陈经纶中学中学初三第一学期 12 月月考初三综合测试　　2020.12

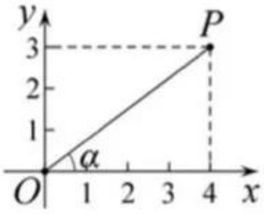
班级____________　　姓名

一、选择题 （本题共 20 分，每小题 2 分）

1．抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 的顶点坐标为（　　）

A．$(1,3)$　　B．$(-1,3)$　　C．$(-1,-3)$　　D．$(3,1)$

2．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(4,3)$，OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α，则 $\tan\alpha$ 的值为（　　）

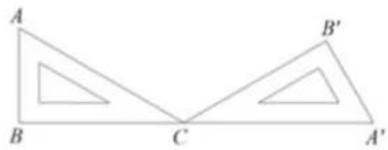


A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

3．方程 $x^2-x+3=0$ 的根的情况是（　　）

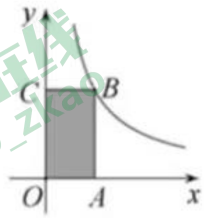
A．有两个不相等的实数根 B．有两个相等的实数根 C．无实数根 D．只有一个实数根

4．如图，一块含 30°角的直角三角板 ABC 绕点 C 顺时针旋转到△$A'B'C$，当 B，C，A' 在一条直线上时，三角板 ABC 的旋转角度为（　　）



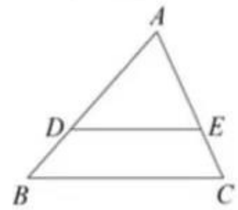
A．150°　　B．120°　　C．60°　　D．30°

5．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，B 是反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上的一点，则矩形 $OABC$ 的面积为（　　）



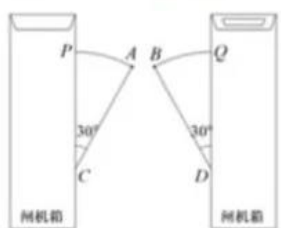
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．如图，在△ABC 中，$DE\parallel BC$，且 DE 分别交 AB，AC 于点 D，E，若 $AD:AB=2:3$，则△ADE 和△ABC 的**面积**之比等于（　　）



A．2:3　　B．4:9　　C．4:5　　D．$\sqrt{2}:\sqrt{3}$

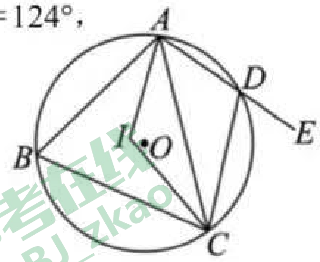
7．图 1 是一个地铁站入口的双翼闸机．如图 2，它的双翼展开时，双翼边缘的端点 A 与 B 之间的距离为 10cm，双翼的边缘 $AC=BD=54$cm，且与闸机侧立面夹角 $\angle PCA=\angle BDQ=$ 30°．当双翼收起时，可以通过闸机的物体的最大宽度为（　　）



A．$(54\sqrt{3}+10)$ cm　　B．$(54\sqrt{2}+10)$ cm

C．64 cm　　D．54cm

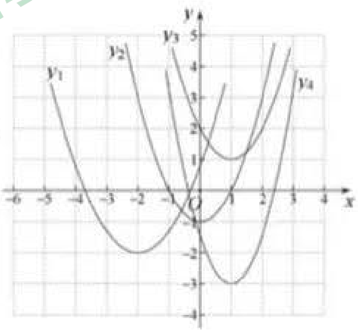
8. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，点 I 是△ABC 的内心，∠AIC=124°，点 E 在 AD 的延长线上，则∠CDE 的度数为(　　)



A．56°　　B．62°　　C．68°　　D．78°

9．在平面直角坐标系 xOy 中，四条抛物线如图所示，其解析式中的二次项系数一定小于 1 的是（　　）

A．y_1　　B．y_2　　C．y_3　　D．y_4



10.袋中装有偶数个球，其中红球、黑球各占一半.甲、乙、丙是三个空盒.每次从袋中任意取出两个球，将其中一个球放入甲盒，如果这个球是红球，就将另一个球放入乙盒，否则就放入丙盒.重复上述过程，直到袋中所有球都被放入盒中，则（　　）

A.乙盒中黑球不多于丙盒中黑球　　B.乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

C.乙盒中红球不多于丙盒中红球　　D.乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

请将选择题的答案填入下列表格：

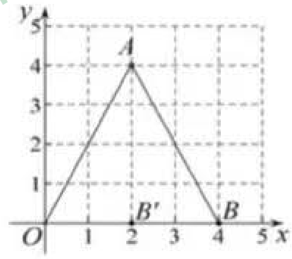
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

11．方程 $x^2-3x=0$ 的根为________.

