海淀区高一年级练习

数　学

2024.01

学校____________ 班级____________ 姓名____________

考生须知	**1.本试卷共6页，共三道大题，26道小题，满分150分，考试时间120分钟。** **2.在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。** **3.答案一律填涂或书写在答题卡上，用黑色字迹签字笔作答。** **4.考试结束，请将本试卷交回。**

一、选择题：共14小题，每小题4分，共56分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项

（1）已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A=\{-2,-1,0\}$， 则 $C_U A=$（　　）

（A） $\{1,2,3\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$(0,2)$　　（D） $(1,2)$

（2）某学校有高中学生1500人，初中学生1000人。学生社团创办文创店，想了解初高中学生对学校吉祥物设计的需求，用分层抽样的方式随机抽取若干人进行问卷调查，已知在初中学生中随机抽取了100人，则在高中学生中抽取了（　　）

（A）150人　　（B）200人　　（C）250人　　（D）300人

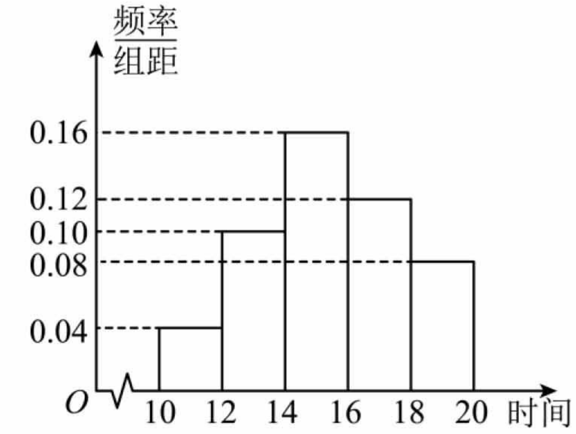
（3）命题“$\exists x\in R, x+2\le 0$”的否定是（　　）

（A）$\exists x\in R, x+2>0$　（B）$\exists x\in R, x+2<0$　（C）$\forall x\in R, x+2>0$　（D）$\forall x\in R, x+2<0$

（4）方程组 $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+x=2 \end{cases}$ 解集是（　　）

（A）$\{(1,-1),(-1,1)\}$　（B）$\{(1,1),(-2,2)\}$　（C）$\{(1,-1),(-2,2)\}$　（D）$\{(2,-2),(-2,2)\}$

（5）某部门调查了 200 名学生每周的课外活动时间（单位：h），制成了如图所示的频率分布直方图，其中课外活动时间的范围是$[10,20]$，并分成$[10,12)$，$[12,14)$，$[14,16)$，$[16,18)$，$[18,20]$五组．根据直方图，判断这 200 名学生中每周的课外活动时间不少于 14h 的人数是（　　）



