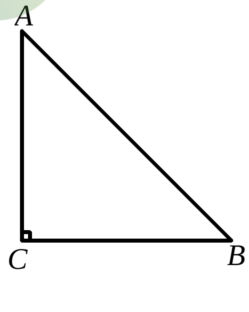


图2



备用图

2022 北京石景山初二（上）期末数学

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	A	D	B	A

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．$x\geqslant 3$　　10．①③　　11．答案不唯一，如：3

12．答案不唯一，如：$DA=EC$；有两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等

13．7　　14．3　　15．=　　16．$2\sqrt{2}$；$\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17．解：原式$=3\sqrt{3}-2+\left(\sqrt{3}-1\right)+3$ ………………………… 4 分

$=4\sqrt{3}$． ………………………… 5 分

18．解：原式$=2-2\sqrt{6}+3-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ ………………………… 4 分

$=5-2\sqrt{3}$． ………………………… 5 分

19．证明：∵ $\angle ACB=90^\circ$，$CE\perp CD$（已知），

∴ $\angle 1+\angle 3=90^\circ$，$\angle 2+\angle 3=90^\circ$（互余定义）．

∴ $\angle 1=\angle 2$（同角的余角相等）． ………2 分

在△ADC 和△BEC 中，

$$\begin{cases} CA=CB\ (\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2\ (\text{已证}), \\ CD=CE\ (\text{已知}), \end{cases}$$

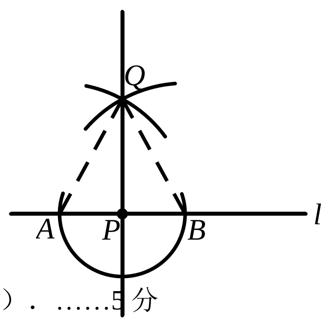
∴ △ADC ≌ △BEC（SAS）． ………………………4 分∴ $AD=BE$（全等三角形的对应边相等）． …………………………5 分

20．解：原式$=\dfrac{2x-3-x+1}{x-2}$ ………3 分

$=\dfrac{x-2}{x-2}$ ………4 分

$=1$． ………5 分

21．（1）补全的图形如图所示． ………3 分



（2）QB；

等腰三角形底边上的高与底边的中线互相重合

（或：到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上）． ……5 分

22．解：原式$=\dfrac{2x-6+10}{x-3}\times\dfrac{x-3}{x^2-4}$ ……………………………2 分

$=\dfrac{2(x+2)}{x-3}\times\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{2}{x-2}$． ……………………………4 分

$\because x=2-\sqrt{2}$，

$\therefore$ 原式$=\dfrac{2}{(2-\sqrt{2})-2}$

$=-\sqrt{2}$． ……………………………5 分

23．解：方程两边都乘以最简公分母 $x(x+2)$，得

$(x-1)(x+2)+3x=x(x+2)$． ……………………………2 分

解这个方程，得

$x=1$． ……………………………4 分

检验：当 $x=1$ 时，最简公分母 $x(x+2)\neq 0$．

$\therefore$ 原方程的解是 $x=1$． ……………………………6 分

24．解：（1）在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^\circ$（已知），

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$（勾股定理）． ………………2 分

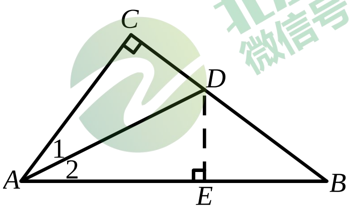
（2）过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，如图．

$\therefore \angle DEA=90^\circ=\angle C$（垂直定义）．

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$（已知），

$\therefore \angle 1=\angle 2$（角平分线定义）．

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，



$\begin{cases}\angle DEA=\angle C\ (\text{已证}),\\ \angle 2=\angle 1\ (\text{已证}),\\ AD=AD\ (\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore \triangle AED\cong\triangle ACD$（AAS）． ……………………………4 分

$\therefore AE=AC=6$，$DE=DC$（全等三角形的对应边相等）．

$\therefore BE=AB-AE=4$．

设 $CD=x$，则 $DE=x$，$DB=8-x$．

在 Rt$\triangle DEB$ 中，$\angle DEB=90^\circ$，

由勾股定理，得 $(8-x)^2=x^2+4^2$． ……………………………5 分

解得 $x=3$．

即 $CD=3$． ……………………………6 分

25．解：设引进新设备前工程队每天改造道路 x 米．根据题意，得…………1 分

$\frac{210}{x}+\frac{750-210}{(1+20\%)x}=22$． ……………………………3 分

解得 $x=30$． ……………………………4 分

经检验，$x=30$ 是所列方程的解，并且符合实际问题的意义．…………5 分

答：引进新设备前工程队每天改造道路 30 米．……………………………6 分

26．（1）$5\sqrt{\frac{5}{26}}$． ……………………………1 分

（2）$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$（$n$ 为正整数）． ……………………………2 分

