2022 北京丰台高一（上）期末

数　学

2022. 01

考生须知	1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。 2. 本次练习所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。 3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在练习卷、草稿纸上答题无效。 4. 本练习卷满分共 150 分，作答时长 120 分钟。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$，那么 $f(-1)=$

（A）-2　　（B）-1　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）2

（2）已知集合 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,4\}$，那么集合 A 可能是

（A）$\{1,2,3\}$　　（B）$\{0,1,4\}$　　（C）$\{0,1,3\}$　　（D）$\{1,3,4\}$

（3）已知 $a,b,c\in \mathrm{R}$，$a>b$，那么下列结论成立的是

（A）$a^2>b^2$　　（B）$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（C）$ac>bc$　　（D）$a-c>b-c$

（4）下列函数中，图象关于坐标原点对称的是

（A）$y=\sqrt{x}$　　（B）$y=x^3$　　（C）$y=|x|$　　（D）$y=2^x$

（5）下列函数中，最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的是

（A）$y=\cos x$　　（B）$y=\tan x$　　（C）$y=\cos 2x$　　（D）$y=\tan 2x$

（6）已知 $a>0$，那么 $2+3a+\dfrac{4}{a}$ 的最小值是

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$4\sqrt{3}$　　（C）$2+2\sqrt{3}$　　（D）$2+4\sqrt{3}$

（7）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+a, x\leqslant 0,\\ x^2, x>0,\end{cases}$ 那么“$a=0$”是“函数 $f(x)$ 是增函数”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

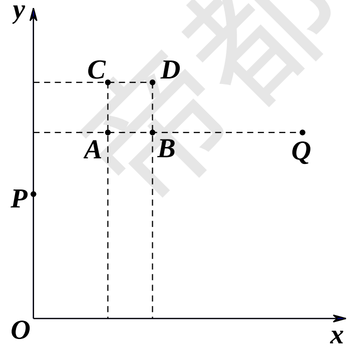
（8）尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学研究表明，地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$．已知两次地

震的能量与里氏震级分别为 E_i 与 $M_i(i=1,2)$，若 $M_2-M_1=2$，则 $\dfrac{E_2}{E_1}=$

（A）10^3　　　　（B）3　　　　（C）$\lg 3$　　　　（D）10^{-3}

（9）在特定条件下，篮球赛中进攻球员投球后，篮球的运行轨迹是开口向下的抛物线的一部分．“盖帽”是一种常见的防守手段，防守队员在篮球上升阶段将球拦截即为“盖帽”，而防守队员在篮球下降阶段将球拦截则属“违规”．对于某次投篮而言，如果忽略其他因素的影响，篮球处于上升阶段的水平距离越长，则被“盖帽”的可能性越大．

收集几次篮球比赛的数据之后，某球员投篮可以简化为下述数学模型：如图所示，该球员的投篮出手点为 P，篮框中心点为 Q，他可以选择让篮球在运行途中经过 A,B,C,D 四个点中的某一点并命中 Q，忽略其他因素的影响，那么被“盖帽”的可能性最大的线路是



（A）$P\to A\to Q$　　　　（B）$P\to B\to Q$

（C）$P\to C\to Q$　　　　（D）$P\to D\to Q$

（10）将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象．若 $x=0$ 是函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的一个零点，则 φ 的最小值是

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　　　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

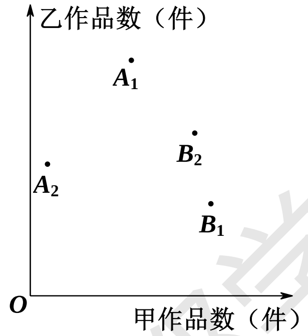
（11）已知幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $(2,8)$，那么 $\alpha=$___________.

（12）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 x 轴的非负半轴为始边，它们的终边关于坐标原点对称．若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，则 $\sin\beta=$___________.

（13）已知命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$e^x\geq a$”是真命题，那么实数 a 的取值范围是___________.

