2023—2024 学年度第一学期

北京育才学校高一数学

期中考试试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x|-3<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(0,1)$　　B．$\{0,1\}$　　C．$(0,2)$　　D．$\{0,1,2\}$

2．命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3>0$”的否定为（　　）

A．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3\le 0$　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3>0$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3\le 0$　　D．$\exists x\notin\mathbf{R}$，$x^2-x+3\le 0$

3．下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

A．$y=-x^2$　　B．$y=\sqrt{x}$　　C．$y=\dfrac{1}{x}$　　D．$y=x^3$

4．如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　　）

A．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B．$a^2<b^2$　　C．$\dfrac{a}{b}<1$　　D．$ab>b^2$

5．已知 $x>0$，则 $x-4+\dfrac{4}{x}$ 的最小值为（　　）

A．-2　　B．0　　C．1　　D．$2\sqrt{2}$

6．定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=0$，且在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　C．$(-2,2)$　　D．$(0,2)$

7．已知函数 $f(x)=(x+1)^2-\dfrac{6}{x}$，则下列区间中含有 $f(x)$ 的零点的是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

8．已知函数 $f(x)=x^2-2ax$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．某部影片的盈利额（即影片的票房收入与固定成本之差）记为y，观影人数记为x，其函数图像如图(1)所示．由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图(2)、图（3）中的实线分别为调整后y与x的函数图像．

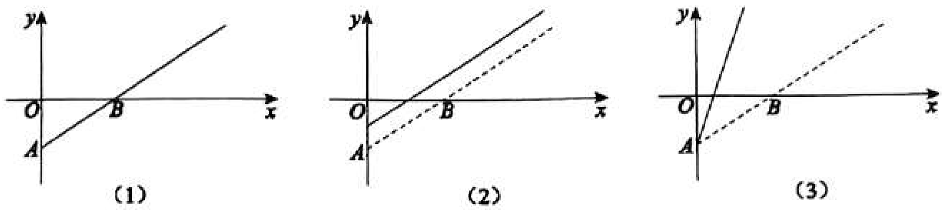
给出下列四种说法：

① 图（2）对应的方案是：提高票价，并提高成本；

② 图（2）对应的方案是：保持票价不变，并降低成本；

③ 图（3）对应的方案是：提高票价，并保持成本不变；

④ 图（3）对应的方案是：提高票价，并降低 成本．



其中，正确的说法是（　　）

A．①③　　　B．①④　　　C．②③　　　D．②④

10．已知方程组$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$的解集为$A=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，且$|x_1-x_2|=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$，则$k=$（　　）

A．1或-1　　　B．$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$　　　C．$\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{1}{2}$　　　D．2或-2

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．函数$f(x)=\sqrt{x-1}$的定义域是____________．

12．已知$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=2x-1$，则$f(-2)=$________．

13．已知函数$f(x)$同时满足以下条件：

①定义域为$\mathbf{R}$；②值域为$[1,+\infty)$；③$\forall x\in R$，都有$f(x)=f(-x)$．

试写出一个函数解析式$f(x)=$____________________．

14．已知函数$f(x)=\begin{cases} |x-1|, & x>0 \\ x^2+2x, & x\le 0 \end{cases}$，那么$f(f(-3))=$_________；当方程$f(x)=a$有且仅有3个不同的根时，实数$a$的取值范围是__________．

15. 设函数$f(x)$的定义域为D，若$f(x)$满足："$\forall x_1 \in D$,都存在$x_2 \in D$，使得

$f(x_1)+f(x_2)=0$" 则称函数$f(x)$具有性质τ，给出下列四个结论：

①函数$f(x)=x$具有性质τ；

②所有奇函数都具有性质τ；

③若函数$f(x)$和函数$g(x)$都具有性质τ，则函数$f(x)+g(x)$也具有性质τ；

④若函数$f(x)=x^2+a, x\in[-2,1]$具有性质τ，则$a=-2$.

其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题（本大题共6小题，共85分）

16.（本小题满分14分）已知集合$U=R$，$A=\{x \mid x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x \mid x-4a\le 0\}$.

