

# 北京交大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

## 高二数学

命题人：贺善菊

审题人：杨冰心

2023.10

说明：本试卷共 6 页，共 150 分，考试时长 120 分钟。

一、选择题（每道小题的四个选项中只有一个答案正确。每道小题 4 分，本大题一共 40 分。）

1. 若书架上放的工具书、故事书、图画书分别是 5 本、3 本、2 本，则随机抽出一本是故事书的概率为（ ）

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{3}{10}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{1}{2}$

2. 在空间直角坐标系中，点  $P(1, 2, -3)$  关于坐标平面  $xOy$  的对称点为（ ）

- A.  $(-1, -2, 3)$                       B.  $(-1, -2, -3)$   
C.  $(-1, 2, -3)$                       D.  $(1, 2, 3)$

3. 若  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，则  $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) =$ （ ）

- A.  $-\frac{3}{5}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D.  $-\frac{4}{5}$

4. 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中，若  $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = 1$ ， $AA_1 = 2$ ，则异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值等于（ ）

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 设  $m, n$  是两条不同的直线， $\alpha, \beta$  是两个不同的平面，且  $m \subset \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则“ $m \perp n$ ”是“ $n \perp \beta$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

6. 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  为  $A_1D_1$  的中点，则点  $C_1$  到直线  $CE$  的距离为（ ）

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 某停车场的停车收费标准如下表所示：

停车收费标准		小型车	大型车
白天 (7:00~19:00)	首小时内	2.5元/15分钟	5元/15分钟
	首小时后	3.75元/15分钟	7.5元/15分钟
夜间[19:00(不含)~次日7:00]		1元/2小时	2元/2小时
注:白天停车收费以15分钟为1个计时单位,夜间停车收费以2小时为1个计时单位,满1个计时单位后方可收取停车费,不足1个计时单位的不收取费用			

李明驾驶家用小轿车于 17:30 进入该停车场,并于当天 21:10 驶出该停车场,则李明应缴纳的停车费为

( )

- A. 13.5 元                      B. 27.5 元                      C. 20 元                      D. 18.5 元

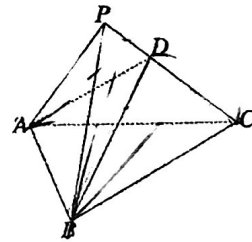
8. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题:在下雨时,用一个圆台形的天池盆接雨水,天池盆盆口直径为二尺八寸,盆底直径为一尺二寸,盆深一尺八寸,若盆中积水深九寸,则平地降雨量是(注:

①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积;②一尺等于十寸)( )

- A. 6 寸                      B. 4 寸                      C. 3 寸                      D. 2 寸

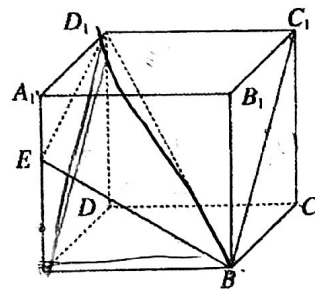
9. 如图,棱长均相等的三棱锥  $P-ABC$  中,点  $D$  是棱  $PC$  上的动点(不含端点),设  $CD=x$ ,锐二面角  $A-BD-C$  的大小为  $\theta$ .当  $x$  增大时,( )

- A.  $\theta$  减小                      B.  $\theta$  增大  
C.  $\theta$  先减小后增大                      D.  $\theta$  先增大后减小



10. 如图,在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, $E$  是棱  $AA_1$  上的一个动点,给出下列四个结论:

- ①三棱锥  $B_1-BED_1$  的体积为定值;  
②存在点  $E$  使得  $B_1D \perp$  平面  $BED_1$ ;  
③  $D_1E + BE$  的最小值为  $\sqrt{2} + 1$ ;  
④对每一个点  $E$ ,在棱  $DC$  上总存在一点  $P$ ,使得  $AP \parallel$  平面  $BED_1$ ;  
⑤  $M$  是线段  $BC_1$  上的一个动点,过点  $A_1$  的截面  $\alpha$  垂直于  $DM$ ,则截面  $\alpha$  的



