



2023 北京九中初三（上）期中

数 学

2023 年 11 月

班级_____姓名_____准考证号

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 若 $2x = 3y (y \neq 0)$ ，则下列比例式一定成立的是

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ B. $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ C. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{x}{2} = \frac{3}{y}$

2. 古希腊人认为，最美人体是肚脐至足底的长度与人的身高之比是 0.618，称为黄金分割比，著名的断臂维纳斯雕像便是如此。若某人身材大致满足黄金分割比例，且其肚脐至足底的长度为 105cm，则此人身高大约为

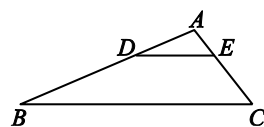
- A. 160cm B. 170cm C. 180cm D. 190cm

3. 二次函数 $y = (x-1)^2 - 3$ 的顶点坐标是

- A. (1, -3) B. (-1, -3) C. (1, 3) D. (-1, 3)

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别为边 AB, AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ，若 $AD = 5, BD = 10, AE = 3$ ，则 AC 的长为

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12



5. 二次函数 $y = x^2 - 2x$ ，若点 $A(-1, y_1), B(2, y_2)$ 是它图象上的两点，则 y_1 与 y_2 的大小关系是

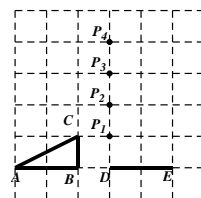
- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 = y_2$ C. $y_1 > y_2$ D. 不能确定

6. 若要得到函数 $y = (x-1)^2 + 2$ 的图象，只需将函数 $y = x^2$ 的图象

- A. 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度
 B. 先向左平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度
 C. 先向左平移 1 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度
 D. 先向右平移 1 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度

7. 如图，方格纸中小正方形边长均相等. $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEP$ 的各顶点均为格点（小正方形的顶点），若 $\triangle ABC \sim \triangle DEP$ 且两三角形不全等，则 P 点所在的格点为

- A. P_1 B. P_2 C. P_3 D. P_4



8. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为 $x=1$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间（包含这两个点）运动。有如下四个结论：① 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(3, 0)$ ；② 点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ 在抛物线上，且满足 $x_1 < x_2 < 1$ ，则 $y_1 > y_2$ ；③ 常数项 c 的取值范围是 $2 \leq c \leq 3$ ；



④系数 a 的取值范围是 $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$.

上述结论中，所有正确结论的序号是

- A.①②③ B.②③④ C.①④ D.①③④

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9.二次函数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 图象的开口方向是_____.

10.请写出一个开口向上，并且与 y 轴交点在 y 轴负半轴的抛物线的表达式：_____.

11.写出一个当自变量 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小的反比例函数的表达式_____.

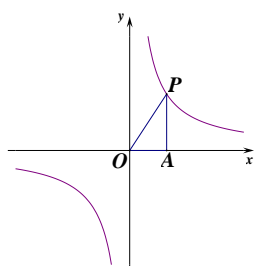
12.把二次函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 化为 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式，那么 $h+k =$ _____.

13.函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，那么 ac 0 . (填 “ $>$ ”，“ $=$ ”，或 “ $<$ ”)

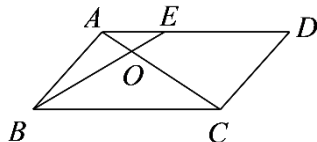
14.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上， AC ， BE 交于点 O ，若 $AE:ED = 1:2$ ，则 $S_{\triangle AOE} : S_{\triangle COB} =$

15.如图，点 P 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上， $PA \perp x$ 轴于点 A ，则 $\triangle PAO$ 的面积是

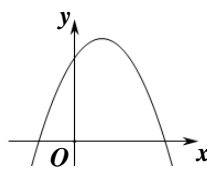
16.如图，二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 的图象，若关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 4x - t = 0$ (t 为实数) 在 $1 < x < 5$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是_____.



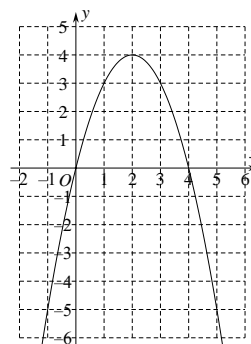
(13 题)



(14 题)



(15 题)



(16 题)

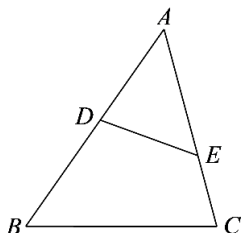
三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别在边 AB ， AC 上，连接 DE ，且 $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

(1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle ACB$;

(2) 若 $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle ADE = 75^\circ$ ，求 $\angle A$ 的度数.

