2022 北京石景山初三二模

数　　学

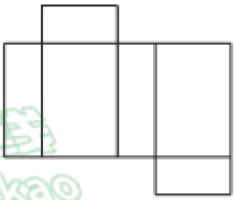
第一部分　选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1 - 8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 在△ABC 中，$AB=3$，$AC=2$，$BC=a$，a 的值可能是（　）

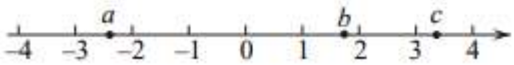
A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

2. 如图是某个几何体的展开图，该几何体是（　）



A. 长方体　　B. 正方体　　C. 三棱柱　　D. 圆柱

3. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）

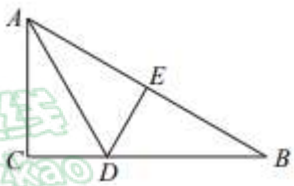


A. $a>-2$　　B. $a+3>c$　　C. $-a>b$　　D. $ab<ac$

4. 下列运算正确的是(　)

A. $a^2+a^3=a^5$　　B. $a^2\cdot a^3=a^5$　　C. $(-a^2)^3=a^6$　　D. $-2a^3b\div ab=-2a^2b$

5. 如图，△ABC 中，$AC=\sqrt{3}$，D，E 分别为 CB，AB 上的点，$CD=1$，$AD=BD=2$，若 $AE=EB$，则 DE 的长为（　）



A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

6. 方程组 $\begin{cases}x-y=3\\2x+y=6\end{cases}$ 的解为（　）

A $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$

7. 研究与试验发展（$R\&D$）经费是指报告期为实施研究与试验发展（$R\&D$）活动而实际发生的全部经费支出．基础研究活动是研究与试验发展（$R\&D$）活动的重要组成．下面的统计图是自 2016 年以来全国基础研究经费及占 $R\&D$ 经费比重情况.

根据统计图提供的信息，下面四个推断中错误的是（　）

A 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费逐年上升

B. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费占 $R\&D$ 经费比重逐年上升

C. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费平均值超过 1000 亿元

D. 2021 年全国基础研究经费比 2016 年的 2 倍还多

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	…	-1	0	1	3	…
y	…	0	-1.5	-2	0	…

根据表格中的信息，得到了如下的结论：

①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可改写为 $y=a(x-1)^2-2$ 的形式

②二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下

③关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1.5$ 的两个根为 0 或 2

④若 $y>0$，则 $x>3$

其中所有正确的结论为（　）

A. ①④　　　　B. ②③　　　　C. ②④　　　　D. ①③

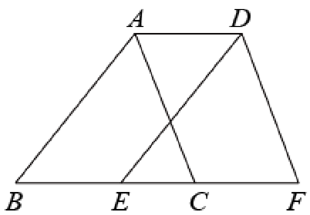
第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\sqrt{x+1}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是______.

10. 分式方程 $\frac{3}{x+2}=\frac{1}{x}$ 解为______.

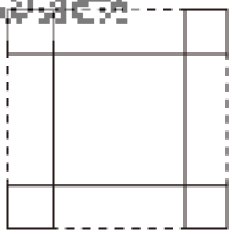
11. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移一定的距离得到 $\triangle DEF$．请写出一条正确的结论，可以为______.



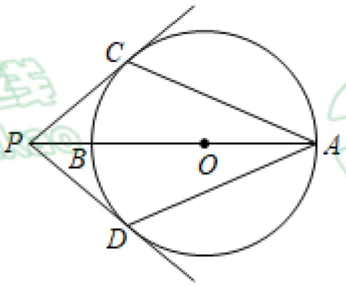
12. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2,m)$，$B(n,3)$ 都在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，则 $\frac{m}{n}$ 的值为______.

13.

$m>0$，$n>0$，若 $m^2+4n^2=13$，$mn=3$，请借助下图直观分析，通过计算求得 $m+2n$ 的值为______.



14. 如图，AB 为⊙O 直径，点 P 在 AB 的延长线上，PC，PD 分别与⊙O 相切于点 C，D，若∠CPA=40°，则∠CAD 的度数为______°.

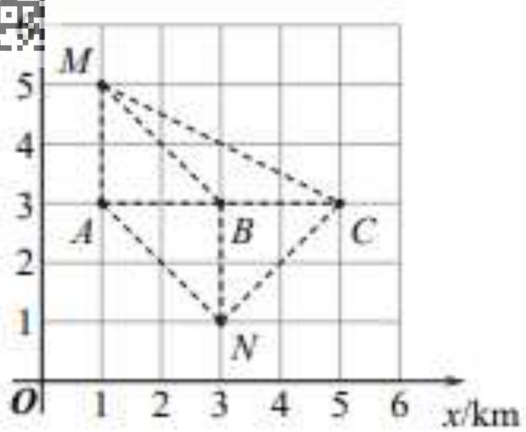


15. 某班级学生分组做抛掷瓶盖的试验，各组试验结果如下表：

累计抛掷次数	100	200	300	400	500	600
盖面朝上次数	54	105	158	212	264	319
盖面朝上的频率	0.5400	0.5250	0.5267	0.5300	0.5280	0.5317

根据表格中的信息，估计抛掷一枚这样的瓶盖，落地后盖面朝上的概率为______．（精确到 0.01）

16. 如图，某建筑公司有 $A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(5,3)$三个建筑工地，三个工地的水泥日用量分别为 a 吨，b 吨，c 吨．有 $M(1,5)$，$N(3,1)$两个原料库供应水泥．使用一辆载重量大于$(a+b+c)$吨的运输车可沿图中虚线所示的道路运送水泥．为节约运输成本，公司要进行运输路线规划，使总的“吨千米数”（吨数×运输路程千米数）最小．若公司安排一辆装有$(a+c)$吨的运输车向 A 和 C 工地运送当日所需的水泥，且 $a>c$，为使总的“吨千米数”最小，则应从______原料库（填“M”或“N”）装运；若公司计划从 N 原料库安排一辆装有$(a+b+c)$吨的运输车向 A，B，C 三个工地运送当日所需的水泥，且 $a:b:c=3:2:1$，为使总的“吨千米数”最小，写出向三个工地运送水泥的顺序______（按运送的先后顺序依次排列即可）.



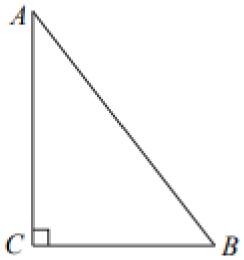
三、解答题（共 68 分，第 17－21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24－26 题，每题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$3^0-4\sin 45°+\sqrt{8}+\left|1-\sqrt{2}\right|$.

18. 解不等式组：$\begin{cases}3(x+1)<x-1\\ \dfrac{x+9}{2}>2x\end{cases}$ 并写出它的最大整数解.

19. 已知 $m^2-m=1$，求代数式 $(2m+1)(2m-1)-m(m+3)$ 的值.

20. 已知：如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CB<CA$.



求作：线段 AB 上的一点 M，使得 $\angle MCB=\angle A$.

作法：①以点 C 为圆心，CB 长为半径作弧，交 AB 于点 D；

②分别以点 B，D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 长为半径作弧，两弧在 AB 的右侧相交于点 E；

③作直线 CE，交 AB 于点 M. $\angle MCB$ 即为所求.

根据小伟设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 CD，ED，EB.

∵ $CD=CB$，$ED=EB$，

∴ CE 是 DB 的垂直平分线（______）（填推理的依据）.

∴ $CM\perp AB$.

∴$\angle MCB+\angle B=90°$.

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle A+\angle B=90°$.