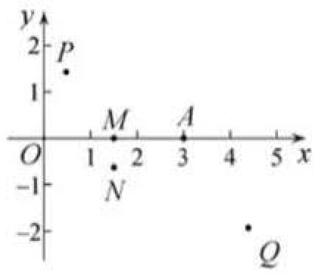
12．半径为 2 且圆心角为 45°的扇形面积为________.

13．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，有两点 $A(2,4)$，$B(4,0)$，以原点 O 为位似中心，把△OAB 缩小得到△$OA'B'$．若 B' 的坐标为 $(2,0)$，则点 A' 的坐标为________.



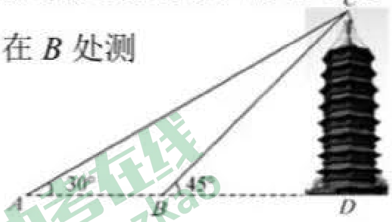
14．已知$(-1,\ y_1)$，$(2,\ y_2)$是反比例函数图象上两个点的坐标，且 $y_1>y_2$，请写出一个符合条件的反比例函数的解析式________.

15．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(3,0)$，判断在 M，N，P，Q 四点中，满足到点 O 和点 A 的距离都小于 2

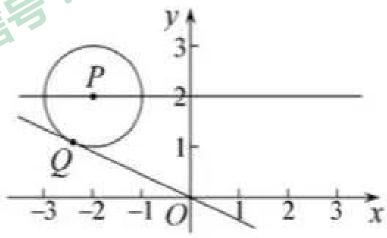


的点是__________.

16. 永定塔是北京园博园的标志性建筑，其外观为辽金风格的八角九层木塔，游客可登至塔顶，俯瞰园博园全貌．如图，在 A 处测得 $\angle CAD=30°$，在 B 处测得 $\angle CBD=45°$，并测得 $AB=52$ 米，那么永定塔的高 CD 约是________米．（$\sqrt{2}\approx1.4$，$\sqrt{3}\approx1.7$，结果保留整数）



17. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，P 是直线 $y=2$ 上的一个动点，$\odot P$ 的半径为 1，直线 OQ 切 $\odot P$ 于点 Q，则线段 OQ 的最小值为__________.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P（x，y），我们把点 P（－y+1，x+1）叫做点 P 的伴随点．已知点 A_1 的伴随点为 A_2，点 A_2 的伴随点为 A_3，点 A_3 的伴随点为 A_4，…，这样依次得到点 A_1，A_2，A_3，…，A_n，…．若点 A_1 的坐标为（3，1），则点 A_3 的坐标为__________，点 A_{2014} 的坐标为__________；若点 A_1 的坐标为（a，b），对于任意的正整数 n，点 A_n 均在 x 轴上方，则 a，b 应满足的条件为______________________________.

