北京交大附中 2023—2024 学年度第一学期 12 月诊断练习

高三数学

2023 年 12 月

命题人：邹宏运　　　　审题人：李运秋

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合 $M=\{x\mid x+2\geq 0\}, N=\{x\mid x-1<0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{x\mid -2\leq x<1\}$　　B．$\{x\mid -2<x\leq 1\}$

C．$\{x\mid x\geq -2\}$　　D．$\{x\mid x<1\}$

2．设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\bar{z}=$（　）

A．$1-2\mathrm{i}$　　B．$1+2\mathrm{i}$　　C．$2-\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$

3．已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则 $a_{2024}=$（　）

A．$2^{2023}-1$　　B．2^{2023}　　C．$2^{2024}-1$　　D．2^{2024}

4．设 $a=2^{0.3}, b=\sin 28^{\circ}, c=\ln 2$，则（　）

A．$c<b<a$　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

5．设 l 是直线，α、β 是两个不同的平面，则下列命题中正确的是（　）

A．若 $l // \alpha$，$l // \beta$，则 $\alpha // \beta$　　B．若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则 $l // \beta$

C．若 $l // \alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D．若 $\alpha\perp\beta$，$l // \alpha$，则 $l\perp\beta$

6．“$a=-1$”是“函数 $f(x)=|\sin x-a|$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 2 ”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．若曲线 C：$x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$ 上所有的点均在第二象限内，则 a 的取值范围为（　）

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(-\infty,-1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

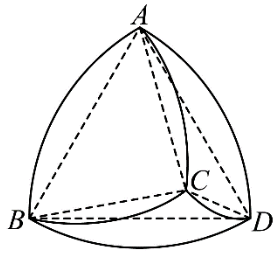
8．埃及胡夫金字塔是世界古代建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，其侧面与底面所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则侧面三角形的底角的正切值为(　).

A．2　　B．3　　C．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

9．已知 $f(x), g(x)$ 分别为定义域为 R 的偶函数和奇函数，且 $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$，若关于 x 的不等式 $2f(x)-ag^2(x)\ge 0$ 在 $(0,\ln 2)$ 上恒成立，则实数 a 的最大值是（　）

A．$\dfrac{40}{9}$　　B．$\dfrac{39}{9}$　　C．$\dfrac{38}{9}$　　D．$\dfrac{37}{9}$

10．数学中有许多形状优美，寓意独特的几何体，“勒洛四面体”就是其中之一．勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分．如图，在勒洛四面体中，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，则下列结论正确的是（　）



A．勒洛四面体最大的截面是正三角形

B．若 P、Q 是勒洛四面体 $ABCD$ 表面上的任意两点，则 PQ 的最大值为 4

C．勒洛四面体 $ABCD$ 的体积是 $8\sqrt{6}\pi$

D．勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．命题“$\forall x>1, x^2-x-6\le 0$”的否定是________.

12．设点 $P(x,y)$ 是圆：$(x-3)^2+y^2=4$ 上的动点，定点 $A(0,2)$，$B(0,-2)$，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的取值范围为_____.

13．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AB\perp BC$，$AC=2AB$，$A_1C=2$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积的最大值为______；此时棱柱的高为________.

14．素描是使用单一色彩表现明暗变化的一种绘画方法，素描水平反映了绘画者的空间造型能力．“十字贯穿体”是学习素描时常用的几何体实物模型，图 1 是某同学绘制的“十字贯穿体”的素描作品．“十字贯穿体”是由两个完全相同的正四棱柱“垂直贯穿”构成的多面体，其中一个四棱柱的每一条侧棱分别垂直于另一个四棱柱的每一条侧棱，两个四棱柱分别有两条相对的侧棱交于两点，另外两条相对的侧棱交于一点（该点为所在棱的中点）．若该同学绘制的“十字贯穿体”由两个底面边长为 4，高为 $6\sqrt{2}$ 的正四棱柱构成（图 2），则一只蚂蚁从该“十字贯穿体”的点 C 出发，沿表面到达点 D 的最短路线长为______.