（A）56　（B）80　（C）144　（D）184

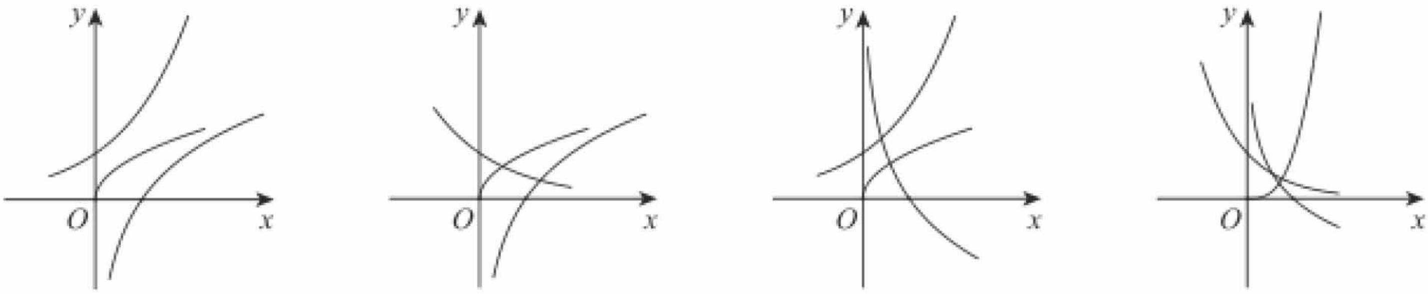
（6）若实数 a,b 满足 $a>b$，则下列不等式成立的是（　　）

（A）$|a|>|b|$　（B）$a+c>b+c$　（C）$a^2>b^2$　（D）$ac^2>bc^2$

（7）函数 $f(x)=2^x+2x$ 的零点所在的区间为（　　）

（A）$(-2,-1)$　（B）$(-1,0)$　（C）$(0,1)$　（D）$(1,2)$

（8）在同一个坐标系中，函数 $f(x)=\log_a x, g(x)=a^{-x}, h(x)=x^a$ 的部分图象可能是（　　）



（A）　（B）　（C）　（D）

（9）下列函数中，既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

（A）$f(x)=\sqrt{x}$　(B) $f(x)=-x|x|$　(C) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　(D) $f(x)=x^3$

（10）已知 $a=2^{0.1}, b=\log_2\sqrt{3}, c=\log_3\sqrt{2}$，则实数 a,b,c 的大小关系是（　　）

（A）$c>a>b$　（B）$c>b>a$　（C）$a>c>b$　（D）$a>b>c$

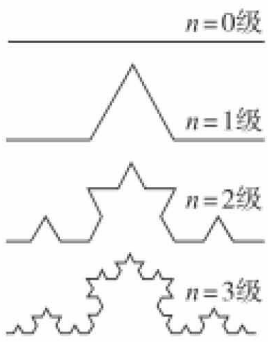
（11）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{a}{2}$，则“$a=1$”是 $f(x)$ 为奇函数的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

（12）已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)+x-2$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为（　　）

（A）$(-\infty,1)$　（B）$(-1,1)$　（C）$(0,1)$　（D）$(1,+\infty)$

（13）科 赫 (Koch)曲线是几何中最简单的分形，科赫曲线的产生方式如下：



如图，将一条线段三等分后，以中间一段为边作正三角形并去掉原线段生成1级科赫曲线“”,将1级科赫曲线上每一线段重复上述步骤得到2级科赫曲线，同理可得3级科赫曲线 ……

在分形中， 一个图形通常由N个与它的上一级图形相似，且相似比为r的部分组成。若 $r^D=\frac{1}{N}$，则称D为该图形的分形维数。那么科赫曲线的分形维数是（　　）

（A）$\log_2 3$　（B） $\log_3 2$　（C） 1　（D） $2\log_3 2$

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+a,x\le a\\ x^2,x>a\end{cases}$，若存在非零实数$x_0$，使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$ 成立，则实数a的取值范围是　（　　）

（A）$(-\infty,0]$　（B） $(-\infty,\frac{1}{4}]$　（C） $[-4,0]$　（D） $[-2,\frac{1}{4}]$

二 填空题：共6小题，每小题5分，共30分

（15）函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是____________

（16）已知幂函数 $f(x)$ 经过点 $(2,8)$，则函数 $f(x)=$____________

（17）农科院作物所为了解某种农作物的幼苗质量，分别从该农作物在甲、乙两个不同环境下培育的幼苗中各随机抽取了15株幼苗进行检测，量出它们的高度如下图(单位： cm)：

甲		乙
5 3 3 2 1	3	7
9 5 4 3	4	3 4 5 5 7 8 8 9
9 8 7 5	5	2 4 4 5 8
5 3	6	0

记该样本中甲、乙两种环境下幼苗高度的中位数分别为a,b， 则$|a-b|=$________

若以样本估计总体，记甲、乙两种环境下幼苗高度的标准差分别为s_1,s_2，则s_1__________s_2

(用“<,>或 =”连 接).

（18）已知函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}-a$ 没有零点，则a的一个取值为________； a的取值范围是__________

（19）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为________；满足 $|f(x)|<4\times10^4$ 的整数解的个数为__________ （**参考数据：**$\lg 2\approx 0.30$）

（20）共享单车已经逐渐成为人们在日常生活中必不可少的交通工具。通过调查发现人们在单车选择时，可以使用“Tullock 竞争函数”进行近似估计，其解析式为 $S(x)=\dfrac{x^a}{x^a+(1-x)^a}, x\in[0,1], a>0$ (其中参数 a 表示市场外部性强度，a 越大表示外部性越强)。给出下列四个结论：

① $S(x)$ 过定点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；

② $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增；

③ $S(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称；

④取定 x，外部性强度 a 越大， $S(x)$ 越小。

其中所有正确结论的序号是___________

三 解答题：共64分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（21）（**本小题12分**）

化简求值:

（I） $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{0.5}+\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+(0.1)^{-2}-3\pi^0$　　　（II） $5\log_3 2-\log_3\dfrac{32}{9}+5^{\log_5 3}$

（22）（**本小题 12 分**）

已知一元二次方程 $2x^2+3x-2=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2.