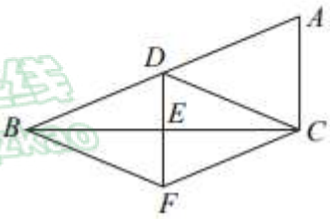
∴$\angle MCB=\angle A$（______）（填推理的依据）.

21. 已知：关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$.

（1）求证：不论 m 取何值，方程总有两个不相等的实数根；

（2）选择一个你喜欢的整数 m 的值代入原方程，并求出这个方程的解.

22. 如图所示，△ABC 中，$\angle ACB=90°$，D，E 分别为 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 $EF=DE$，连接 CD，CF，BF.



（1）求证：四边形 $BFCD$ 是菱形；

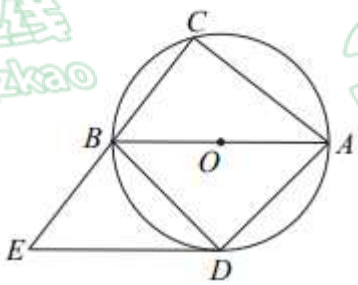
（2）若 $\cos A=\dfrac{5}{13}$，$DE=5$，求菱形 $BFCD$ 的面积.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y=\dfrac{1}{2}x+b$ 与直线 $l_2: y=2x$ 交于点 $A(m,n)$.

（1）当 $m=2$ 时，求 n，b 的值；

（2）过动点 $P(t,0)$ 且垂直于 x 轴的直线与 l_1，l_2 的交点分别是 C，D．当 $t\le 1$ 时，点 C 位于点 D 上方，直接写出 b 的取值范围.

24. 如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 为⊙O 上两点，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$，连接 AC，BC，AD，BD，过点 D 作 $DE//AB$ 交 CB 的延长线于点 E.



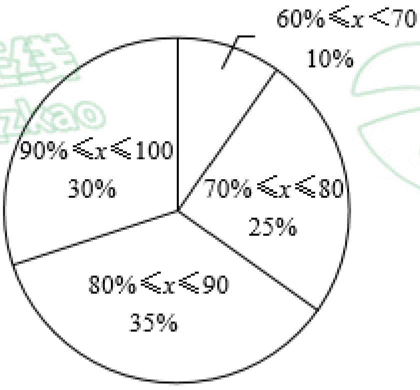
（1）求证：直线 DE 是⊙O 的切线；

（2）若 $AB=10$，$BC=6$，求 AD，BE 的长.

25. 2022 年是中国共产主义青年团成立 100 周年，某中学为普及共青团知识，举行了一次知识竞赛（百分制）．为了解七、八年级学生的答题情况，从中各随机抽取了 20 名学生的成绩，并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析．下面给出部分信息.

a．七年级学生竞赛成绩的频数分布表及八年级学生竞赛成绩的扇形统计图：

分组分数	频数	频率
$50\le x<60$	1	0.05
$60\le x<70$	2	0.10
$70\le x<80$	5	0.25
$80\le x<90$	7	m
$90\le x<100$	5	0.25
合计	20	1



b．七年级学生竞赛成绩数据在 $80\le x<90$ 这一组的是：

80 80 82 85 85 85 89

c．七、八两年级竞赛成绩数据的平均数、中位数、众数以及方差如下：

年级	平均数	中位数	众数	方差
七年级	82.0	n	85	109.9
八年级	82.4	84	85	72.1

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m，n 值：$m=$______，$n=$______；八年级学生竞赛成绩扇形统计图中，表示 $70\le x<80$ 这组数据的扇形圆心角的度数是______°；

（2）在此次竞赛中，竞赛成绩更好的是______（填“七”或“八”）年级，理由为______；

（3）竞赛成绩 90 分及以上记为优秀，该校七、八年级各有 200 名学生，估计这两个年级成绩优秀的学生共约______人．

26. 在平面直角坐标 xOy 中，点 $(4,2)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+2(a>0)$ 上．

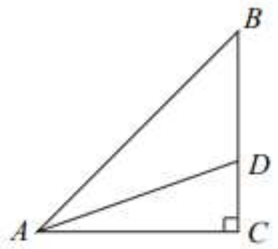
（1）求抛物线的对称轴；

（2）抛物线上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，且 $t<x_1<t+1$，$4-t<x_2<5-t$．

①当 $t=\frac{3}{2}$ 时，比较 y_1，y_2 的大小关系，并说明理由；

②若对于 x_1，x_2，都有 $y_1 \neq y_2$，直接写出 t 的取值范围.

27. 如图，$\triangle ACB$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，D 为边 BC 上一点（不与点 C 重合），$CD<BD$，点 E 在 AD 的延长线上，且 $ED=AD$，连接 BE，过点 B 作 BE 的垂线，交边 AC 于点 F.

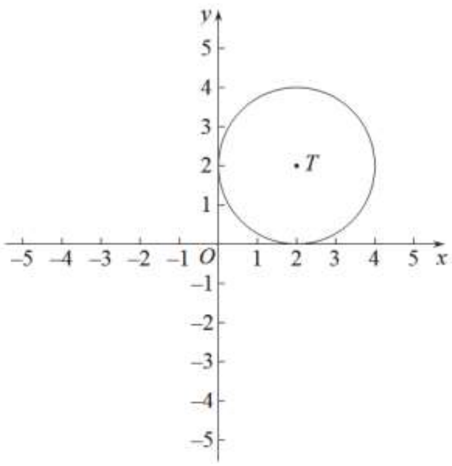


（1）依题意补全图形；

（2）求证：$BE=BF$；

（3）用等式表示线段 AF 与 CD 的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 不在坐标轴上，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1，点 P 关于 y 轴的对称点为 P_2，称 $\triangle P_1PP_2$ 为点 P 的“关联三角形”.



（1）已知点 $A(1，2)$，求点 A 的“关联三角形”的面积；

（2）如图，已知点 $B(m，n)$，$\odot T$ 的圆心为 $T(2，2)$，半径为 2．若点 B 的“关联三角形”与 $\odot T$ 有公共点，直接写出 m 的取值范围；

（3）已知 $\odot O$ 的半径为 r，$OP=2r$，若点 P 的“关联三角形”与 $\odot O$ 有四个公共点，直接写出 $\angle PP_1P_2$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1 - 8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 在△ABC中，$AB=3$，$AC=2$，$BC=a$，a的值可能是（　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形中任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边即可求解.

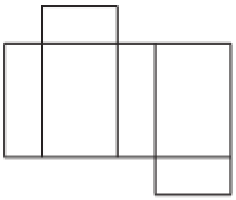
【详解】解：$\because AB-AC<BC<AB+AC$

$\therefore 3-2<a<3+2$，即$1<a<5$，

故选：B.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系，正确理解三角形三边关系是解本题的关键.

2. 如图是某个几何体的展开图，该几何体是（　）



A. 长方体　　B. 正方体　　C. 三棱柱　　D. 圆柱

【答案】A

【解析】

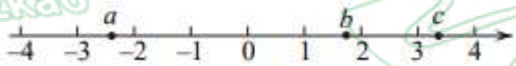
【分析】根据长方体的展开图解答.

【详解】解：由图可知，这个几何体是长方体.

故选：A.

【点睛】本题考查了展开图折叠成几何体，熟记长方体的展开图的形状是解题的关键.

3. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a>-2$　　B. $a+3>c$　　C. $-a>b$　　D. $ab<ac$

【答案】C

【解析】

【分析】由数轴及题意可得$-3<a<-2$，$1<b<2<c$，依此逐一判断各项即可.