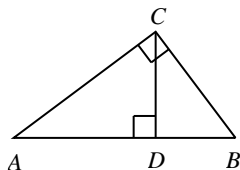




18.已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是 AB 边上的高.

(1) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle CBD$;

(2) 如果 $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，求 BD 的长.



19.在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = x$ 的图象平移得到，且经过点 $A(1, 3)$.

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 当 $x < 1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的值小于函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

20.在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 过点 $A(1, 1)$ ，与直线 $y = 4x$ 交于 B, C 两点（点 B 的横坐标小于点 C 的横坐标）.

(1) 求 k 的值;

(2) 求点 B, C 的坐标;

(3) 若直线 $x = t$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于点 $D(t, y_1)$ ，与直线 $y = 4x$ 交于点 $E(t, y_2)$ ，当 $y_1 < y_2$ 时，写出 t 的取值范围.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx - 1 (a \neq 0)$ ，经过点 $B(1, 4)$ ， $C(-2, 1)$.

(1) 求二次函数的解析式;

(2) 求此函数的顶点坐标

(3) 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时，求 y 的取值范围.

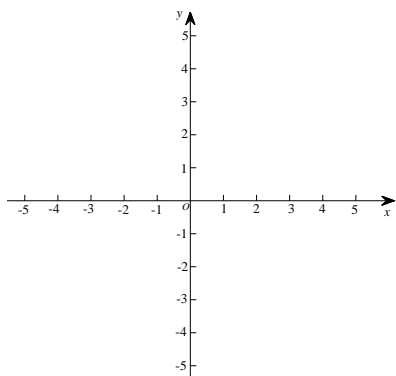
22. 已知二次函数的图象上部分点的横坐标 x ，纵坐标 y 的对应值如下表:

| | | | | | | | |
|-----|-----|---|----|----|----|---|-----|
| x | ... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| y | ... | 1 | -2 | -3 | -2 | 1 | ... |

(1) 求这个二次函数的表达式;

(2) 画出次函数图象

(3) 当 $y > -2$ 时，直接写出 x 的取值范围.



23. 已知二次函数 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

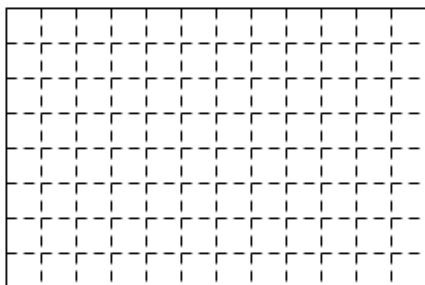
- (1) 求此二次函数的对称轴 (用含 m 的字母表示)
- (2) 若二次函数的图象与 x 轴有两个不同的交点, 求 m 的取值范围
- (3) 选取一个你喜欢的 m 值, 求此二次函数图象与 x 轴的交点.

24. 某公园内的人工湖里有一组小型喷泉, 水柱从垂直于湖面的水枪喷出, 水柱落于湖面的路径形状是抛物线. 现测量出如下数据, 在距离水枪水平距离为 d 米的地点, 水柱距离湖面高度为 h 米.

| | | | | | |
|---------|------|------|------|------|---|
| d (米) | 0 | 0.5 | 2.0 | 3.5 | 5 |
| h (米) | 1.67 | 2.25 | 3.00 | 2.25 | 0 |

请解决以下问题:

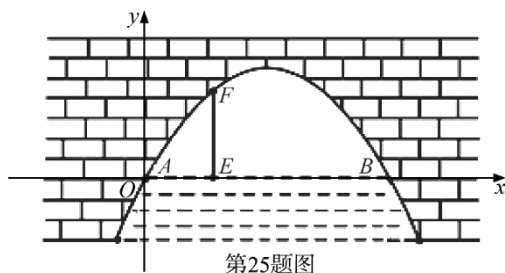
- (1) 在下面网格中建立适当的平面直角坐标系, 根据已知数据描点, 并用平滑的曲线连接;



- (2) 结合所画图象, 水柱最高点距离湖面的高度是___米;
- (3) 求抛物线的表达式, 并写出自变量的取值范围;
- (4) 现有一游船宽度为 2 米, 顶棚到湖面的高度为 2.5 米. 要求游船从喷泉水柱中间通过时, 顶棚不碰到水柱. 请问游船是否能符合上述要求通过? 并说明理由.