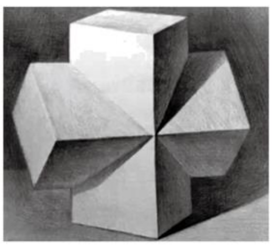


图1

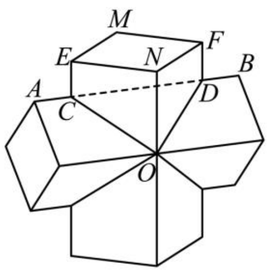
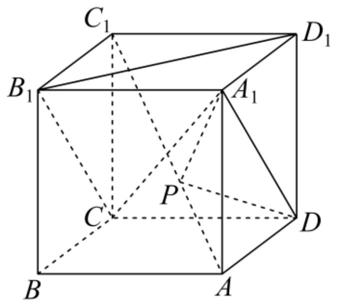


图2

15．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是对角线 AC_1 的动点（点 P 与 A,C_1 不重合），则下列结论正确的有________.



①存在点 P，使得平面 A_1DP // 平面 B_1CD_1；

② S_1,S_2 分别是 $\triangle A_1DP$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积，存在点 P，使得 $S_1=S_2$；

③对任意的点 P，都有 $A_1P=DP$；

④对任意的点 P，$\triangle A_1DP$ 的面积都不等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

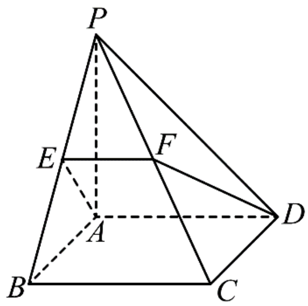
三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16．（13 分）已知 $\triangle ABC$，$A(-1,1),B(2,-2),C(5,1)$.

（Ⅰ）求 AB 边上的高所在的直线方程并求出高的长；

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

17．（14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，点 F 为棱 PC 上的点，平面 ADF 与棱 PB 交于点 E.



（Ⅰ）求证：$EF//AD$；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，

求平面 PCD 与平面 $ADFE$ 所成锐二面角的大小.

条件①：$AE=\sqrt{2}$；

条件②：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

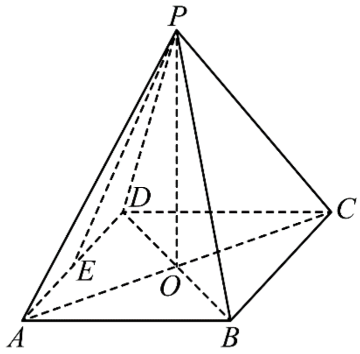
条件③：$PB\perp FD$.

18．（13 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$2b\cos C=2a-c$.

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）若 $a<c$，$b=2\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 a，c 的值.

19．（15 分）已知点 P 是边长为 2 的菱形 $ABCD$ 所在平面外一点，且点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影是 AC 与 BD 的交点 O，已知 $\angle BAD=60°$，$\triangle PDB$ 是等边三角形.



（Ⅰ）求证：$AC\perp PD$；

（Ⅱ）求点 D 到平面 PBC 的距离；

（Ⅲ）若点 E 是线段 AD 上的动点，问：点 E 在何处时，直线 PE 与平面 PBC 所成的角最大？求出最大角的正弦值，并求出取得最大值时线段 DE 的长.

20．（15 分）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}\left[x^{2}-\left(2a+1\right)x+1\right]$.

（Ⅰ）若 $a=\dfrac{1}{2}$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线；

（Ⅱ）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $a>0$ 时，若对任意实数 x，$f\left(x\right)>\left(2-3a\right)\mathrm{e}^{2a}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21．（15 分）数列 a_n：a_1，a_2，…，$a_n\left(n\geq 4\right)$ 满足：$a_1=1$，$a_n=m$，$a_{k+1}-a_k=0$ 或 1（$k=1$，2，…，$n-1$），对任意 i，j，都存在 s，t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i,j,s,t\in\left\{1,2,\cdots,n\right\}$ 且两两不相等.

（Ⅰ）若 $m=2$，直接写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号：

①1，1，1，2，2，2；

②1，1，1，1，2，2，2，2；

③1，1，1，1，1，2，2，2，2

（Ⅱ）记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $m=3$，证明：$S\geq 20$；

（Ⅲ）若 $m=2022$，求 n 的最小值.