【详解】解：A.由$-3<a<-2$，可知 A 选项不符合题意；

B.由$-3<a<-2$，可知$0<a+3<1<c$，可知 B 选项不符合题意；

C.由$-3<a<-2$，可知$2<-a<3$，故$-a>b$，可知 C 选项符合题意；

D.因为$b<c$，$a<0$，故$ab>ac$，可知 D 选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了实数与数轴的知识，利用数轴比较实数的大小是解题的关键．

4. 下列运算正确的是( )

A. $a^2+a^3=a^5$ B. $a^2\cdot a^3=a^5$ C. $(-a^2)^3=a^6$ D. $-2a^3b\div ab=-2a^2b$

【答案】B

【解析】

【分析】根据整式的运算法则即可求出答案．

【详解】A、a^2与a^3不是同类项不能合并，故 A 错误；

B、$a^2\cdot a^3=a^5$，底数不变指数相加，故 B 正确；

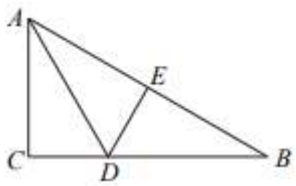
C、$(-a^2)^3=a^6$，底数不变指数相乘，故 C 错误；

D、$-2a^3b\div ab=-2a^2$，原选项计算错误．

故选 B．

【点睛】本题考查整式的运算，解题的关键是熟练运用整式的运算法则，本题属于基础题型．

5. 如图，$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{3}$，D，E分别为CB，AB上的点，$CD=1$，$AD=BD=2$，若$AE=EB$，则DE的长为（ ）



A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】先根据ΔACD三边长判断各角的度数，然后利用等腰三角形“三线合一”求出$\angle AED=90°$，再$\Delta ACD\cong\Delta AED$，最后根据全等三角形的性质求出$DE$的长．

【详解】解：$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{3}$，$CD=1$，$AD=2$，

$\because\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2=2^2$，

$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$，

$\therefore\angle C=90°$，

$\therefore\sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\angle CAD=30°$，$\angle ADC=60°$，

$\because AD=BD=2$，$AE=EB$，

$\therefore DE\perp AB,\angle DAB=\angle B$，

$\therefore\angle AED=\angle C=90°$

$\because\angle ADC=\angle DAB+\angle B=2\angle DAB=60°$，

$\therefore\angle DAB=\angle CAD=30°$，

又∵ $AD = AD$，

∴ $\triangle ACD \cong \triangle AED(AAS)$，

∴ $DE = CD = 1$，

故选：D．

【点睛】本题考查了直角三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，根据特殊三角函数值求解度，三角形外角的性质，根据三角形三边确定三角形各角的度数是解本题的关键．

6. 方程组 $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ 的解为（　）

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$　　C. $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

【答案】A

【解析】

【分析】运用代入消元法或者加减消元法可求解，或者将 x 和 y 的值直接代入即可．

详解】$\begin{cases} x-y=3① \\ 2x+y=6② \end{cases}$

①+②： $x-y+2x+y=3+6$

解得： $x=3$

将 $x=3$ 代入①得： $3-y=3$

解得： $y=0$

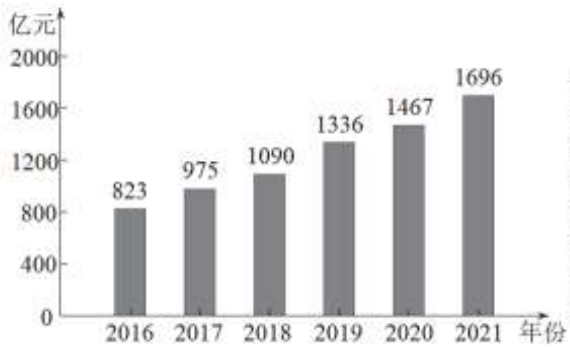
∴ $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

故选：A．

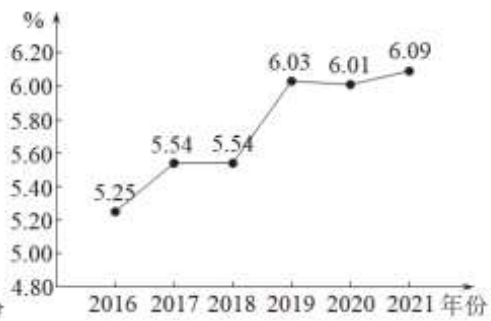
【点睛】本题考查了二元一次方程组的求解，熟练运用代入消元法或者加减消元法是解决问题的关键．

7. 研究与试验发展（$R\&D$）经费是指报告期为实施研究与试验发展（$R\&D$）活动而实际发生的全部经费支出．基础研究活动是研究与试验发展（$R\&D$）活动的重要组成．下面的统计图是自 2016 年以来全国基础研究经费及占 $R\&D$ 经费比重情况．

2016-2021 年全国基础研究经费情况



2016-2021 年全国基础研究经费
占 R&D 经费比重情况



根据统计图提供的信息，下面四个推断中错误的是（　）

A. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费逐年上升

B. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费占 $R\&D$ 经费比重逐年上升

C. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费平均值超过 1000 亿元

D. 2021 年全国基础研究经费比 2016 年的 2 倍还多

【答案】B

【解析】

【分析】根据条形统计图和折线统计图中的数据逐个分析即可．

【详解】A. 根据条形统计图可以发现，2016 年至 2021 年，全国基础研究经费逐年上升，选项正确，不符合题意；

B. 2019 年至 2020 年，全国基础研究经费占 $R\&D$ 经费比重是下降的，选项错误，符合题意；

C. 2016 年至 2021 年，全国基础研究经费平均值超过 1000 亿元，选项正确，不符合题意；

D. 2021 年全国基础研究经费 1696 比 2016 年 823 的 2 倍还多，选项正确，不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查从统计图表中提取数据，需要 B 选项中的反例差距极小，需要仔细观察．

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	…	-1	0	1	3	…
y	…	0	-1.5	-2	0	…

根据表格中的信息，得到了如下的结论：

①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可改写为 $y=a(x-1)^2-2$ 的形式

②二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下

③关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1.5$ 的两个根为 0 或 2

④若 $y>0$，则 $x>3$

其中所有正确的结论为（　）

A ①④　　　　B. ②③　　　　C. ②④　　　　D. ①③

【答案】D

【解析】

【分析】根据表格中的数据和二次函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，本题得以解决．

【详解】解：由表格可得，

∵该函数的图象经过（-1，0），（3，0），

∴该函数图象的对称轴是直线 $x=\dfrac{-1+3}{2}=1$，

∴该函数图象的顶点坐标是（1，-2），有最小值，开口向上，

∴二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可改写为 $y=a(x-1)^2-2$ 的形式，

故选项①正确，选项②错误；

∵该函数的图象经过（0，-1.5），其关于对称轴直线 $x=1$ 的对称点为（2，-1.5），

∴关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1.5$ 的两个根为 0 或 2，故选项③正确；

∵该函数的图象经过（-1，0），（3，0），

若$y>0$，则$x>3$或$x<-1$，故选项④错误；

综上，正确的结论为①③，

故选：D．

【点睛】本题考查的是抛物线与x轴的交点，要求学生非常熟悉函数与坐标轴的交点、顶点等点所代表的意义、图象上点的坐标特征等．

第二部分　非选择题

二、填空题（共16分，每题2分）

9. 若代数式$\sqrt{x+1}$有意义，则实数x的取值范围是______．

【答案】$x\geq-1$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件可得：$x+1\geq0$，即可求得．