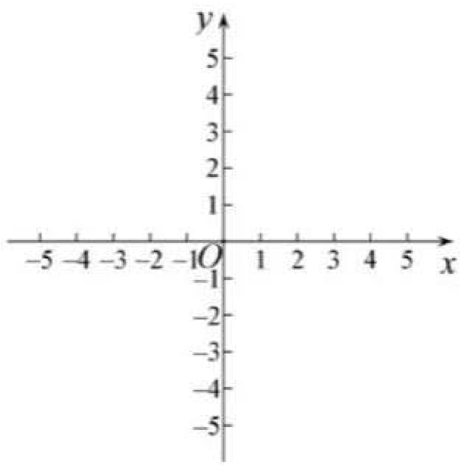
三、解答题（本题共 64 分）

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 的一个交点是 $A(2,a)$．

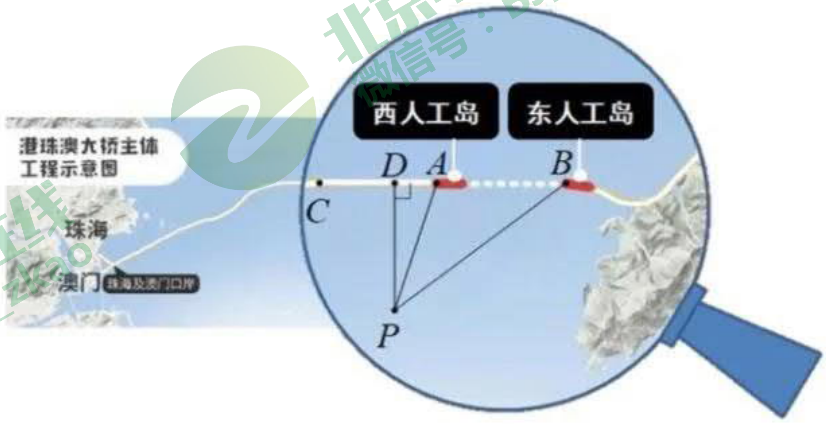
（1）求 k 的值；

（2）设点 $P(m,\ n)$ 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上不同于 A 的一点，直线 PA 与 x 轴交于点 $B(b,0)$．

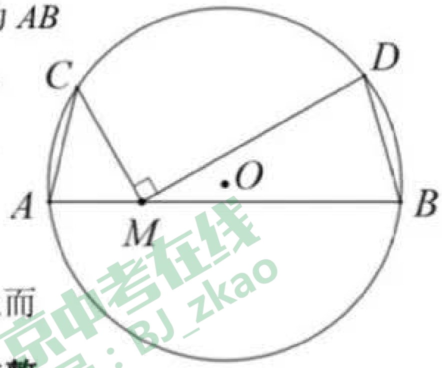
①若 $m=1$，求 b 的值；②若 $PB=2AB$，结合图象，直接写出 b 的值．



20．2018 年 10 月 23 日，港珠澳大桥正式开通，成为横亘在伶仃洋上的一道靓丽的风景．大桥主体工程隧道的东、西两端各设置了一个海中人工岛，来衔接桥梁和海底隧道，西人工岛上的 A 点和东人工岛上的 B 点间的距离约为 5.6 千米，点 C 是与西人工岛相连的大桥上的一点，A，B，C 在一条直线上．如图，一艘观光船沿与大桥 AC 段垂直的方向航行，到达 P 点时观测两个人工岛，分别测得 PA, PB 与观光船航向 PD 的夹角 $\angle DPA=18°$，$\angle DPB=53°$，求此时观光船到大桥 AC 段的距离 PD 的长．参考数据：$\sin 18° \approx 0.31$，$\cos 18° \approx 0.95$，$\tan 18° \approx 0.33$，$\sin 53° \approx 0.80$，$\cos 53° \approx 0.60$，$\tan 53° \approx 1.33$．



21．如图，A，B，C 为⊙O 上的定点．连接 AB，AC，M 为 AB 上的一个动点，连接 CM，将射线 MC 绕点 M 顺时针旋转 90° 交⊙O 于点 D，连接 BD．若 AB=6cm，AC=2cm，记 A，M 两点间距离为 x cm，B，D 两点间的距离为 y cm．

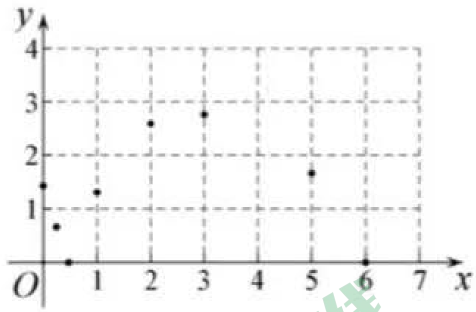


小东根据学习函数的经验，对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究．**下面是小东探究的过程，请补充完整：**

（1）通过取点、画图、测量，得到了 x 与 y 的几组值，如下表：

x/cm	0	0.25	0.47	1	2	3	4	5	6
y/cm	1.43	0.66	0	1.31	2.59	2.76		1.66	0

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，描出补全后的表中各对对应值为坐标的点，画出该函数的图象；



（3）结合画出的函数图象，解决问题：当 BD=AC 时，AM 的长度约为_________cm．

22.阅读下列材料，并完成相应任务.