（Ⅰ）求A，$\complement_U A$

（Ⅱ）当$a=0$时，$A\cup B$；

（Ⅲ）若$A\cup B=\mathbf{R}$，求实数a的取值范围.

17.（本小题满分14分）求下列关于x的不等式或不等式组的解集.

（1）$\dfrac{x-1}{x+2}<0$　　（2）$\begin{cases}|2x-1|<5\\ x-1\ge 0\end{cases}$　　（3）$x^2-3ax+2a^2\le 0$　（$a\in R$）

18.（本小题满分14分）已知函数$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

（Ⅰ）判断函数$f(x)$的奇偶性，并证明你的结论；

（Ⅱ）定义证明函数$f(x)$在$(0,2)$上是增函数；

（Ⅲ）写出函数$f(x)$在$(-2,0)$上的单调性（结论不要求证明）.

19.（本小题满分 15 分）函数 $f(x)=x^2-2ax+1$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $a=1$，求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $x\in[-2,3]$ 上的值域；

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 有两个正数零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

(1)求 a 的取值范围；(2)求 $4x_1+x_2$ 的最小值以及取到最小值时 a 的值.

20.（本小题满分 14 分）小华在某市场独家经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1吨该产品获利润500元，未售出的产品，每1吨亏损300元. 小华为下一个销售季度购进了130吨该农产品. 以 x（单位：吨，$100\le x\le 150$）表示下一个销售季度内，该市场该农产品需求量. y（单位：元）表示下一个销售季度内小华销售该农产品的利润.

(Ⅰ)分别求当 $x=120$ 时，y 的值；当 $x=140$ 时，y 的值；

(Ⅱ)将 y 表示为 x 的函数；

(Ⅲ)求出下一个销售季度利润 y 不少于57000元时，市场需求量 x 的范围.

21.（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，若 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则称 $f(x)$ 为“一阶比增函数”.

(Ⅰ) 若 $f(x)=ax^2+ax$ 是“一阶比增函数”，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 是“一阶比增函数”，求证：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$；

(Ⅲ)若 $f(x)$ 是“一阶比增函数”，且 $f(x)$ 有零点，求证：$f(x)>2023$ 有解.

2023-2024 学年度第一学期北京育才学校高一数学

期中试卷参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	D	B	C	B	A	C	B

二、填空题

11. $[1,+\infty)$　　12. -3　　13. $f(x)=x^2+1$ 或 $f(x)=|x|+1$（答案不唯一）

14. 2；　$[0,1)$（前 2 后 3）　　15.①②④（1 个答案 2 分；2 个 3 分；3 个 5 分）

三、解答题:

16. 证明:

解:（Ⅰ）由 $x^2-2x-3>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>3$.

所以 $A=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.　　…………3 分

$\complement_U A=[-1,3]$　　…………5 分

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，$B=(-\infty,0]$.　　…………6 分

所以 $A\cup B=(-\infty,0]\cup(3,+\infty)$.　　…………9 分

（Ⅲ）由题意知 $B=(-\infty,4a]$.　　…………10 分

因为 $A\cup B=\mathbf{R}$,

所以 $4a\geq 3$.　　…………13 分

所以 $a\geq\dfrac{3}{4}$.

所以实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{3}{4},+\infty)$.　　…………14 分

17. 解：（1）等价于$(x-1)(x+2)<0$，所以解集为$(-2,1)$ ………4 分

（2）$|2x-1|<5 \Rightarrow -5<2x-1<5$

所以$-2<x<3$ ………5 分

$x-1\geq 0$ 解得 $x\geq 1$ ………6 分

所以解集为$[1,3)$ ………8 分

（3）$(x-a)(x-2a)\leq 0$

当 $a<0$ 时，解集为$[2a,a]$ ………10 分

当 $a=0$ 时，解集为$\{0\}$ ………12 分

当 $a>0$ 时，解集为$[a,2a]$ ………14 分

18. 解：（Ⅰ）因为函数的定义域为$\mathbf{R}$，所以$x\in\mathbf{R}$时，$-x\in\mathbf{R}$. ………2 分

又因为 $f(-x)=\dfrac{-x}{x^2+4}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数. ………5 分

（Ⅱ）任取 $x_1,x_2\in(0,2)$，且 $x_1<x_2$，则 ………6 分

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+4}-\dfrac{x_2}{x_2^2+4}$ ………7 分