【详解】解：∵代数式$\sqrt{x+1}$有意义

∴$x+1\geq0$，

∴$x\geq-1$．

故答案为：$x\geq-1$．

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数．

10. 分式方程$\frac{3}{x+2}=\frac{1}{x}$的解为_____．

【答案】$x=1$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到x的值，经检验即可得到分式方程的解．

【详解】解：去分母得：$3x=x+2$，

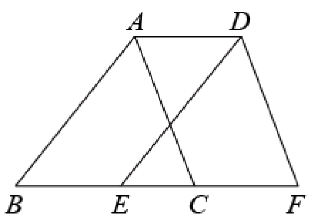
解得：$x=1$，

经检验$x=1$是分式方程的解．

故答案为：$x=1$．

【点睛】本题考查解分式方程，解题的关键是熟练掌握解分式方程的步骤，注意解分式方程必须检验．

11. 如图，将$\triangle ABC$沿BC方向平移一定的距离得到$\triangle DEF$．请写出一条正确的结论，可以为______．



【答案】$BC=EF$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据图形平移的性质，可以得到$\triangle ABC$与$\triangle DEF$对应的边，对应的角不变，从而写出符合题意的答案．

【详解】∵$\triangle ABC$沿BC方向平移一定的距离得到$\triangle DEF$，

∴$BC=EF$或$BE=CF$或$AB=DE$或$AC=DF$或$AD=BE$或$AD=CF$，

$\angle B=\angle DEF$， $\angle BAC=\angle EDF$， $\angle ACB=\angle DFE$，

答案不唯一

【点睛】本题主要考查了平移的性质，理解通过平移的两个图形，对应边不变，对应角不变是解题关键.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2,m)$， $B(n,3)$ 都在反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象上，则 $\dfrac{m}{n}$ 的值为______.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】把 $A(2,m)$， $B(n,3)$ 代入反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$，求出 m、n 的值即可.

【详解】∵点 $A(2,m)$， $B(n,3)$ 都在反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象上

∴ $\begin{cases} m=\dfrac{6}{2} \\ 3=\dfrac{6}{n} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$

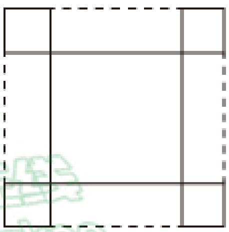
∴ $\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{2}$

故答案为： $\dfrac{3}{2}$.

【点睛】本题考查反比例函数解析式，把坐标代入解析式是解题的关键.

13.

$m>0$， $n>0$，若 $m^2+4n^2=13$， $mn=3$，请借助下图直观分析，通过计算求得 $m+2n$ 的值为______.



【答案】5

【解析】

【分析】设图形中小正方形边长为 n，最中间的正方形边长为 m，则大正方形的边长为 $m+2n$，根据最大正方形的面积计算即可.

【详解】设图形中小正方形边长为 n，最中间的正方形边长为 m，则大正方形的边长为 $m+2n$，

∴大正方形的面积为： $m^2+4n^2+4mn=(m+2n)^2$

∵ $m^2+4n^2=13$， $mn=3$

∴ $(m+2n)^2=m^2+4n^2+4mn=13+12=25$

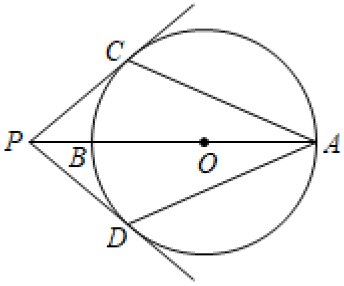
∵ $m>0$， $n>0$，

$\therefore m+2n=5$.

故答案为：5.

【点睛】本题考查完全平方公式与几何图形，利用数形结合思想表示图形的边长是解题的关键.

14. 如图，AB 为⊙O 的直径，点 P 在 AB 的延长线上，PC，PD 分别与⊙O 相切于点 C，D，若 $\angle CPA=40°$，则 $\angle CAD$ 的度数为______°.

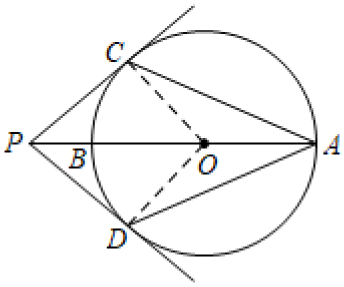


【答案】50

【解析】

【分析】连接 OC、OD，利用切线的性质得到 $OC\perp CP$，$OD\perp DP$，利用四边形内角和定理得到 $\angle COD$，根据圆周角定理即可求得到 $\angle CAD$.

【详解】解：连接 OC、OD，如图，



$\because PC$，PD 与⊙O 相切，切点分别为 C，D，

$\therefore OC\perp CP$，$OD\perp DP$，

$\because OP=OP$，$OC=OD$，

$\therefore \triangle POC\cong\triangle POD(\text{HL})$，

$\therefore \angle CPO=\angle DPO$，

$\because \angle CPA=40°$，

$\therefore \angle CPD=80°$，

$\therefore \angle COD=360°-80°-90°-90°=100°$，

$\because \angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle COD=50°$，

故答案为：50.

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，四边形内角和定理，熟练掌握圆的切线垂直于经过切点的半径．若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系.

15. 某班级学生分组做抛掷瓶盖的试验，各组试验结果如下表：

累计抛掷次数	100	200	300	400	500	600
盖面朝上次数	54	105	158	212	264	319
盖面朝上的频率	0.5400	0.5250	0.5267	0.5300	0.5280	0.5317

根据表格中的信息，估计抛掷一枚这样的瓶盖，落地后盖面朝上的概率为______．（精确到 0.01）

【答案】0.53.

【解析】

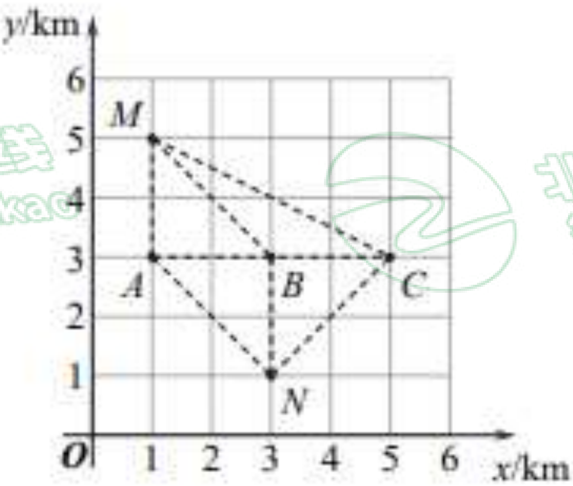
【分析】根据频率估计概率解答即可.

【详解】掷一枚瓶盖，观察发现，随着实验的次数增多，盖面朝上的频率逐渐稳定并趋向于 0.53，所以概率为 0.53.

故答案为：0.53.

【点睛】本题考查了利用频率估计概率的知识，解答此题的关键在于用频率估计概率得到的是近似值，随着实验的次数增多，值越来越精确.

16. 如图，某建筑公司有 A(1，3)，B(3，3)，C(5，3)三个建筑工地，三个工地的水泥日用量分别为 a 吨，b 吨，c 吨．有 M(1，5)，N(3，1)两个原料库供应水泥．使用一辆载重量大于(a+b+c)吨的运输车可沿图中虚线所示的道路运送水泥．为节约运输成本，公司要进行运输路线规划，使总的“吨千米数”（吨数×运输路程千米数）最小．若公司安排一辆装有(a+c)吨的运输车向 A 和 C 工地运送当日所需的水泥，且 a>c，为使总的“吨千米数”最小，则应从______原料库（填“M”或“N”）装运；若公司计划从 N 原料库安排一辆装有(a+b+c)吨的运输车向 A，B，C 三个工地运送当日所需的水泥，且 a:b:c=3:2:1，为使总的“吨千米数”最小，写出向三个工地运送水泥的顺序______（按运送的先后顺序依次排列即可）.