北京交大附中2023—2024学年度第一学期12月诊断练习

高三数学参考答案

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）A　（2）B　（3）B　（4）C　（5）C

（6）A　（7）D　（8）D　（9）A　（10）D

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）$\exists x>1, x^2-x-6>0$　　（12）$[2,10]$

（13）$\frac{2}{3}$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　（14）$4\sqrt{2}+2$

（15）①②③

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（共13分）

解：（1）$k_{AB}=-1$，所以高所在直线斜率 $k=1$

所以高所在直线为方程为 $x-y-4=0$，就是 BC 方程

高的长为：AB 方程为 $x+y=0$，所以高的长为 $3\sqrt{2}$

（2）设 ABC 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将 A,B,C 的坐标代入，得

$$\begin{cases}(-1)^2+1^2-D+E+F=0,\\ 2^2+(-2)^2+2D-2E+F=0\\ 5^2+1^2+5D+E+F=0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}-D+E+F=-2\\ 2D-2E+F=-8\\ 5D+E+F=-26\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}D=-4\\ E=-2\\ F=-4\end{cases}；$$

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

（17）（共14分）

（1）证明：因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD//BC$，

$BC\subset$ 平面 PBC，$AD\not\subset$ 平面 PBC，所以 $AD//$ 平面 PBC，

又因为平面 ADF 与 PB 交于点 E， $AD \subset$ 平面 $ADFE$， 平面 $PBC \cap$ 平面 $ADFE = EF$,

所以 $EF // AD$.

（2）选条件①②，则 $AE=\sqrt{2}$，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

因为侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，即 $PA=AD=2$， $PA \perp AD$，

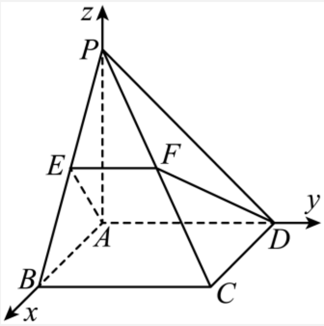
因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$， 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$， $PA \subset$ 平面 PAD，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCD$， $AD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp AB$， $PA \perp AD$，

又由 $ABCD$ 为正方形得 $AB \perp AD$.

以点 A 为坐标原点， AB， AD， AP 分别为 x 轴， y 轴， z 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A(0,0,0)$， $P(0,0,2)$， $C(2,2,0)$， $B(2,0,0)$， $D(0,2,0)$，

因为 $AE=\sqrt{2}$，所以点 E 为 PB 的中点，则 $E(1,0,1)$，

从而 $\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$， $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{AE}=(1,0,1)$， $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$ ，

设平面 $ADFE$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=2y=0,\end{cases}$，

令 $x=1$，可得 $\vec{n}=(1,0,-1)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=2b-2c=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=2a+2b-2c=0,\end{cases}$，

令 $b=1$，可得 $\vec{m}=(0,1,1)$，

所以$|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{1}{2}$，

则两平面所成的锐二面角为$\dfrac{\pi}{3}$.

选条件①③，则$AE=\sqrt{2}$，$PB\perp FD$.

侧面PAD为等腰直角三角形，且$\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，即$PA=AD=2$，$PA\perp AD$，

因为$AD\perp AB$，$PA\cap AB=A$，且两直线在平面PAB内，可得$AD\perp$平面PAB，

因为$PB\subset$平面PAB，则$AD\perp PB$.

又因为$PB\perp FD$，$AD\cap FD=D$，且两直线在平面$ADFE$内，

则$PB\perp$平面$ADFE$，

因为$AE\subset$平面$ADFE$，则$PB\perp AE$，

因为$PA=AB$，所以$\triangle PAB$为等腰三角形，所以点E为PB的中点.

又因为$AE=\sqrt{2}$，所以$\triangle PAB$为等腰直角三角形，

则可建立与①②相同的空间直角坐标系，以下用与①②相同的过程求解.

选条件②③，则平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PB\perp FD$.

因为侧面PAD为等腰直角三角形，且$\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，

即$PA=AD=2$，$PA\perp AD$，

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$PA\subset$平面PAD，

所以$PA\perp$平面$ABCD$，

又因为$AB\subset$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，

又由$ABCD$为正方形得$AB\perp AD$.

因为$PB\perp FD$，$AD\cap FD=D$，且两直线在平面$ADFE$内，则$PB\perp$平面$ADFE$，

因为$AE\subset$平面$ADFE$，则$PB\perp AE$，

因为$PA=AB$，所以$\triangle PAB$为等腰三角形，所以点E为PB的中点，则$AE=\sqrt{2}$.