求值：（I） $x_1^2+x_2^2$；　（II） $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 。

（23）（**本小题9分**）

国务院正式公布的《第一批全国重点文物保护单位名单》中把重点文物保护单位(下述简称为“第一批文保单位”) 分为六大类。其中“A：革命遗址及革命纪念建筑物”、“B：石窟寺”、“C：古建筑及历史纪念建筑物”、“D：石刻及其他”、“E：古遗址”、“F:古墓葬”，北京的 18 个“第一批文保单位”所在区分布如下表:

行政区	门类	个数
东城区	A：革命遗址及革命纪念建筑物	3
	C：古建筑及历史纪念建筑物	5
西城区	C：古建筑及历史纪念建筑物	2
丰台区	A：革命遗址及革命纪念建筑物	1
海淀区	C：古建筑及历史纪念建筑物	2
房山区	C：古建筑及历史纪念建筑物	1
	E：古遗址	1
昌平区	C：古建筑及历史纪念建筑物	1
	F：古墓葬	1
延庆区	C：古建筑及历史纪念建筑物	1

（I）某个研学小组随机选择北京市“第一批文保单位”中的一个进行参观，求选中的参观单位恰好为“C:古建筑及历史纪念建筑物”的概率；

（II）小王同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“A：革命遗址及革命纪念建筑物”中的一个进行参观；小张同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“C：古建筑及历史纪念建筑物”中的一个进行参观。两人选择参观单位互不影响，求两人选择的参观单位恰好在同一个区的概率；

（III）现在拟从北京市“第一批文保单位”中的“C：古建筑及历史纪念建筑物”中随机抽取2个单位进行常规检查，记抽到海淀区的概率为 P_1，抽不到海淀区的概率记为 P_2，试判断 P_1 和 P_2 的大小(**直接写出结论**)。

（24）（**本小题9分**）

已知集合 $A=\{x|x^2-x-2<0\}, B=\left\{x\left|\left|x-\frac{5}{2}\right|\geq\frac{3}{2}\right.\right\}$

（I）求 $A\cup B, A\cap C_R B$；

（II）记关于 x 的不等式 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\leq 0$ 的解集为 M，若 $B\cup M=R$，求实数 m 的取值范围。

（25）（**本小题11分**）

已知函数 $f(x)=\ln(1-x)+k\ln(1+x)$，请从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，解答下面的问题：

条件①：$f(x)+f(-x)=0$

条件②：$f(x)-f(-x)=0$

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答记分.

（I）求实数 k 的值；

（II）设函数 $F(x)=(1-x)(1+x)^k$，判断函数 $F(x)$ 在区间上 $(0,1)$ 的单调性，并给出证明；

（III）设函数 $g(x)=f(x)+x^k+2|k|$，指出函数 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上的零点的个数，并说明理由。

（26）（**本小题11分**）

已知函数 $f(x), g(x), h(x)$ 的定义域均为 R，给出下面两个定义：

①若存在唯一的 $x\in R$，使得 $f(g(x))=h(f(x))$，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 唯一交换；

②若对任意的 $x\in R$，均有 $f(g(x))=h(f(x))$，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换。

（I）请判断函数 $g(x)=x+1$ 与 $h(x)=x-1$ 关于 $f(x)=x^2$ 是唯一交换还是任意交换，并说明理由；

（II）设 $f(x)=a(x^2+2)(a\neq 0), g(x)=x^2+bx-1$，若存在函数 $h(x)$，使得 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换，求 b 的值；

（III）在（II）的条件下，若 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于 $\omega(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 唯一交换，求 a 的值。

海淀区 2023-2024 学年第一学期期末练习

高一数学

参考答案及评分建议

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	C	B	D	C	B	D	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$(1,+\infty)$