【答案】　①. M　②. N-B-A-C

【解析】

【分析】根据题意列式，利用整式的加减运算，分类求解即可.

【详解】解：∵MA+AC<NA+AC，

若公司安排一辆装有$(a+c)$吨的运输车向 A 和 C 工地运送当日所需的水泥，且 $a>c$，为使总的“吨千米数”最小，则应从 M 料库装运；

∵$N(3，1)$，$A(1，3)$，$B(3，3)$，$C(5，3)$，

∴$NA=NC=2\sqrt{2}$，$NB=AB=BC=2$，

∵$a:b:c=3:2:1$，

∴$a=3c$，$b=2c$，

当按 N-A-B-C 运输时：$2\sqrt{2}\times6c+2\times3c+2c=(8+12\sqrt{2})c\approx24.97c$；

按 N-B-A-C 运输时：$2\times6c+2\times4c+(2+2)c=24c$；

按 N-B-C-A 运输时：$2\times6c+2\times4c+(2+2)\times3c=32c$；

∵$24c<24.97c<32c$，

∴按 N-B-A-C 运输时，总的“吨千米数”最小，

故答案为：M；N-B-A-C.

【点睛】本题考查了坐标与图形，整式加减运算的应用，解答此类问题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

三、解答题（共 68 分，第 17－21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24－26 题，每题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$3^0-4\sin45°+\sqrt{8}+\left|1-\sqrt{2}\right|$.

【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】先计算零指数，并化简二次根式和绝对值，把特殊角三角函数值代入，再计算加减法即可.

【详解】解：$3^0-4\sin45°+\sqrt{8}+\left|1-\sqrt{2}\right|$

$=1-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1$

$=1-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查实数混合运算，涉及知识有：零指数幂运算，二次根式化简，求无理数绝对值，特殊角的三角函数值，熟练掌握实数的运算法则和熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

18. 解不等式组：$\begin{cases}3(x+1)<x-1\\ \dfrac{x+9}{2}>2x\end{cases}$ 并写出它的最大整数解.

【答案】－3

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到，确定不等式组的解集.

【详解】$\begin{cases} 3(x+1)<x-1① \\ \dfrac{x+9}{2}>2x② \end{cases}$

由①得，$x<-2$，

由②得，$x<3$，

∴不等式组的解集为$x<-2$，

最大的整数解是－3.

【点睛】本题考查的是一元一次不等式组的整数解，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19. 已知$m^2-m=1$，求代数式$(2m+1)(2m-1)-m(m+3)$的值.

【答案】2

【解析】

【分析】根据平方差公式、合并同类项，化简代数式即可求解.

【详解】解：$(2m+1)(2m-1)-m(m+3)$

$=4m^2-1-m^2-3m$

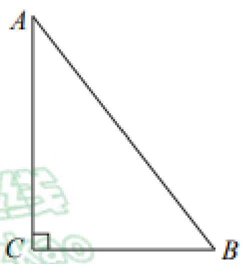
$=3(m^2-m)-1$

$\because m^2-m=1$

$\therefore$原式$=3\times1-1=2$

【点睛】本题考查了代数式、整式加减、合并同类项、平方差公式等知识点，熟练的正确运算是解决问题的关键.

20. 已知：如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CB<CA$.



求作：线段AB上的一点M，使得$\angle MCB=\angle A$.

作法：①以点C为圆心，CB长为半径作弧，交AB于点D；

②分别以点B，D为圆心，大于$\dfrac{1}{2}BD$长为半径作弧，两弧在AB的右侧相交于点E；

③作直线CE，交AB于点M. $\angle MCB$即为所求.

根据小伟设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接CD，ED，EB.

$\because CD=CB$，$ED=EB$，

∴CE 是 DB 的垂直平分线（______）（填推理的依据）．

∴$CM\perp AB$．

∴$\angle MCB+\angle B=90°$．

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle A+\angle B=90°$．

∴$\angle MCB=\angle A$（______）（填推理的依据）．

【答案】（1）见解析　（2）与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上; 等角的余角相等

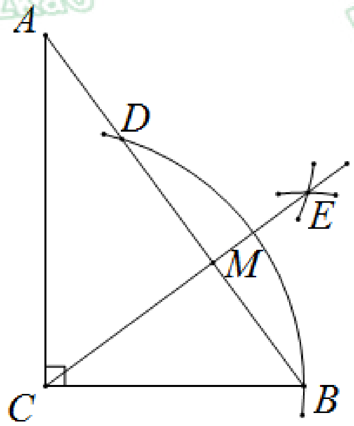
【解析】

【分析】（1）根据作法作图可得点 M;

（2）先根据线段垂直平分线的逆定理可得 ME 是 AB 的垂直平分线，又根据等角的余角相等可得结论．

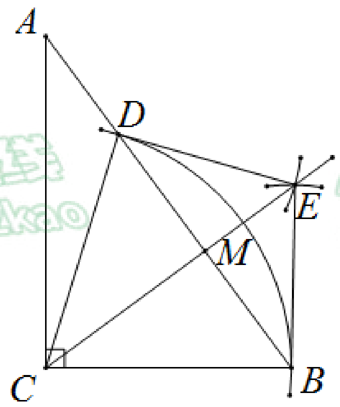
【小问 1 详解】

解：点 M 如图所示．



【小问 2 详解】

证明：连接 CD，ED，EB．



∵$CD=CB$，$ED=EB$，

∴CE 是 DB 的垂直平分线（与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上）．

∴$CM\perp AB$．

∴$\angle MCB+\angle B=90°$．

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle A+\angle B=90°$．

∴$\angle MCB=\angle A$（等角的余角相等）．

【点睛】本题考查线段的垂直平分线的性质及作图，解题的关键是学会基本作图：作一条线段的垂直平分线.

21. 已知：关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$.

（1）求证：不论 m 取何值，方程总有两个不相等的实数根；

（2）选择一个你喜欢的整数 m 的值代入原方程，并求出这个方程的解.

【答案】（1）证明过程见详解

（2） $x_1=1$， $x_2=-1$. （答案不唯一）

【解析】

【分析】（1）求出方程的判别式即可证明；

（2）m 的值越简单越好，令 m=0，即可求解.

【小问 1 详解】

证明：

方程的判别式 $\Delta=(-2m)^2-4\times1\times(m^2-1)=4>0$，

∴方程总有两个不相等的实数根；

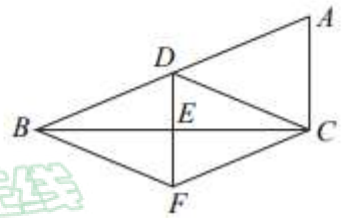
【小问 2 详解】

令 m=0，则方程变为 $x^2-1=0$，

解得 $x_1=1$， $x_2=-1$. （答案不唯一）

【点睛】本题主要考查了利用方程的判别式证明方程恒有两个不相等的实数解，解题的关键是正确求出方程的判别式为正数是解答本题的关键.

22. 如图所示，△ABC 中，∠ACB=90°，D，E 分别为 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 EF=DE，连接 CD，CF，BF.



（1）求证：四边形 $BFCD$ 是菱形；

（2）若 $\cos A=\dfrac{5}{13}$，DE=5，求菱形 $BFCD$ 的面积.

【答案】（1）见解析 （2）菱形 $BFCD$ 的面积为 120.