面积的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

其中正确结论的个数是 ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

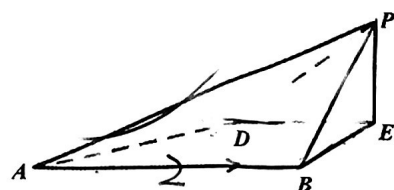
二、填空题（每一道小题 5 分，本题一共 25 分）

11. 已知向量  $a = (-2, 2, -2)$ ,  $b = (-1, 6, -8)$ ,  $c = (\lambda, 0, -6)$ , 若  $a \perp c$ , 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ ; 若  $a, b, c$  共面, 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 在边长为 2 的正方形  $ABCD$  中,  $E$  是  $AD$  的中点, 则  $(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE}) \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

13. 设动点  $P$  在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  上(含内部), 且  $\overrightarrow{D_1P} = \lambda \overrightarrow{D_1B}$ , 当  $\angle APC$  为锐角时, 写出实数  $\lambda$  的一个可能的取值  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

14. 如图, 在四棱锥  $P-ABED$  中,  $DE \parallel AB$ ,  $BE \perp DE$ ,  $AB = 2DE = 2PE = 2$ ,  $BE = \sqrt{3}$ ,  $PE \perp$  平面  $ABED$ , 则异面直线  $PB$  与  $AD$  之间的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;



15. 定义空间中点到几何图形的距离为: 这一点到这个几何图形上各点距离中的最短距离.

(1) 在空间中到定点  $O$  距离为 1 的点围成的几何体的表面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

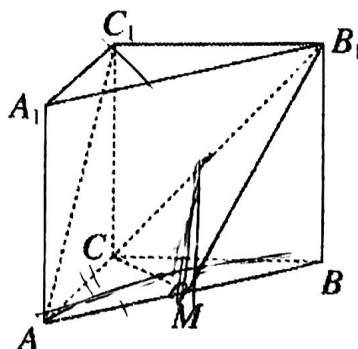
(2) 在空间中, 定义边长为 2 的正方形  $ABCD$  区域(包括边界以及内部的点)为  $\Omega$ , 则到  $\Omega$  距离等于 1 的点所围成的几何体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题

16. (12 分) 如图, 已知直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AC = BC$ ,  $M$  为  $AB$  的中点.

(I) 求证:  $CM \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ;

(II) 求证:  $AC_1 \parallel$  平面  $CMB_1$ .



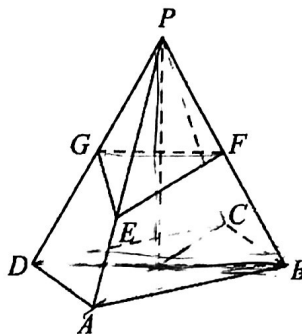
17. (14分) 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的菱形,  $AC \cap BD = O$ , 且  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PO = 2$ ,  $F, G$  分别是  $PB, PD$  的中点,  $E$  是  $PA$  上一点, 且  $AP = 3AE$ .

(1) 求证:  $GF \perp PC$ ;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线  $PA$  与平面  $EFG$  所成角的正弦值.

条件①:  $BD = 2\sqrt{3}$ ; 条件②:  $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$ .

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答记分.



18. (14分) 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + 4$ .

(I) 若  $f(1) = 0$ , 解不等式  $f(x) \leq 0$ ;

