北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期期中考试
高 二 数 学

（本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟）

命题：高二数学组　审稿：贺丽珍

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 下列直线中，倾斜角为锐角的是（　　）

(A) $y=1$　(B) $y=-2x+1$　(C) $x-y+1=0$　(D) $x=2$

2. 若 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,0,3)$, $\boldsymbol{c}=(0,2,2)$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 的值为（　　）

(A) 3　(B) 4　(C) 7　(D) 15

3. 若直线 l 过点 $(-3,-2)$, 且 l 的方向向量为 $(1,-2)$, 则直线 l 的方程为（　　）

(A) $2x+y-8=0$　(B) $2x+y+8=0$　(C) $2x-y+8=0$　(D) $2x-y-6=0$

4. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则 "$a=1$" 是 "直线 l_1：$ax+2y=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行" 的（　　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

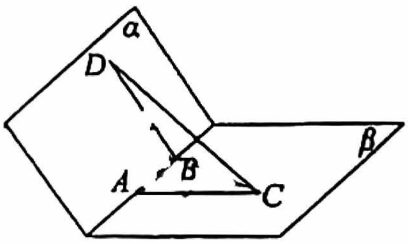
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,2,1)$, $\boldsymbol{c}=(3,4,z)$, 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面, 则 z 等于（　　）

(A) -9　(B) -5　(C) 5　(D) 9

6. 已知实数 x,y 满足 $x+y+1=0$, 则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值为（

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{10}$　(D) $2\sqrt{5}$

7. 如图, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 等于 $120°$, A 是棱 l 上两点, BD, AC 分别在半平面 $\alpha-l-\beta$ 内, $AC\perp l$, $BD\perp l$, 且 $AB=AC=BD=2$, 则 CD 的长等于（　　）



(A) $2\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 2

8. 如图 1, 某同学在一张矩形卡片上绘制了函数 $f(x)=\sin(\pi x+\frac{5\pi}{6})$ 的部分图象, A, B 分别是 $f(x)$ 图象的一个最高点和最低点, M 是 $f(x)$ 图象与 y 轴的交点, $BD\perp OD$, 现将该卡片沿 x 轴折成如图 2 所示的直二面角 $A-OD-B$, 在图 2 中, 则下列结果不正确的是(　　)

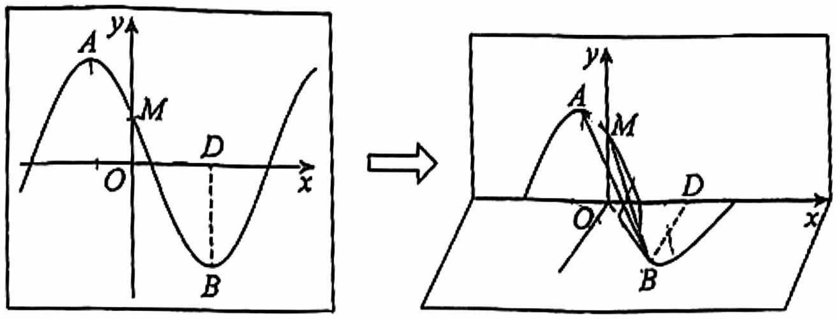


图1　　　　图2

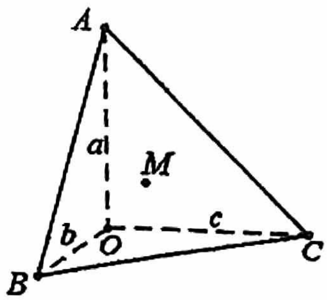
(A) $AB=\sqrt{3}$

(B) 点 D 到平面 ABM 的距离为 $\frac{\sqrt{14}}{14}$

(C) 点 D 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) 平面 OBD 与平面 ABM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{7}$

9. 如图, 在三棱锥 $OABC$ 中, 三条侧棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且 OA, OB, OC 的长分别为 a, b, c. M 为 $\triangle ABC$ 内部的任意一点, 点 M 到平面 OBC, 平面 OAC, 平面 OAB 的距离分别为 a_0, b_0, c_0, 则 $2(\frac{a_0}{a}+\frac{b_0}{b}+\frac{c_0}{c})=$(　　)



(A) 4　　(B) 1　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) 2

10. 设直线系 $M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 对于下列四个命题:

① M 中所有直线均经过一个定点;

②存在无数多个点不在 M 中的任一条直线上;

③对于任意整数 $n(n\geqslant 3)$, 存在正 n 边形, 其所有边均在 M 中的直线上;

④ M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题为(　　)

(A) ①②④　　(B) ②③　　(C) ②③④　　(D) ③④

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

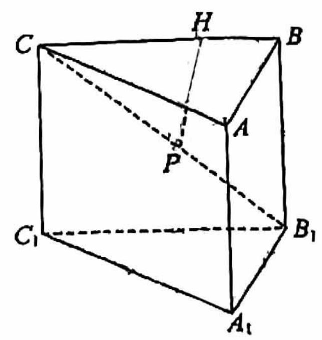
11. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(8,3,a)$, $\boldsymbol{n}=(2b,6,5)$, 若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$, 则 $a+b=$ ________.