【解析】

【分析】（1）先证四边形 $BFCD$ 是平行四边形，再根据直角三角形斜边上的中线性质得到 $CD=\dfrac{1}{2}AB=BD$，即可得出结论；

（2）由题意推出 DE 是△ABC 的中位线，从而得到∠BDE=∠A，再由余弦的定义，及勾股定理可求出菱形的两条对角线的长度，从而得到菱形的面积.

【小问 1 详解】

证明：∵点 E 为 BC 的中点，

∴$CE=BE$，

又∵$EF=DE$，

∴四边形 $BFCD$ 是平行四边形，

∵D 是边 AB 的中点，$\angle ACB=90°$，

∴$CD=\frac{1}{2}AB=BD$，

∴平行四边形 $BFCD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：∵D，E 分别为 AB，BC 的中点，

∴$DE\parallel AC$，

∴$\angle BDE=\angle A$，

∵$\cos A=\frac{5}{13}$，

∴$\cos\angle BDE=\frac{DE}{BD}=\frac{5}{13}$，

∵$DE=5$，

∴$BD=13$，

∴$BE=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

∴$DF=2DE=10$，$BC=2BE=24$，

∴菱形 $BFCD$　面积$=\frac{1}{2}\times10\times24=120$.

【点睛】本题考查菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质、勾股定理、三角形的中位线定理等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明四边形 $BFCD$ 为菱形是解题的关键.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y=\frac{1}{2}x+b$ 与直线 $l_2: y=2x$ 交于点 $A(m,n)$.

（1）当 $m=2$ 时，求 n，b 的值；

（2）过动点 $P(t,0)$ 且垂直于 x 轴的直线与 l_1，l_2 的交点分别是 C，D. 当 $t\le1$ 时，点 C 位于点 D 上方，直接写出 b 的取值范围.

【答案】（1）$n=4$；$b=3$；

（2）$b>\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）将点 A（2，n）代入 $y=2x$，求出 n 的值，得到 A 点坐标，再将点 A 坐标代入直线 l_1 的表达式求得 b 的值；

（2）把 $x=t$ 分别代入直线 l_1 与直线 l_2 的解析式，求出 C，D 两点的纵坐标，根据点 C 位于点 D 上方，列出关于 t 的不等式，即可求解.

【小问 1 详解】

解：若 m=2 时，$A(2,n)$，

∵直线 $l_2: y=2x$ 过点 $A(2,n)$，

∴n=2×2=4，

∴ $A(2,4)$，

∵直线 $l_1: y=\frac{1}{2}x+b$ 过点 $A(2,4)$，

∴ $4=\frac{1}{2}\times 2+b$，

解得：b=3，

【小问 2 详解】

∵过动点 P（t，0）且垂直于 x 轴的直线与 l_1，l_2 的交点分别为 C，D，

∴C（t，$\frac{1}{2}t+b$），D（t，2t），

∵点 C 位于点 D 上方，

∴ $\frac{1}{2}t+b$ ＞2t，

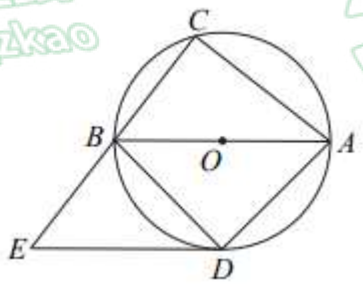
解得 b＞$\frac{3}{2}t$，

∵ $t\le 1$，

∴b＞$\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数图象上点的坐标特征，难度适中.

24. 如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 为⊙O 上两点，$BD=AD$，连接 AC，BC，AD，BD，过点 D 作 DE//AB 交 CB 的延长线于点 E.



（1）求证：直线 DE 是⊙O 的切线；

（2）若 AB=10，BC=6，求 AD，BE 的长.

【答案】（1）见解析　（2）AD=5$\sqrt{2}$，BE=$\frac{25}{4}$.

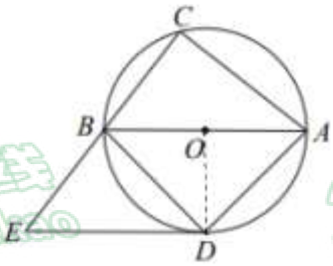
【解析】

【分析】（1）连接 OD，根据圆周角定理得到$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=90^\circ$，根据平行线的性质得到$\angle ODE=90^\circ$，于是得到结论；

（2）连接 CD，根据圆周角定理得到$\angle ADB=\angle ACB=90^\circ$，推出$\triangle ABD$是等腰直角三角形，得到 $AB=10$，解直角三角形得到 $AC=8$，求得$\angle CAD=\angle DBE$，根据平行线的性质得到$\angle BDE=\angle OBD=45^\circ$，根据相似三角形的性质即可得到结论．

【小问 1 详解】

证明：连接 OD，



∵AB 为⊙O 的直径，点 D 是半圆 AB 的中点，

∴$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=90^\circ$，

∵$DE\parallel AB$，

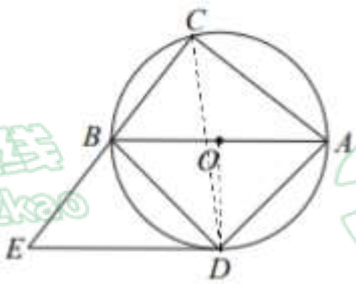
∴$\angle ODE=90^\circ$，

∴$OD\perp DE$，

∴直线 DE 是⊙O 的切线；

【小问 2 详解】

解：连接 CD，



∵AB 为⊙O 的直径，

∴$\angle ADB=\angle ACB=90^\circ$，

∵ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$，

∴$DB=AD$，

∴$\triangle ABD$ 是等腰直角三角形，

∵$AB=10$，

∴$AD=10\sin\angle ABD=10\sin45^\circ=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$，

∵$AB=10$，$BC=6$，

∴$AC=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∵四边形 $ACBD$ 是圆内接四边形，

∴$\angle CAD+\angle CBD=180°$，

∵$\angle DBE+\angle CBD=180°$，

∴$\angle CAD=\angle DBE$，

由（1）知$\angle AOD=90°$，$\angle OBD=45°$，

∴$\angle ACD=45°$，

∵$DE\,//\,AB$，

∴$\angle BDE=\angle OBD=45°$，

∴$\angle ACD=\angle BDE$，

∴$\triangle ACD\backsim\triangle BDE$，

∴$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AD}{BE}$，

∴$\dfrac{8}{5\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{BE}$，

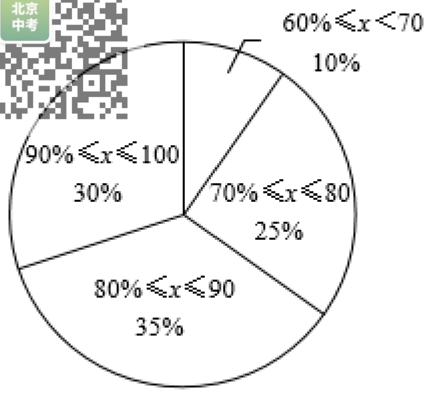
解得：$BE=\dfrac{25}{4}$．

【点睛】本题考查了切线的判定和性质，圆周角定理，圆内接四边形的性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，特殊角的三角函数，正确的作出辅助线是解题的关键．

25. 2022 年是中国共产主义青年团成立 100 周年，某中学为普及共青团知识，举行了一次知识竞赛（百分制）．为了解七、八年级学生的答题情况，从中各随机抽取了 20 名学生的成绩，并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析．下面给出部分信息．

a．七年级学生竞赛成绩的频数分布表及八年级学生竞赛成绩的扇形统计图：

分组/分数	频数	频率
$50\le x<60$	1	0.05
$60\le x<70$	2	0.10
$70\le x<80$	5	0.25
$80\le x<90$	7	m
$90\le x<100$	5	0.25
合计	20	1



b．七年级学生竞赛成绩数据在$80\le x<90$这一组的是：

80 80 82 85 85 85 89

c．七、八两年级竞赛成绩数据的平均数、中位数、众数以及方差如下：

年级	平均数	中位数	众数	方差
七年级	82.0	n	85	109.9
八年级	82.4	84	85	72.1

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中m，n的值：$m=$______，$n=$______；八年级学生竞赛成绩扇形统计图中，表示$70\le x<80$这组数据的扇形圆心角的度数是______°；

（2）在此次竞赛中，竞赛成绩更好的是______（填“七”或“八”）年级，理由为______；

（3）竞赛成绩90分及以上记为优秀，该校七、八年级各有200名学生，估计这两个年级成绩优秀的学生共约______人.