（14）函数 $f(x)=\cos^2 x-2\cos x+1$ 的最小值是__.

（15）中国剪纸是一种用剪刀或刻刀在纸上剪刻花纹，用于装点生活或配合其他民俗活动的民间艺术．现有两名剪纸艺人创作甲、乙两种作品，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名艺人上午创作的甲作品数和乙作品数，点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名艺人下午创作的甲作品数和乙作品数，$i=1,2$．给出下列四个结论：



①该天上午第 1 名艺人创作的甲作品数比乙作品数少；

②该天下午第 1 名艺人创作的乙作品数比第 2 名艺人创作的乙作品数少；

③该天第 1 名艺人创作的作品总数比第 2 名艺人创作的作品总数少；

④该天第 2 名艺人创作的作品总数比第 1 名艺人创作的作品总数少．

其中所有正确结论的序号是__________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知不等式 $x^2+ax+b<0$（$a,b\in\mathrm{R}$）的解集 $A=\{x|-1<x<2\}$．

（I）求实数 a,b 的值；

（II）若集合 $B=\{x\,|\,x<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$．

（17）（本小题 14 分）

已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 α 是第二象限角．

（I）求 $\sin\alpha$ 的值；

（II）求 $\dfrac{\sin(\alpha+6\pi)\cos(-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\tan(\alpha-\pi)}$ 的值．

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)$．

（I）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（II）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；

（III）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性，并用定义证明．

（19）（本小题 14 分）

一种专门占据内存的计算机病毒，能在短时间内感染大量文件，使每个文件都不同程度地加长，造成磁盘空间的严重浪费．这种病毒开机时占据内存 2KB，每 3 分钟后病毒所占内存是原来的 2 倍．记 x 分钟后的病毒所占内存为 y KB .

（I）求 y 关于 x 的函数解析式；

（II）如果病毒占据内存不超过 1GB($1\text{GB}=2^{10}\text{MB}$，$1\text{MB}=2^{10}\text{KB}$)时，计算机能够正常使用，求本次开机计算机能正常使用的时长.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$， $x\in\text{R}$.

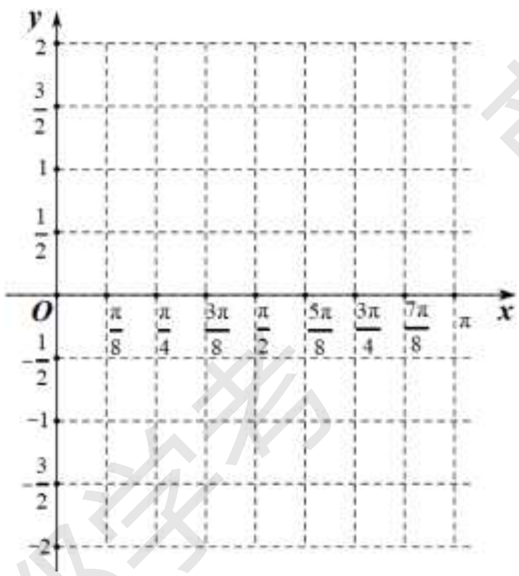
（I）在用“五点法”作函数 $f(x)$ 的图象时，列表如下：

$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0		0

在答题卡相应位置完成上述表格，并在坐标系中画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（III）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上的值域.



（21）（本小题 15 分）

已知 n 为正整数，集合 $M_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}$，对于 M_n 中任意两个元素 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义：

$\alpha-\beta=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$；

$d(\alpha,\beta)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$.