托勒密定理：

托勒密(Ptolemy)(公元 90 年~公元 168 年)，希腊著名天文学家，他的著作《天文学大成》被后人称为"伟大的数学书"，托勒密有时把它叫做《数学文集》，托勒密从书中摘出并加以完善，得到了著名的托勒密(Ptolemy)定理.

托勒密定理：

圆内接四边形中，两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和.

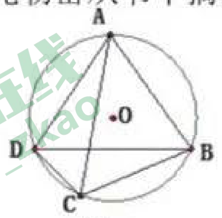


图 1

已知：如图 1，四边形 ABCD 内接于⊙O，

求证：$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

下面是该结论的证明过程：

证明：如图 2，作 $\angle BAE=\angle CAD$，交 BD 于点 E.

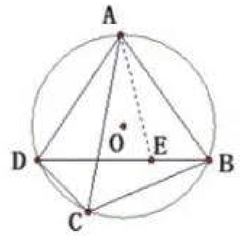


图 2

$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$，$\therefore \angle ABE=\angle ACD$，

$\therefore \Delta ABE \backsim \Delta ACD$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$，　$\therefore AB\cdot CD=AC\cdot BE$；

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，$\therefore \angle ACB=\angle ADE$ (依据 1)，

$\because \angle BAE=\angle CAD$，$\therefore \angle BAC=\angle EAD$，

$\therefore \Delta ABC \backsim \Delta AED$ (依据 2)，$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CB}$，　$\therefore AD\cdot BC=AC\cdot ED$；

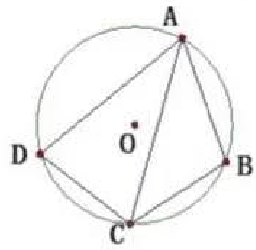
$\therefore AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot(BE+ED)$，即 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

（1）上述证明过程中的"依据 1"是指______________________________；

"依据 2"是指______________________________.

（2）当圆内接四边形 ABCD 是矩形时，托勒密定理就是我们熟知的________定理.

（3）如图 3，四边形 ABCD 内接于⊙O，AB=3，AD=5，$\angle BAD=60°$，点 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，求 AC 的长.

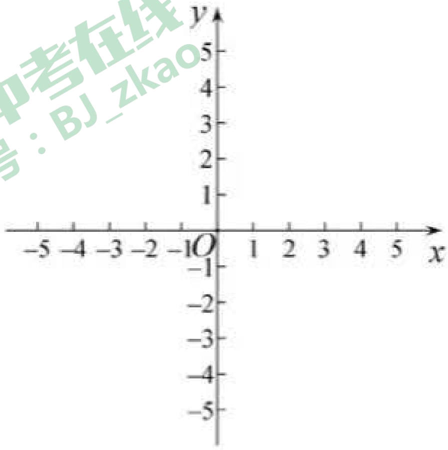


23．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 G：$y=4x^2-8ax+4a^2-4$，$A(-1,0),N(n,0)$．

（1）当 $a=1$ 时，①求抛物线 G 与 x 轴的交点坐标；

②若抛物线 G 与线段 AN 只有一个交点，求 n 的取值范围；

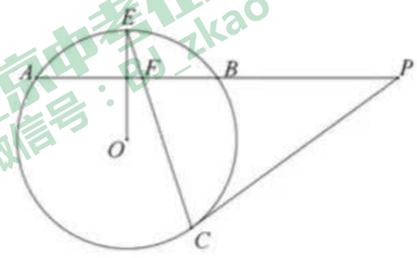
（2）若存在实数 a，使得抛物线 G 与线段 AN 有两个交点，结合图象，直接写出 n 的取值范围．



24. 如图，AB 是⊙O 的弦，半径 $OE\perp AB$， P 为 AB 的延长线上一点，PC 与⊙O 相切于点 C，CE 与 AB 交于点 F.

（1）求证：$PC=PF$；

（2）连接 OB，BC，若 $OB\parallel PC$， $BC=3\sqrt{2}$ ， $\tan P=\dfrac{3}{4}$，求 FB 的长.



25．已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$，直线l经过点A（不经过点B或点C），点C关于直线l的对称点为点D，连接BD，CD.

（1）如图1，① 求证：点B,C,D在以点A为圆心，AB为半径的圆上.