【答案】（1）0.35；81；90°；

（2）八；从平均数、中位数、众数来看，八年级成绩都高于七年级，从方差来看，八年级的方差小于七年级的方差，说明八年级学生的成绩比八年级稳定；

（3）110

【解析】

【分析】（1）由$\frac{7}{m}=20$得出m的值，再根据中位数的定义求出七年级竞赛成绩数据的中位数，最后再求出表示$70\le x<80$这组数据的扇形圆心角的度数；

（2）从平均数、中位数、众数、方差四个方面进行比较；

（3）各用200去乘七、八年级90以上学生所占的比例即可.

【小问1详解】

∵七年级所抽取的20名学生竞赛成绩数据在$80\le x<90$这一组的频数是7，频率是m，

∴$\frac{7}{m}=20$，解得：$m=0.35$，

七年级学生竞赛成绩数据的中位数是第 10 位及第 11 位同学的平均数，即在 $80 \le x < 90$ 这一组的第 2 个与第 3 个数的平均成绩，

$\therefore n = \dfrac{80+82}{2} = 81$，

$\because$ 从扇形统计图看，七年级所抽取的 20 名学生竞赛成绩数据在 $70 \le x < 80$ 这一组占比为 25%，

$\therefore$ 七年级表示 $70 \le x < 80$ 这组数据的扇形圆心角的度数是 $25\% \times 360° = 90°$，

故答案为：0.35；81；90°；

【小问 2 详解】

在此次竞赛中，竞赛成绩更好的是八年级，

理由是：从平均数、中位数、众数来看，八年级成绩都高于七年级，从方差来看，八年级的方差小于七年级的方差，说明八年级学生的成绩比八年级稳定，故竞赛成绩更好的是八年级；

故答案为：八；从平均数、中位数、众数来看，八年级成绩都高于七年级，从方差来看，八年级的方差小于七年级的方差，说明八年级学生的成绩比八年级稳定；

【小问 3 详解】

估计这两个年级成绩优秀的学生共约：$200 \times 0.25 + 200 \times 30\% = 110$（人），

故答案为：110.

【点睛】本题考查中位数、众数、平均数以及频数分布表、扇形统计图，理解中位数、众数、平均数的定义是解决问题的前提.

26. 在平面直角坐标 xOy 中，点 $(4,2)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\,(a > 0)$ 上.

（1）求抛物线的对称轴；

（2）抛物线上两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，且 $t < x_1 < t+1$，$4-t < x_2 < 5-t$.

①当 $t = \dfrac{3}{2}$ 时，比较 y_1，y_2 的大小关系，并说明理由；

②若对于 x_1，x_2，都有 $y_1 \ne y_2$，直接写出 t 的取值范围.

【答案】（1）$x = 2$

（2）①$y_1 < y_2$，理由见详解；②$t \le \dfrac{3}{2}$ 或 $t \ge \dfrac{5}{2}$

【解析】

【分析】（1）对于抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$，令 $x = 0$，可得 $y = 2$，可知点（0，2）在抛物线上，根据点 $(4,2)$ 也在抛物线上，由抛物线的对称性，可知该抛物线的对称轴为 $x = 2$；

（2）根据题意，大致画出抛物线图象. ①当 $t = \dfrac{3}{2}$ 时，根据题意可计算 x_1、x_2 的取值范围，再结合抛物线图象判断 y_1，y_2 的大小即可；②分情况讨论，当 $t = 0$、$t < 0$、$t > 0$ 三种情况下，y_1 区域和 y_2 区域的位置及移动方向，确定满足条件的 t 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：对于抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$，令 $x = 0$，可得 $y = 2$，

即该抛物线与 y 轴的交点为点（0，2），

又∵点 $(4,2)$ 也在抛物线上，

∴根据抛物线的对称性，可知该抛物线的对称轴为 $x=\dfrac{0+4}{2}=2$；

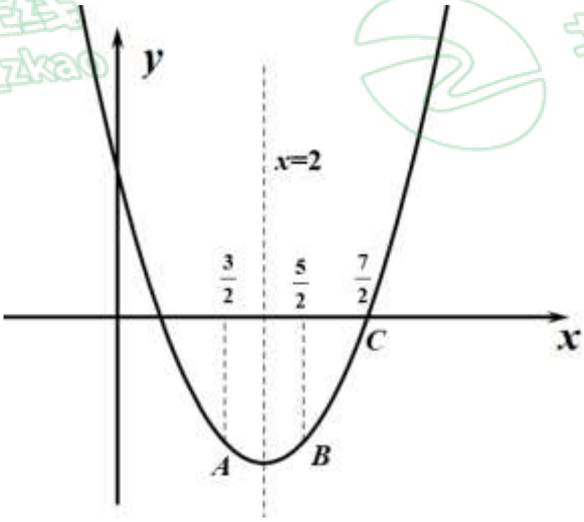
【小问 2 详解】

根据题意，大致画出抛物线图象，如下图，

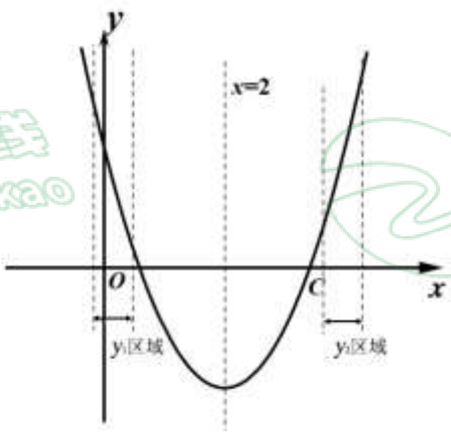
①当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，根据题意可知，$t+1=\dfrac{5}{2}$，$4-t=\dfrac{5}{2}$，$5-t=\dfrac{7}{2}$，

即有 $\dfrac{3}{2}<x_1<\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5}{2}<x_2<\dfrac{7}{2}$，

由图象可知，$y_1<y_2$；



②若对于 x_1，x_2，都有 $y_1\neq y_2$，可分情况讨论，如下图：



当 $t=0$ 时，$0<x_1<1$，$4<x_2<5$，由图象对称性可知，$y_1\neq y_2$ 成立；

当 $t<0$ 时，y_1 区域向左移动，y_2 区域向右移动且都移动 t 个单位，由图象对称性可知，$y_1\neq y_2$ 成立；

当 $t>0$ 时，y_1 区域、y_2 区域相向移动，

两区域相遇时，有 $t+1=4-t$，解得 $t=\dfrac{3}{2}$，在 $0<t\leq\dfrac{3}{2}$ 时，$y_1\neq y_2$ 成立；

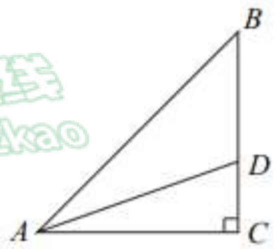
相遇后，再继续运动，两区域分离时，有$t=5-t$，解得$t=\frac{5}{2}$；

分离后，即$t\geq\frac{5}{2}$时，随着t的增大，由图象对称性可知，$y_1\neq y_2$成立；

综上所述，满足条件的t的取值范围为：$t\leq\frac{3}{2}$或$t\geq\frac{5}{2}$.