（I）当 $n=3$ 时，设 $\alpha=(0,1,0),\beta=(1,0,0)$，写出 $\alpha-\beta$，并计算 $d(\alpha,\beta)$；

（II）若集合 S 满足 $S\subseteq M_3$，且 $\forall\alpha,\beta\in S$，$d(\alpha,\beta)=2$，求集合 S 中元素个数的最大值，写出此时的集合 S，并证明你的结论；

（III）若 $\alpha,\beta\in M_n$，且 $d(\alpha,\beta)=2$，任取 $\gamma\in M_n$，求 $d(\alpha-\gamma,\beta-\gamma)$ 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2022 北京丰台高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	D	B	D	D	A	A	B	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．3　　12．$-\frac{1}{4}$　　13．$a\leqslant 0$　　14．0

15．①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题共 13 分）

解：（I）因为不等式的解集为 $A=\{x|-1<x<2\}$，

所以 $x_1=-1$，$x_2=2$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根…………2 分

则有 $\begin{cases}1-a+b=0,\\4+2a+b=0,\end{cases}$…………4 分

解得 $a=-1$，$b=-2$…………6 分

（II）因为 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x\,|\,x<0\}$，

所以 $A\cap B=\{x|-1<x<0\}$…………8 分

$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\geq 0\}$，…………10 分

$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>-1\}$…………13 分

17．（本小题共 14 分）

解：（I）因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$…………4 分

因为 α 是第二象限角，

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$…………6 分

（II）$\dfrac{\sin(\alpha+6\pi)\cos(-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\tan(\alpha-\pi)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\tan\alpha}=\cos\alpha=-\frac{3}{5}$…………14 分

18．（本小题共 14 分）

解：（I）根据题意，有 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 得 $-1<x<1$．

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ ………….3 分

（II）函数 $f(x)$ 为偶函数………….4 分

证明：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$，关于原点对称，

因为 $f(-x)=\lg(1-x)+\lg(1+x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数………….8 分

（III）函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减………….9 分

证明：$\forall x_1$，$x_2\in(0,1)$，且$x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=\left[\lg(1+x_1)+\lg(1-x_1)\right]-\left[\lg(1+x_2)+\lg(1-x_2)\right]$$

$$=\lg\frac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)},$$

因为 $0<x_1<x_2<1$,

所以 $\dfrac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)}>1$.

所以 $\lg\dfrac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减………….14 分

19．（本小题共 14 分）

解：（I）根据题意，得 $y=2^{\frac{x}{3}+1}\ (x\in\mathbf{R}^+)$ ………….6 分

（II）因为病毒占据内存不超过1GB时，计算机能够正常使用，

故有 $2^{\frac{x}{3}+1}\le 2^{20}$，解得 $x\le 57$.

所以本次开机计算机能正常使用的时长为 57 分钟………….14 分

20．（本小题共 15 分）

解：（I）

$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

函数图象略………….5 分

（II）证明：令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $-\dfrac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间：$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$…………10 分

（III）因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{4})\in[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)_{\min}=-2$；

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)_{\max}=\sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $\left[-2,\sqrt{2}\right]$…………15 分

21．（本小题共 15 分）

解：（I）$\alpha-\beta=(1,1,0)$，$d(\alpha,\beta)=2$.…………4 分

（II）最大值是 4.

此时 $S=\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ 或 $S=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.

若还有第 5 个元素，则必有 $(1,0,0),(0,1,1)$ 和 $(0,0,1),(1,1,0)$ 和 $(0,1,0),(1,0,1)$ 和 $(1,1,1),(0,0,0)$ 之一出现，其对应的 $d(\alpha,\beta)=3$，不符合题意…………10 分

（III）证明：设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，

所以 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}$，$|a_i-b_i|\in\{0,1\},(i=1,2,3,\cdots,n)$，

从而 $\alpha-\beta=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in M_n$，

又 $d(\alpha-\gamma,\beta-\gamma)=\big||a_1-c_1|-|b_1-c_1|\big|+\big||a_2-c_2|-|b_2-c_2|\big|+\cdots+\big||a_n-c_n|-|b_n-c_n|\big|$，

当 $c_i=0$ 时，$\big||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\big|=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，$\big||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\big|=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$.

所以 $d(\alpha-\gamma,\alpha-\beta)=d(\alpha,\beta)$，

所以 $d(\alpha-\gamma,\alpha-\beta)=2$…………15 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）