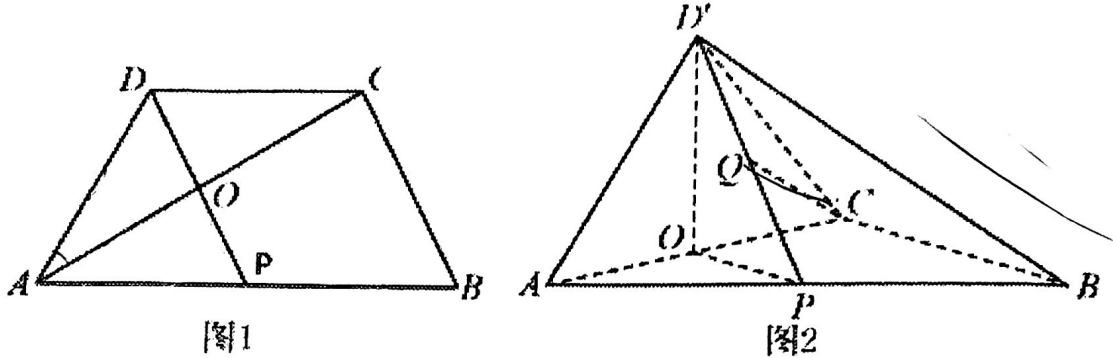
(II) 若  $f(1) = 2$ , 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值与最小值, 并分别写出取得最大值与最小值时的  $x$  的值,

(III) 若对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 不等式  $f(x) > 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (15分) 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $AB = 2AD = 2CD = 4$ ,  $P$  为  $AB$  的中点, 线段  $AC$  与  $DP$  交于  $O$  点 (如图 1). 将  $\triangle ACD$  沿  $AC$  折起到  $\triangle ACD'$  位置, 使得平面  $D'AC \perp$  平面  $BAC$  (如图 2).

(1) 求二面角  $A-BD'-C$  的余弦值;

(2) 线段  $PD'$  上是否存在点  $Q$ , 使得  $CQ$  与平面  $BCD'$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ? 若存在, 求出  $\frac{PQ}{PD'}$  的值; 若不存在, 请说明理由.

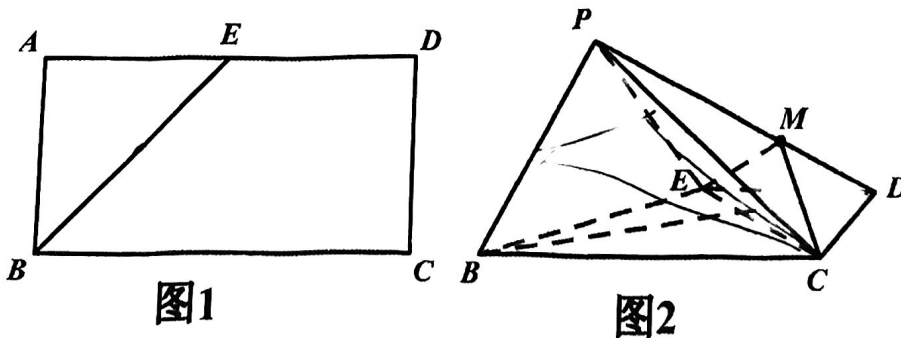


20. (15分) 如图 1, 矩形  $ABCD$ ,  $AB=1$ ,  $BC=2$ , 点  $E$  为  $AD$  的中点, 将  $\triangle ABE$  沿直线  $BE$  折起至平面  $PBE \perp$  平面  $BCDE$  (如图 2), 点  $M$  在线段  $PD$  上,  $PB \parallel$  平面  $CEM$ .

(1) 求证:  $MP=2DM$ ;

(2) 求点  $B$  到面  $PEC$  的距离;

(3) 若在棱  $PB$ ,  $PE$  分别取中点  $F$ ,  $G$ , 试判断点  $M$  与平面  $CFG$  的关系, 并说明理由.



21. (15分) 给定正整数  $n \geq 2$ , 设集合  $M = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$ . 对于集合  $M$  中的任意元素  $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和  $\gamma = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 记  $\beta \cdot \gamma = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ . 设  $A \subseteq M$ , 且集合  $A = \{\alpha_i \mid \alpha_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}), i = 1, 2, \dots, n\}$ , 对于  $A$  中任意元素  $\alpha_i, \alpha_j$ , 若  $\alpha_i \cdot \alpha_j = \begin{cases} p, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$  则称  $A$  具有性质  $T(n, p)$ .

(I) 判断集合  $A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  是否具有性质  $T(3, 2)$ , 说明理由;

(II) 判断是否存在具有性质  $T(4, p)$  的集合  $A$ , 并加以证明.