（12）3，　　$>$

（13）0（答案不唯一），$(-4,4)$

（14）$(-\infty,+\infty)$，215

（15）①②

两空题，第一空 2 分，第二空 2 分，

15 题对一个给 2 分，有错的则给 0 分

三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

（16）（共 9 分）

解：（Ⅰ）设选中的参观单位恰好为“C：古建筑及历史纪念建筑物”为事件 A.……1 分

所以 $P(A)=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$.　　……3 分

（Ⅱ）设两人选择的参观单位恰好在同一个区为事件 B，　　……4 分

所以 $P(B)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{16}$.　　……7 分

（Ⅲ）$P_1<P_2$.　　……9 分

（17）（共 9 分）

解：（Ⅰ）因为 $x^2-x-2<0$，

所以 $(x-2)(x+1)<0$，

所以 $-1<x<2$，

所以 $A=\{x\,|\,-1<x<2\}$.　　……1 分

又 $|x-\dfrac{5}{2}|\geq\dfrac{3}{2}$，所以 $x-\dfrac{5}{2}\geq\dfrac{3}{2}$ 或 $x-\dfrac{5}{2}\leq-\dfrac{3}{2}$，　　……2 分

所以 $x \geq 4$ 或 $x \leq 1$，

所以 $B=\{x \mid x \geq 4 或 x \leq 1\}$，　　　　……3 分

$\complement_{\mathbf{R}} B=\{x \mid 1<x<4\}$　　　　……4 分

所以 $A \cup B=\{x \mid x \geq 4 或 x<2\}$，$A \cap \complement_{\mathbf{R}} B=\{x \mid 1<x<2\}$.　　　　……6 分

（Ⅱ）因为 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m \leq 0$，

所以 $(x-(m+4))(x-m) \leq 0$，

所以 $m \leq x \leq m+4$，

所以 $M=\{x \mid m \leq x \leq m+4\}$.　　　　……7 分

因为 $B \cup M=\mathbf{R}$，所以 $\begin{cases} m \leq 1 \\ m+4 \geq 4 \end{cases}$　　　　……8 分

所以 m 的取值范围是 $\{m \mid 0 \leq m \leq 1\}$.　　　　……9 分

（18）（共 11 分）

解：选择①

（Ⅰ）因为 $f(x)+f(-x)=0$，

故 $[\ln(1-x)+k\ln(1+x)]+[\ln(1+x)+k\ln(1-x)]=0$，

所以 $\ln(1-x^2)+k\ln(1-x^2)=0$，所以 $(k+1)\ln(1-x^2)=0$，

所以 $k=-1$.　　　　……3 分

（Ⅱ）当 $k=-1$ 时，$F(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，　　　　……4 分

证明如下：

任取 $x_1, x_2 \in (0,1)$，且 $x_1<x_2$，　　　　……5 分

因为 $F(x_1)-F(x_2)=(-1+\dfrac{2}{1+x_1})-(-1+\dfrac{2}{1+x_2})$　　　　……6 分

$=\dfrac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$　　　　……7 分

所以 $F(x_1)>F(x_2)$，所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.　　　　……8 分

（Ⅲ）$g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上存在一个零点.　　　　……9 分

由前两问知，$k=-1$ 时，函数 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(-1,0)$ 上单调递减，

故函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}+2$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，

又 $g(-\frac{1}{2})=\ln 3-2+2=\ln 3>0$， $g(-\frac{1}{4})=\ln\frac{5}{3}-2<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(-1,0)$，使 $g(x_0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 上存在一个零点. ……11 分

选择②

（Ⅰ）因为 $f(x)=f(-x)$，且 $-1<x<1$，

故 $\ln(1-x)+k\ln(1+x)=[\ln(1+x)+k\ln(1-x)]$

所以 $(k-1)\ln\frac{1-x}{1+x}=0$,

所以 $k=1$. ……3 分

（Ⅱ）当 $k=1$时， $F(x)=(1-x)(1+x)=1-x^2$.