12. 两条直线 $l_1: 3x-4y-2=0$ 与 $l_2: 3x-4y+8=0$ 之间的距离是 ________.

13. 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, 则 $\dfrac{y-2}{x-4}$ 的取值范围是 ________.

14. 已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上, 点 $A(4,0)$、$B(0,2)$, 则点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 ________; 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB|=$ ________.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BB_1=\sqrt{3}$, $BC=3$, $\angle ABC=90^\circ$, $\overrightarrow{CH}=x\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CP}=y\overrightarrow{CB_1}$ $(0<x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1)$. 记 $f(x,y)=AH+HP$, 给出下列四个结论:



①对于任意点 H, 都不存在点 P, 使得平面 $AHP\perp$ 平面 A_1B_1P;

② $f(x,y)$ 的最小值为 3;

③当 $f(x,y)$ 取最小时, 过点 A,H,P 作三棱柱的截面, 则截面面积为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

④满足 $f(x,y)=3\sqrt{3}$ 的点 P 有无数个.

其中所有正确结论的序号是 ________.

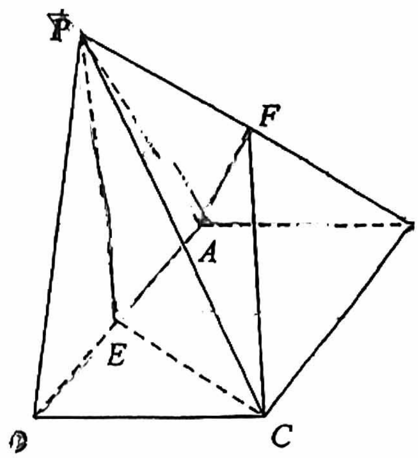
三、解答题共 5 小题，共 55 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 10 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形且 $AD=2AB=2$, 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$, 且侧面 PAD 是正三角形, EF 分别是 AD, PB 的中点.

(1) 求证: $AF\parallel$ 平面 PCE;

(2) 求直线 CF 与平面 PCE 所成角的正弦值.



17. (本小题 9 分)

已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(2,3)$ 是圆 C 直径的两个端点.

(1) 求线段 AB 的中点坐标和圆 C 的方程;

(2) 过点 A 作圆 C 的切线 l, 求切线 l 的方程.

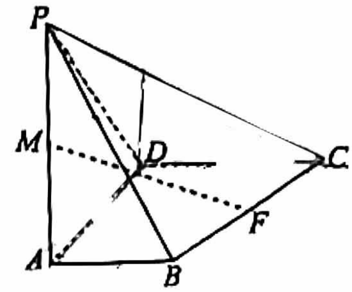
(本小题 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD$, $AD \perp DC$, 且 $AB=1$, $AD=DC=DP=2$, $\angle PDC=120^\circ$.

(1) 求证: $AD \perp$ 平面 PCD;

(2) 求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值;

(3) 设 M 是棱 PA 的中点, 在棱 BC 上是否存在一点 F, 使 $MF \parallel PC$? 若存在, 请确定点 F 的位置; 若不存在, 请说明理由.

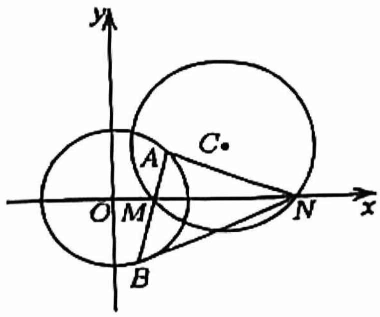


(本小题 12 分)

已知圆 $C: x^2-(1+a)x+y^2-ay+a=0$.

(1) 若圆 C 与 y 轴相切, 求圆 C 的方程;

(2) 如图, 当 $a=5$ 时, 圆 C 与 x 轴相交于两点 M, N (点 M 在点 N 的左侧). 问: 是否存在圆 $O: x^2+y^2=r^2$, 使得过点 M 的任一条直线与该圆的交点 A, B, 都有 $\angle ANM=\angle BNM$? 若存在, 求出圆方程, 若不存在, 请说明理由.



(本小题 12 分)

已知 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n \geqslant 4)$ 为有穷数列. 若对任意的 $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 都有 $|a_{i+1}-a_i| \leqslant 1$ (规定 $a_0=a_n$), 则称 A_n 具有性质 P.

设 $T_n=\{(i,j) \mid |a_i-a_j| \leqslant 1, 2 \leqslant j-i \leqslant n-2\ (i,j=1,2,\cdots,n)\}$.

(1) 判断数列 $A_4: 1, 0.1, -0.2, 0.5$, $A_5: 1, 2, 0.7, 1.2, 2$ 是否具有性质 P? 若具有性质 P, 写出对应的集合 T_n;

(2) 若 A_4 具有性质 P, 证明: $T_4 \neq \varnothing$;

(3) 给定正整数 n, 对所有具有性质 P 的数列 A_n, 求 T_n 中元素个数的最小值.