则可建立与①②相同的空间直角坐标系，以下的过程与①②相同.

（18）（共 13 分）

解：（1） $2b\cos C=2a-c$，故 $2\sin B\cos C=2\sin A-\sin C$，

即 $2\sin B\cos C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C$， 整理得到 $2\cos B\sin C=\sin C$，

$C\in(0,\pi)$， $\sin C\neq 0$，

故 $\cos B=\frac{1}{2}$， $B\in(0,\pi)$，

故 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2） $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=3\sqrt{3}$，故 $ac=12$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=28$，

故 $a+c=8$，

又 $a<c$，解得 $a=2$， $c=6$.

（19）（共 15 分）

（1）因为点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影是 AC 与 BD 的交点 O， 所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$， 所以 $PO\perp AC$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$.

因为 $PO\cap BD=O, PO, BD\subset$ 平面 PBD，

所以 $AC\perp$ 平面 PBD.

因为 $BD\subset$ 平面 PBD， 所以 $AC\perp PD$.

（2）由题意可得 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 与 $\triangle PBD$ 都是边长为 2 的等边三角形，

所以 $PO=AO=CO=\sqrt{3}$， $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

所以 $PC=\sqrt{PO^2+CO^2}=\sqrt{6}$.

因为 $BP=BC=2$， 所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

设点 D 到平面 PBC 的距离为 h，

由 $V_{D-PBC}=V_{P-BDC}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}\cdot OP$，

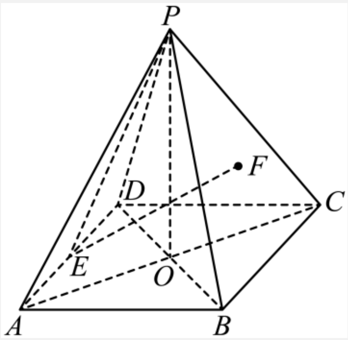
即 $\frac{\sqrt{15}}{2}h=\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

故点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

（3）设直线 PE 与平面 PBC 所成的角为 θ，$\because AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel$ 平面 PBC，

$\therefore E$ 到平面 PBC 的距离即为 D 到平面 PBC 的距离 h.

过 E 作垂线 $EF\perp$ 平面 PBC 交于点 F，则 $\theta=\angle EPF$，



此时 $\sin\theta=\frac{EF}{PE}=\frac{2\sqrt{15}}{5PE}$，要使 θ 最大，则需使 PE 最小，此时 $PE\perp AD$.

由题意可知：$OD=1,OA=\sqrt{3}$，因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PO=\sqrt{3}$，

所以 $PA=\sqrt{OP^2+OA^2}=\sqrt{6}$，$PD=\sqrt{OP^2+OD^2}=2$，

在 $\triangle PAD$ 中，由余弦定理可得：$\cos\angle PAD=\frac{AP^2+AD^2-PD^2}{2AP\cdot AD}=\frac{6+4-4}{2\times\sqrt{6}\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以 $\sin\angle PAD=\sqrt{1-\cos^2\angle PAD}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

由面积相等 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}AP\cdot AD\sin\angle PAD=\frac{1}{2}AD\cdot PE$，

即 $\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{1}{2}\times 2\times PE$，经计算得，$PE=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$DE=\sqrt{PD^2-PE^2}=\sqrt{4-\frac{15}{4}}=\frac{1}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，

此时 $DE=\frac{1}{2}$.

（20）（共 15 分）

（1） $a=\frac{1}{2}$时，函数 $f(x)=e^x(x^2-2x+1)$，则 $f(0)=1$，切点坐标为$(0,1)$，

$f'(x)=e^x(x^2-1)$，则曲线 $y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线斜率为 $f'(0)=-1$，

所求切线方程为$y-1=-(x-0)$，即 $y=-x+1$.

