

2023-2024 学年度第一学期期中练习

年级：高一 科目：数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ ， $B = \{x \mid |x - 3| > 1\}$ ，则 $A \cup (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$ B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$

2. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的函数，且 “ $\forall x > 0, f(x) > 0$ ” 为假命题，则下列命题为真命题的是 ()

- A. $\forall x > 0, f(x) \leq 0$ B. $\exists x \leq 0, f(x) > 0$
C. $\exists x > 0, f(x) \leq 0$ D. $\forall x \leq 0, f(x) \leq 0$

3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(2x-1) = \frac{1}{x}$ ，则 $f(3) =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

4. 已知 a, b 都是实数，那么 “ $a < b < 0$ ” 是 “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. “ $|4x - 5| < 3$ ” 是 “ $\frac{2x}{x-1} < 1$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) = -2x^2 + x$ ，则 $f(2) =$ ()

- A. -6 B. 6 C. -10 D. 10

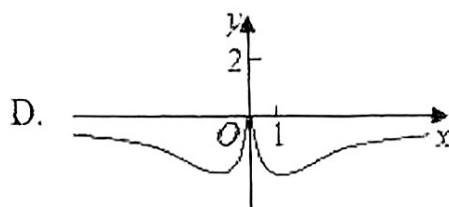
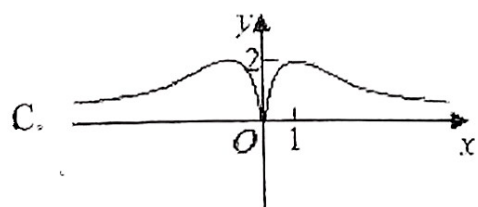
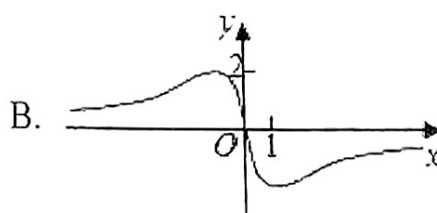
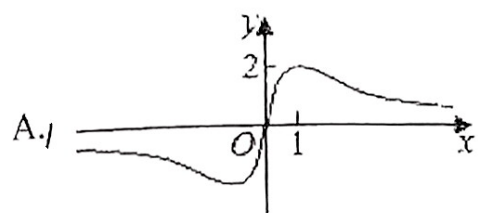
7. 要制作一个容积为 $4m^3$ ，高为 $1m$ 的无盖长方体容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是()

- A. 80 元 B. 120 元 C. 160 元 D. 240 元

8. 已知函数 $y = -x^2 - 2x + 3$ 在区间 $[a, 2]$ 上的最大值为 $\frac{15}{4}$ ，则 a 等于()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

9. 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为()



10. 我们把定义域为 $[0, +\infty)$ 且同时满足以下两个条件的函数 $f(x)$ 称为“ Ω 函数”：

① 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ ，总有 $f(x) \geq 0$ ；② 若 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ，则有 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 成立，

给出下列四个结论：

(1) 若 $f(x)$ 为“ Ω 函数”，则 $f(0) = 0$ ；

(2) 若 $f(x)$ 为“ Ω 函数”，则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数；

(3) 函数 $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \\ 1, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ ，在 $[0, +\infty)$ 上是“ Ω 函数” (\mathbf{Q} 为有理数集)；

(4) 函数 $g(x) = x^2 + x$ 在 $[0, +\infty)$ 上是“ Ω 函数”。

其中正确结论的个数是()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为_____.

12. 函数 $y = 2x + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值等于_____.

13. 已知函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$ ，若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上具有单调性，则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax+a, & x \geq 1 \\ -ax^2+2ax-a+3, & x < 1 \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} ，则实数 a 的取值范围是_____.

15. 定义在区间 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线， $f(x)$ 在区间 $[2k-1, 2k]$ 上单调递增，在区间 $[2k, 2k+1]$ 上单调递减， $k = 1, 2, \dots$. 给出下列四个结论：

- ①若 $f(2k)$ 的值随 k 增大而增大，则 $f(x)$ 存在最大值；
- ②若 $f(2k+1)$ 的值随 k 增大而增大，则 $f(x)$ 存在最小值；
- ③若 $f(2k)f(2k+1) > 0$ ，且 $f(2k) + f(2k+1)$ 存在最小值，则 $|f(x)|$ 存在最小值；
- ④若 $f(2k)f(2k+1) < 0$ ，且 $f(2k) - f(2k+1)$ 存在最大值，则 $|f(x)|$ 存在最大值.

其中所有**错误**结论的序号有_____.

三、解答题 共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

已知集合 $A = \{x | 3-a \leq x \leq 2+a\}$ ， $B = \{x | x^2 - 8x + 7 \geq 0\}$ ，全集 $U = \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 3$ 时，求 $A \cap (\complement B)$ ；

(II) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$ ，求实数 a 的取值范围.

17. (本小题 14 分)

自 2020 新冠疫情爆发以来,直播电商迅猛发展,以信息流为代表的各大社交平台也相继入场,平台用短视频和直播的形式,激发起用户情感与场景的共鸣,然后引起消费行动.某厂家往年不与直播平台合作时,每年都举行多次大型线下促销活动.为响应当地政府防疫政策,决定采用线上(直播促销)线下同时进行的促销模式,与某直播平台达成一个为期 4 年的合作协议,直播费用(单位:万元)只与 4 年的总直播时长 x (单位:小时)成正比,比例系数为 0.12. 已知与直播平台合作后该厂家每年

1. 所需的线下促销费 C (单位:万元)与总直播时长 x (单位:小时)之间的关系为

$$C = \frac{k}{x+50} (x \geq 0, k \text{ 为常数}).$$

经测算,只进行线下促销活动(即没有直播)时 4 年总

促销费用为 24 万元.记该厂家线上促销费用与 4 年线下促销费用之和为 y (单位:万元).

(I) 写出 y 关于 x 的函数关系式;

(II) 该厂家直播时长 x 为多少时,可使 y 最小? 并求出 y 的最小值.

18. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = mx^2 - (m-2)x + m - 2$.

(I) 若不等式 $f(x) < 1$ 的解集为 \mathbf{R} , 求 m 的取值范围;

(II) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq mx$;

19. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$.

- (I) 确定函数 $f(x)$ 的解析式;
- (II) 用定义证明 $f(x)$ 在上 $(-1,1)$ 是增函数;
- (III) 解关于 x 的不等式 $f(x-1) + f(x) < 0$.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$.

- (I) 若 $f(x)$ 的定义域和值域均是 $[1, a]$, 求实数 a 的值;
- (II) 若 $a \leq 1$, 求函数 $y = |f(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值.

21. (本小题 15 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 是非空数集. 记 $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$,

$f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$.

- (I) 若 $P = [0, 3]$, $M = (-\infty, -1)$, 求 $f(P) \cup f(M)$;
- (II) 若 $P \cap M = \emptyset$, 且 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数, 求集合 P, M ;
- (III) 判断命题 “若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$ ” 的真假, 并加以证明.