25. 抛物线形拱桥具有取材方便, 造型美观的特点, 被广泛应用到桥梁建筑中. 如图是某公园抛物线形拱桥的截面图. 以水面 AB 所在直线为 x 轴, A 为坐标原点, 建立如图所示的平面直角坐标系. 点 E 到点 A 的距离 $AE = x$ (单位: m), 点 E 到桥拱顶面的竖直直距离 $EF = y$ (单位: m). x, y 近似满足函数关系 $y = ax^2 + bx$ ($a < 0$).

通过取点, 得到 x 与 y 的几组对应值, 如下表:



第25题图

| | | | | | | | |
|---------|---|------|---|------|---|------|---|
| x (米) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y (米) | 0 | 1.25 | 2 | 2.25 | 2 | 1.25 | 0 |

(1) 桥拱顶面离水面 AB 的最大高度为 ___m;

(2) 根据上述数据, 求出满足的函数关系 $y = ax^2 + bx$ 和水面宽度 AB 的长.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(1, m)$ 和 $(2, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上.

(1) 若 $m=0$, 求该抛物线的对称轴;

(2) 若 $mn < 0$, 设抛物线的对称轴为直线 $x = t$,

①直接写出 t 的取值范围;

②已知点 $(-1, y_1)$, $(\frac{3}{2}, y_2)$, $(3, y_3)$ 在该抛物线上. 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并说明理由.

27. 已知: 如图①, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 F 是 BC 上一个动点, 点 E 在 CD 的延长线上,

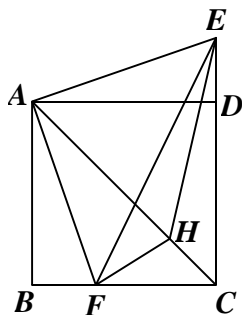
且 $BF = DE$, 连接 AE, AF, EF . EH 平分 $\angle FEC$, 交 AC 于点 H , 连接 FH .

(1) 直接写出 AE 与 AF 的数量关系与位置关系;

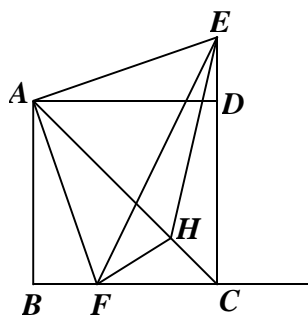
(2) 求证: $AH = AF$;

(3) 如图②, 当点 F 在射线 BC 上运动时, 过 H 作 $HP \perp EF$ 于点 P ,

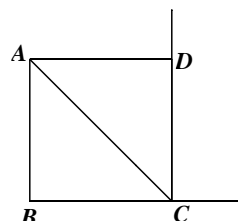
直接写出线段 HP, EF 与 AB 之间的数量关系.



图①



图②



(备用图)

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于两点 A, B , 给出如下定义: 以线段 AB 为边的正方形称为点 A, B 的“确定正方形”. 如图 1 为点 A, B 的“确定正方形”的示意图.

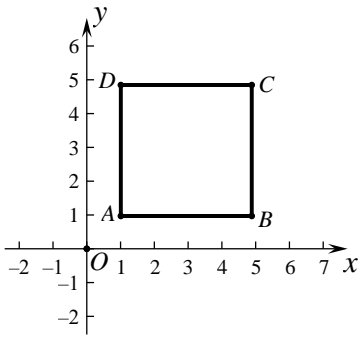
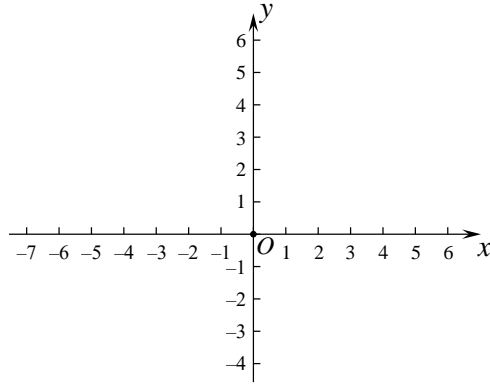


图 1



备用图

- (1) 如果点 M 的坐标为 $(0, 1)$, 点 N 的坐标为 $(3, 1)$, 那么点 M, N 的“确定正方形”的面积为 _____;
- (2) 已知点 O 的坐标为 $(0, 0)$, 点 C 为直线 $y = x + b$ 上一动点, 当点 O, C 的“确定正方形”的面积最小, 且最小面积为 2 时, 求 b 的值.
- (3) 已知点 E 在以边长为 2 的正方形的边上, 且该正方形的边与两坐标轴平行, 对角线交点为 $P(m, 0)$, 点 F 在直线 $y = -x - 2$ 上, 若要使所有点 E, F 的“确定正方形”的面积都不小于 2, 直接写出 m 的取值范围.