$=\dfrac{x_1(x_2^2+4)-x_2(x_1^2+4)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$ ………8 分

$=\dfrac{x_1x_2^2+4x_1-x_2x_1^2-4x_2}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}=\dfrac{(x_1x_2-4)(x_2-x_1)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$. ………10 分

因为$0<x_1<x_2<2$，所以$x_2-x_1>0$， $x_1x_2-4<0$，

又 $x_1^2+4>0, x_2^2+4>0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

根据函数单调性定义， $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在$(0,2)$上是增函数. ………11 分

（Ⅲ） $f(x)$ 在$(-2,0)$上是增函数. ………14 分

19. 解: （Ⅰ）当 $a=1$， $f(x)=x^2-2x+1$，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上单减，在 $[1,3]$ 上单增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$ ………2 分

又 $f(-2)=9>f(3)=4$ ，所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=9$ ………4 分

所以值域为 $[0,9]$ ………5 分

（Ⅱ）（1）依题意 $x^2-2ax+1=0$ 有两个不同的正根，所以

$$\begin{cases}\triangle>0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$$ ………7 分

即 $$\begin{cases}4a^2-4>0\\ 2a>0\\ 1>0\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}a<-1\text{或}a>1\\ a>0\end{cases}$$ ………9 分

所以 $a>1$ ，所以 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$ ………10 分

（2）由（1）得 $x_1x_2=1$ ， ………11 分

且 $x_1>0,x_2>0$，由均值不等式得

$4x_1+x_2\geq 2\sqrt{4x_1x_2}=4$，所以 $4x_1+x_2$ 的最小值为 4， ………13 分

当 $4x_1=x_2$，即 $x_1=\frac{1}{2},x_2=2$ 时， $a=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{4}$ ………15 分

20．解：（Ⅰ）当 $x=120$ 时， $y=500\times120-300\times10=57000$ ………2 分

当 $x=140$ 时， $y=500\times130=65000$ ………4 分

（Ⅱ)由题意得，当 $x\in[100,130]$ 时，

$y=500x-300(130-x)=800x-39000$ ………6 分

当 $x\in(130,150]$ 时， $y=500\times130=65000$ ………8 分

$\therefore\ y=\begin{cases}800x-39000, x\in[100,130]\\65000, x\in(130,150]\end{cases}$ ………9 分

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，当 $x\in(130,150]$ 时，利润 y 为 65000 元，不少于 57000 元，

所以 $130<x\le150$ 符合题意 ………11 分

当 $x\in[100,130]$ 时，由 $800x-39000\ge57000$，

解得 $x\geqslant120$．所以 $120\le x\le130$ ………13 分

所以，市场需求量 x 的范围为[120，150]． ………14 分

21．解：(Ⅰ)由题意 $y=\frac{f(x)}{x}=\frac{ax^2+ax}{x}=ax+a$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数,　　………2 分

由一次函数性质知　$a>0$，

所以 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$　　………4 分

(Ⅱ)因为 $f(x)$ 是"一阶比增函数",即 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

又 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,有 $x_1<x_1+x_2$, $x_2<x_1+x_2$

所以 $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，$\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$　　………6 分

所以 $f(x_1)<\frac{x_1 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$, $f(x_2)<\frac{x_2 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$　　………8 分

所以 $f(x_1)+f(x_2)<\frac{x_1 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+\frac{x_2 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$　　………9 分

所以 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$　　………10 分

(Ⅲ)设 $f(x_0)=0$,其中 $x_0>0$.

因为 $f(x)$ 是"一阶比增函数",所以当 $x>x_0$ 时, $\frac{f(x)}{x}>\frac{f(x_0)}{x_0}=0$

取 $t\in(0,+\infty)$,满足 $f(t)>0$,记 $\frac{f(t)}{t}=k$

因为当 $x>t$ 时, $\frac{f(x)}{x}>\frac{f(t)}{t}=k$,所以 $f(x)>kx$ 对 $x>t$ 成立

只要　$x>\frac{2023}{k}$,则有 $f(x)>kx>2023$,

所以 $f(x)>2023$　一定有解　　………14 分