（2） $f(x)=e^x[x^2-(2a+1)x+1]$，函数定义域为 R，

$f'(x)=e^x[x^2+(1-2a)x-2a]=e^x(x-2a)(x+1)$

①$a>-\frac{1}{2}$， $f'(x)>0$解得$x<-1$或$x>2a$， $f'(x)<0$解得$-1<x<2a$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(2a,+\infty)$上单调递增，在$(-1,2a)$上单调递减，

②$a<-\frac{1}{2}$， $f'(x)>0$解得$x<2a$或$x>-1$， $f'(x)<0$解得$2a<x<-1$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,2a)$和$(-1,+\infty)$上单调递增，在$(2a,-1)$上单调递减，

③$a=-\frac{1}{2}$， $f'(x)\geq 0$恒成立， $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

（3）当$a>0$时，由（2）可知 $f(2a)$为 $f(x)$在$(-1,+\infty)$上的极小值，也是最小值.

于是 $f(2a)=e^{2a}(1-2a)>(2-3a)e^{2a}$，所以$a>1$

当$a>1$且$x<-1$时，

由于函数$y=x^2-(2a+1)x+1$的图像抛物线开口向上，对称轴大于 0，

$x^2-(2a+1)x+1>(-1)^2-(2a+1)(-1)+1=2a+3>0$

因此 $f(x)>0$，此时$(2-3a)e^{2a}<0$，符合题意.

所以a的取值范围为$(1,+\infty)$.

（21）（共 15 分）

（1）对于①，由于$a_1+a_2=2$，故$a_s+a_t=3$或$a_s+a_t=4$，不合题意；

对于②，当 $a_i+a_j=2$ 时，存在 s，t 两两不相等，使得 $a_s+a_t=2$；

当 $a_i+a_j=3$ 时，存在 s，t 两两不相等，使得 $a_s+a_t=3$；

当 $a_i+a_j=4$ 时，存在 s，t 两两不相等，使得 $a_s+a_t=4$；符合题意；

同理③也符合题意，

故所有符合题目条件的数列的序号为②③；

（2）证明：当 $m=3$ 时， 设数列中 1，2，3 出现的频数依次为 q_1,q_2,q_3，

由题意知 $q_i\geq 1(i=1,2,3)$，

假设 $q_1<4$，则有 $a_1+a_2<a_s+a_t$，（对任意 $s>t>2$），与已知矛盾，

故 $q_1\geq 4$，同理可证 $q_3\geq 4$；

假设 $q_2=1$，则存在唯一的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_k=2$，

那么对于 $\forall s,t$，都有 $a_1+a_k=1+2\neq a_s+a_t$，（k，s，t 两两不相等），

与已知矛盾，故 $q_2\geq 2$；

综上可得 $q_1\geq 4,q_3\geq 4,q_2\geq 2$，

所以 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n\geq 1\times 4+2\times 2+3\times 4=20$，

即 $S\geq 20$.

（3）设 $1,2,3,\cdots,2022$ 出现的频数依次为 $q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$，

同（2）的证明，$q_1\geq 4,q_{2022}\geq 4,q_2\geq 2$，$q_{2021}\geq 2$，则 $n\geq 2030$；

取 $q_1=q_{2022}=4,q_2=q_{2021}=2,q_i=1$，$i=3,4,5,\cdots,2020$，

得到的数列为：$1,1,1,1,2,2,3,4,\cdots,2019,2020,2021,2021,2022,2022,2022,2022$，

下面证明该数列满足题目要求：

对于 $i,j\in\{1,2,\cdots,2030\}$，不妨令 $a_i\leq a_j$，

如果 $a_i=a_j=1$，或 $a_i=a_j=2022$，由于 $q_1=4,q_{2022}=4$，故符合条件；

②如果$a_i=1,a_j=2$，或$a_i=2021,a_j=2022$，由于$q_1=4,q_{2022}=4$，$q_2=2,q_{2021}=2$，

故也符合条件；

③如果$a_i=1,a_j>2$，则可选取$a_s=2$，$a_t=a_j-1$，

同样的，如果$a_i<2021$，$a_j=2022$，则可选取$a_s=a_i+1,a_t=2021$，

使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，且i,j,s,t两两不相等；

④如果$1<a_i\le a_j<2022$，则可选取$a_s=a_i-1,a_t=a_j+1$，

注意到这种情况每个数最多被选取了一次，因此也符合条件，

综上，对任意i，j，都存在s，t，使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，其中$i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$且两两不相等，

即数列$1,1,1,1,2,2,3,4,\cdots,2019,2020,2021,2021,2022,2022,2022,2022$符合题目要求，

故n的最小值为2030.