② 直接写出$\angle BDC$的度数（用含α的式子表示）为____________.

（2）如图2，当$\alpha=60°$时，过点D作BD的垂线与直线l交于点E，求证：$AE=BD$；

（3）如图3，当$\alpha=90°$时，记直线l与CD的交点为F，连接BF．将直线l绕点A旋转，当线段BF的长取得最大值时，直接写出$\tan\angle FBC$的值.

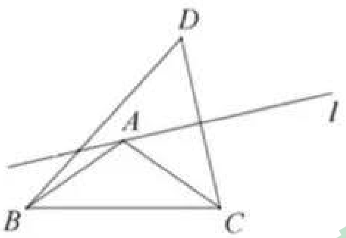


图 1

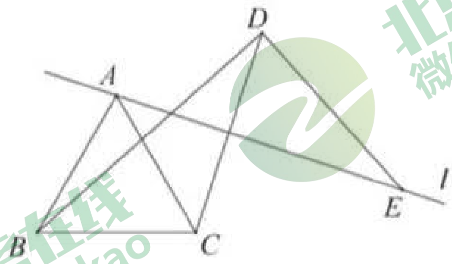


图 2

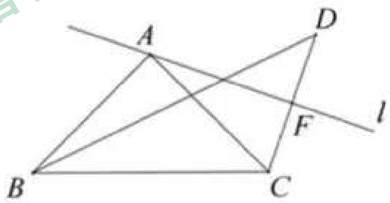


图 3

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,a)$ 和点 $B(b,0)$，给出如下定义：以 AB 为边，按照逆时针方向排列 A，B，C，D 四个顶点，作正方形 $ABCD$，则称正方形 $ABCD$ 为点 A，B 的逆序正方形．例如，当 $a=-4$，$b=3$ 时，点 A，B 的逆序正方形如图 1 所示．

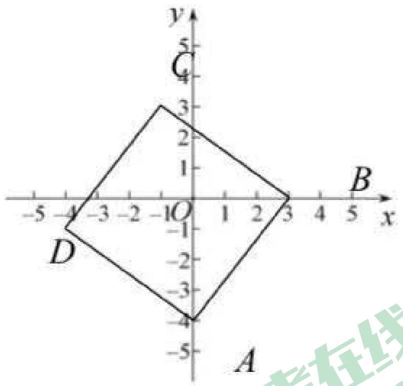


图 1

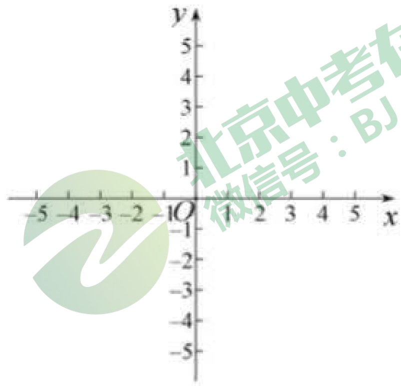


图 2

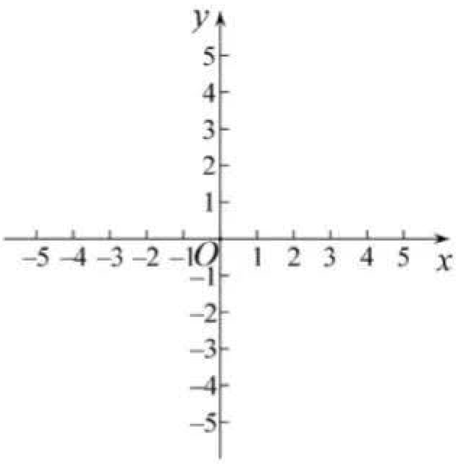
（1）图 1 中点 C 的坐标为______；

（2）改变图 1 中的点 A 的位置，其余条件不变，则点 C 的______坐标不变（填“横”或“纵”），它的值为______；

（3）已知正方形 $ABCD$ 为点 A，B 的逆序正方形．

①判断：结论“点 C 落在 x 轴上，则点 D 落在第一象限内．”______（填“正确”或“错误”），若结论正确，请说明理由；若结论错误，请在图 2 中画出一个反例；

②$\odot T$ 的圆心为 $T(t,0)$，半径为 1．若 $a=4$，$b>0$，且点 C 恰好落在 $\odot T$ 上，直接写出 t 的取值范围．



备用图