一、选择题：每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\},B=\{0,1,2\}$ ，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$\{0\}$　　（B）$\{0,1\}$　　（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知命题 $p:\forall x<-1,x^2>1$，则 $\neg p$ 是（　　）

（A）$\exists x<-1,x^2\le 1$　　（B）$\forall x\ge -1,x^2>1$

（C）$\forall x<-1,x^2>1$ ．　　（D）$\exists x\le -1,x^2\le 1$.

（3） 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

（A）$y=-x^2$　　（B）$y=x^{\frac{1}{2}}$　　（C）$y=\log_{0.5}x$　　（D）$y=x^{-1}$

（4）若 $a>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

（A）$a^2>b^2$　　（B）$2^a>2^b$　　（C）$a^{\frac{1}{2}}>b^{\frac{1}{2}}$　　（D）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

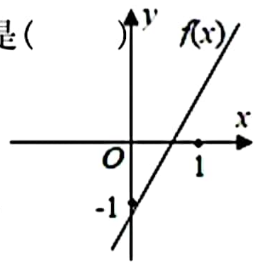
（5）已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$\frac{a}{b}>1$”的（　　）

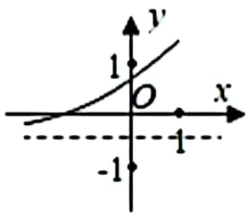
（A）充分而不必要条件（B）必要而不充分条件（C）充分必要条件（D）既不充分也不必要条件

（6）已知 $a>2$，则 $a+\frac{4}{a-2}$ 的取值范围是（　　）

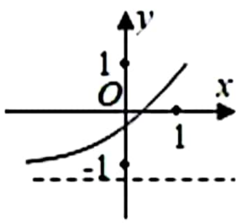
（A）$(-\infty,2)$　　（B）$[2,+\infty)$　　（C）$[4,+\infty)$　　（D）$[6,+\infty)$

（7）已知函数 $f(x)=ax+b$ 的图象如图所示，则函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能是（　　）

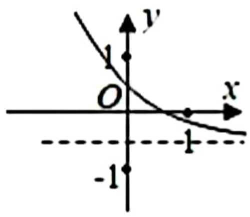




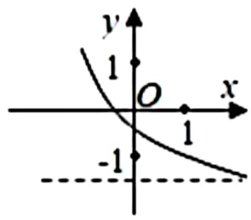
（A）



（B）



（C）



（D）

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\le 0\\ \frac{1}{x}-1, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x)=0$ 的 x 的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（9）区块链作为一种革新的技术，已经被应用于许多领域，包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等. 在区块链技术中，若密码的长度设定为 256 比特，则密码一共有 2^{256} 种可能，因

此，为了破解密码，最坏情况需要进行 2^{256} 次哈希运算. 现在有一台机器，每秒能进行 2.5×10^{11} 次哈希运算，假设机器一直正常运转，那么在最坏情况下，这台机器破译密码所需时间大约为（　　）

（参考数据 $\lg 2\approx 0.3010, \lg 3\approx 0.477$）

（A）4.5×10^{73} 秒　　（B）4.5×10^{65} 秒　　（C）4.5×10^{7} 秒　　（D）28 秒

（10）已知正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 满足当 $i<j$（$i, j\in \mathbf{N}^*$）时，$x_i<x_j$，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2\le 2020$，

则 $x_9-(x_1+x_2+x_3+x_4)$ 的最大值为（　　）

（A）19　　（B）20　　（C）21　　（D）22

二、填空题：共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）函数 $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是______.

（12）若幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 图象过点 $(3,\sqrt{3})$，则 $f(9)$ 的值为______.

（13）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ge 1,\\ 2^x, & x<1.\end{cases}$ 则 $f(-2)=$____；若 $f(t)\ge\dfrac{1}{2}$，则实数 t 的取值范围____.

（14）函数 $f(x)$ 的定义域为 D，给出下列两个条件：

① 对于 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1\ne x_2$ 时，总有 $f(x_1)\ne f(x_2)$；

② $f(x)$ 在定义域内不是单调函数.

请写出一个同时满足条件①②的函数 $f(x)$，则 $f(x)=$________.

（15）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-a\ (a\in\mathbf{R})$，$g(x)=-x^2+4x+3$，在同一平面直角坐标系里，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴右侧有两个交点，则实数 a 的取值范围是____________.

（16）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. 关于 $f(x)$ 的性质，有以下四个推断：

① $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\ne\pm1\}$；　　② $f(x)$ 是奇函数；

③ $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；　④ $f(x)$ 的值域是 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

其中推断正确的是 ____________.

三、解答题：共 5 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（17）（本小题 15 分）

已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid 2a<x<a+2\}$，$B=\left\{x\middle| 2<2^x<16\right\}$．

（Ⅰ）若$a=1$，求$A\cup B$，$\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B$；

（Ⅱ）若$A\cup B=B$，求实数a的取值范围．

（18）（本小题 17 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$．

（Ⅰ）用定义证明$f\left(x\right)$在区间$\left[1,+\infty\right)$上是增函数；

（Ⅱ）求该函数在区间$\left[2,4\right]$上的最大值与最小值；

（III）直接写出函数的值域（不需要写解答过程）．

（19）（本小题 18 分）

已知函数$f(x)=x^2-2ax-3$．

（Ⅰ）若$a=1$，求不等式$f(x)\geq 0$的解集；

（Ⅱ）已知$f(x)$在$[3,+\infty)$上单调递增，求实数a的取值范围；

（III）求$f(x)$在$[-1,2]$上的最小值．

(20)（本小题 15 分）

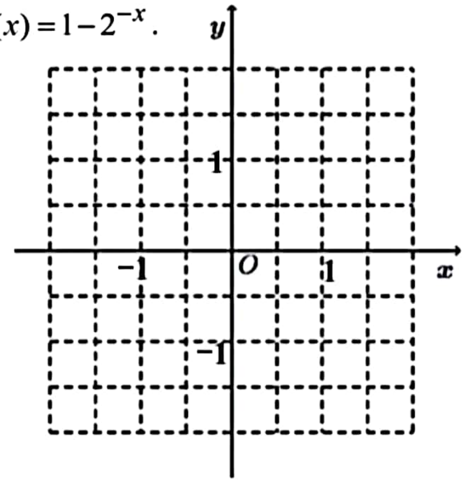
已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=1-2^{-x}$．

（Ⅰ）作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象；

（Ⅱ）直接写出 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $f\left(x\right)$ 是定义域为(-3,3),

求不等式 $f\left(2x-3\right)+f(x+2)>0$ 的解集．



(21)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)$ 的图象在定义域 $(0,+\infty)$ 上连续不断．若存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x>0$，$f(Tx)=f(x)+T$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$．

(Ⅰ)若 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$，且 $f(1)=0$，求 $f(4)+f(\frac{1}{4})$ 的值；

(Ⅱ)若 $f(x)=\log_{1.2}x$，试说明至少存在两个不等的正数 T_1,T_2，同时使得函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$．（参考数据：$1.2^4=2.0736$）

(Ⅲ)若函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$，求证：函数 $f(x)$ 存在零点．