（3）证明：左边 $=\sqrt{\frac{n\left(n^2+1\right)-n}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n\left(n^2+1-1\right)}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n\times n^2}{n^2+1}}$． ……………………3 分

∵ n 为正整数，

∴左边 $=|n|\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$．

又∵右边 $=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$，

∴左边=右边．

即 $\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$． ……………………………4 分

（4）①20；②57． ……………………………6 分

27．（1）补全图形如图 1；……………………………1 分

$AD=2\sqrt{3}$． ……………………………2 分

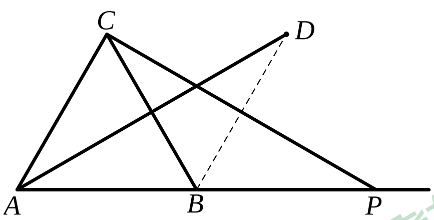


图 1

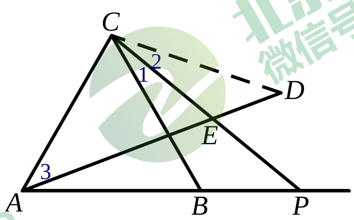


图 2

（2）①解：连接 CD，如图 2．

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $CA=CB$，$\angle ACB=60^\circ$．

∵点 D 与点 B 关于直线 PC 对称，

∴ $\angle 2=\angle 1=\alpha$，$CD=CB$．

∴ $CD=CA$．

在等腰 $\triangle CAD$ 中，$\angle ACD=2\alpha+60^\circ$，

∴ $\angle D=\angle 3=\frac{180^\circ-\left(2\alpha+60^\circ\right)}{2}=60^\circ-\alpha$．

$\therefore \angle AEC=\angle D+\angle 2=\left(60^\circ-\alpha\right)+\alpha=60^\circ$． ....4 分

②证明：在 AD 上截取 $AF=DE$，连接 CF，如图 3.

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 3=\angle D, \\ AF=DE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle DCE$（SAS）．

$\therefore CF=CE$．

又$\because \angle 4=60^\circ$，

$\therefore \triangle CFE$ 是等边三角形.

$\therefore FE=CE$．

$\because AE=FE+AF$，

$\therefore AE=CE+DE$． ....7 分

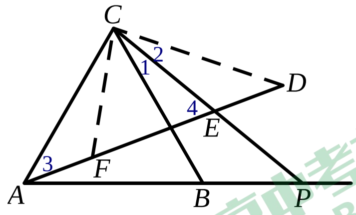


图 3

28．解：（1）M_2，M_4． ....2 分

（2）$\because$ Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB=6$，

$\therefore \angle A=\angle B=45^\circ$．

$\because$点 N 与点 M 关于直线 l 对称，直线 $l\perp CB$，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore MN\perp l$，$MN\perp AC$．

若 $\triangle ACN$ 是等腰三角形，

①若 AC 为底边，如图 1，$\triangle ACN$ 是等腰直角三角形.

$\therefore AM=3$．

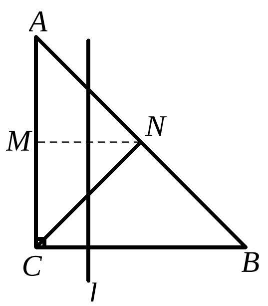


图 1

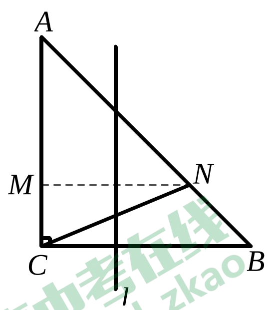


图 2

②若 AC 为腰且 $\angle A$ 为顶角，如图 2，则 $AN=AC=6$．

在 Rt$\triangle AMN$ 中，$\angle AMN=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，

$\therefore AM=3\sqrt{2}$．

③若 AC 为腰且 $\angle ACN$ 为顶角，则点 N 与点 B 重合，点 M 与点 C 重合.

$\therefore AM=6$．

综上所述，AM 的长为 3 或 $3\sqrt{2}$ 或 6． ....5 分

（3）$0<CP\leqslant 3$． ....7 分