从而 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， ……4 分

证明如下：

任取 $x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$， ……5 分

$F(x_1)-F(x_2)=(1-{x_1}^2)-(1-{x_2}^2)$ ……6 分

$={x_2}^2-{x_1}^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$ ……7 分

所以 $F(x_1)>F(x_2)$，所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. ……8 分

（Ⅲ）$g(x)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 上存在一个零点. ……9 分

由前两问知， $k=1$，函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $(-1,0)$ 上单调递增，

故函数 $g(x)=f(x)+x+2$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

又 $g(0)=f(0)+2=2>0$，

$g(-\sqrt{1-\frac{1}{e^2}})=\ln(1-(-\sqrt{1-\frac{1}{e^2}})^2)-\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}+2=-\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(-1,0)$，使 $g(x_0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 上存在一个零点. ……11 分

（19）（共 11 分）

解：（Ⅰ）$g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 唯一交换，不是任意交换的 ……2 分

令 $f\left(g(x)\right)=h\left(f(x)\right)$，即 $(x+1)^2=x^2-1$，解得 $x=-1$.

所以存在唯一的 $x=-1\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(g(x)\right)=h\left(f(x)\right)$，

即 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 唯一交换，

存在 $x=0\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(g(x)\right)\neq h\left(f(x)\right)$，

即 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 不是任意交换的. ……4 分

（Ⅱ）依题意，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(g(x)\right)=h\left(f(x)\right)$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=a[(-x)^2+2]=a(x^2+2)=f(x)$，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(g(-x)\right)=h\left(f(-x)\right)=h\left(f(x)\right)=f\left(g(x)\right)$.

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$a[(x^2-bx-1)^2+2]=a[(x^2+bx-1)^2+2]$，

所以 $(x^2-bx-1)^2=(x^2+bx-1)^2$，

即 $(2x^2-2)(2bx)=0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

所以 $b=0$. ……7 分

下面检验 $b=0$ 时，存在函数 $h(x)$ 使得 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换.

即验证存在函数 $h(x)$，使得 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(g(x)\right)=h\left(f(x)\right)$，

即 $a[(x^2-1)^2+2]=h\left(a(x^2+2)\right)$.

令 $t=a(x^2+2)$，$\dfrac{t}{a}\geq 2$，

则 $a[(x^2-1)^2+2]=a[(\dfrac{t}{a}-2-1)^2+2]=\dfrac{t^2-6at+11a^2}{a}$.

令 $h(x)=\dfrac{x^2-6ax+11a^2}{a}$，

则 $h\left(a(x^2+2)\right)=h(t)=\dfrac{t^2-6at+11a^2}{a}=a[(x^2-1)^2+2]$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

综上，$b=0$. ……8 分

（Ⅲ）依题意，存在唯一的 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $w\left(g(x_0)\right)=f\left(w(x_0)\right)$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=g(x)$，

$$w(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=\frac{1-\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}=-w(x),$$

所以 $w\left(g(-x_0)\right)=w\left(g(x_0)\right)=f\left(w(x_0)\right)=f\left(-w(x_0)\right)=f\left(w(-x_0)\right)$.

所以 $-x_0=x_0$，即 $x_0=0$.

所以 $w(g(0))=f(w(0))$，即 $\dfrac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1}=2a$.

所以 $a=-\dfrac{e-1}{2e+2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……9 分

下面检验 $a=-\dfrac{e-1}{2e+2}$ 时，$w(g(x))=f(w(x))$ 的解唯一.

因为 $w(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$，$g(x)=x^2-1\geq -1$，$e^{g(x)}\geq e^{-1}>0$，$\dfrac{1}{e^{g(x)}+1}\leq\dfrac{1}{e^{-1}+1}$，

所以 $w(g(x))=1-\dfrac{2}{e^{g(x)}+1}\geq 1-\dfrac{2}{e^{-1}+1}=\dfrac{1-e}{1+e}$，

当且仅当 $g(x)=-1$，即 $x=0$ 时取等号.

又 $f(w(x))=a[(\dfrac{e^x-1}{e^x+1})^2+2]\leq 2a=\dfrac{1-e}{1+e}$，

当且仅当 $e^x-1=0$，即 $x=0$ 时取等号.

所以 $w(g(x))\geq f(w(x))$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

所以 $w(g(x))=f(w(x))$ 的解唯一.

综上，$a=-\dfrac{e-1}{2e+2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……11 分