【点睛】本题主要考查了二次函数图象与性质及二次函数的综合应用，解题关键是根据题意画出图形，用数形结合和分情况讨论的数学思想分析问题.

27. 如图，$\triangle ACB$中，$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，D为边BC上一点（不与点C重合），$CD<BD$，点E在AD的延长线上，且$ED=AD$，连接BE，过点B作BE的垂线，交边AC于点F.



（1）依题意补全图形；

（2）求证：$BE=BF$；

（3）用等式表示线段AF与CD的数量关系，并证明.

【答案】（1）见解析　（2）见解析

（3）$AF=2CD$，证明见解析

【解析】

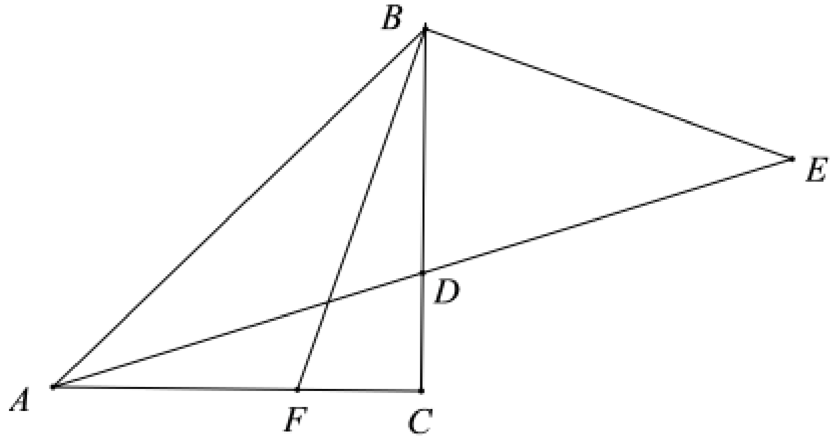
【分析】（1）根据题目步骤作图即可；

（2）过E作$EM\perp BC$于M，先由中线倍长证明$\triangle ADC\cong\triangle EDM$，得到$AC=EM=BC$，再证明$\triangle BCF\cong\triangle EMB$，得到$BF=BE$；

（3）由（2）中全等可得到$FC=BM, CD=DM$，即可推理出$AF=CM=2CD$.

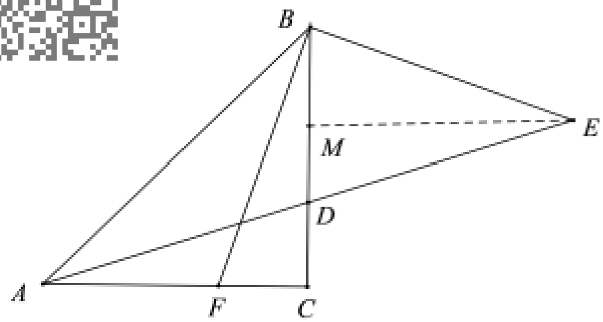
【小问1详解】

依题意补全图形如下：



【小问2详解】

过 E 作 $EM \perp BC$ 于 M



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDM$ 中

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle EMD \\ \angle ADC = \angle EDM \\ AD = ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDM\ (AAS)$

$\therefore AC = EM$

$\because AC = BC$

$\therefore AC = EM = BC$

$\because BE \perp BF$

$\therefore \angle FBC = \angle BEM = 90° - \angle MBE$

在 $\triangle FBC$ 和 $\triangle EBM$ 中

$$\begin{cases} \angle FBC = \angle BEM \\ BC = EM \\ \angle C = \angle EMB \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle EMB\ (ASA)$，

$\therefore BF = BE$

【小问 3 详解】

$AF = 2CD$，证明如下：

由（2）得 $\triangle ADC \cong \triangle EDM$，$\triangle BCF \cong \triangle EMB$

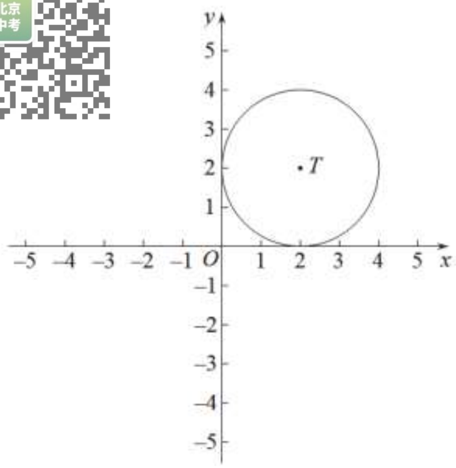
$\therefore FC = BM, CD = DM$，

$\therefore AC - FC = BC - BM$，$CM = 2CD$

$\therefore AF = CM = 2CD$.

【点睛】本题考查全等三角形的性质与判定，解题的关键是根据倍长中线模型作垂直构造全等.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 不在坐标轴上，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1，点 P 关于 y 轴的对称点为 P_2，称 $\triangle P_1PP_2$ 为点 P 的“关联三角形”.



（1）已知点 $A(1，2)$，求点 A 的“关联三角形”的面积；

（2）如图，已知点 $B(m，n)$，$\odot T$ 的圆心为 $T(2，2)$，半径为 2．若点 B 的“关联三角形”与 $\odot T$ 有公共点，直接写出 m 的取值范围；

（3）已知 $\odot O$ 的半径为 r，$OP=2r$，若点 P 的“关联三角形”与 $\odot O$ 有四个公共点，直接写出 $\angle PP_1P_2$ 的取值范围．

【答案】（1）4　（2）$2-\sqrt{2}\le m\le 4$

（3）$0°<\angle OP_1P<30°$ 或 $60°<\angle OP_1P<90°$

【解析】

【分析】（1）根据“关联三角形”的定义求得 $A_1(1，-2)$，$A_2(-1，2)$，利用三角形的面积公式求解即可；

（2）找到四边形 $OADC$ 是 $\odot T$ 的外接四边形，且 $D(2，2)$，画出图形，利用“关联三角形”的定义、数形结合即可求解；

（3）分两种情况，当 PP_2 与 $\odot O$ 相切时，PP_1 与 $\odot O$ 相切时，利用“关联三角形”的定义、数形结合即可求解．

【小问 1 详解】

解：∵点 $A(1，2)$ 关于 x 轴　对称点为 $A_1(1，-2)$，点 A 关于 y 轴的对称点为 $A_2(-1，2)$，

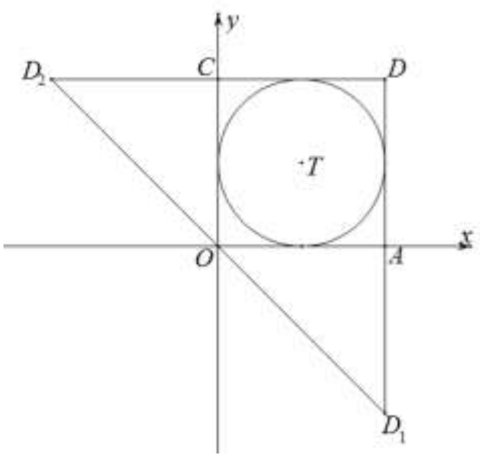
∴$S_{\triangle A A_1 A_2}$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$；

小问 2 详解】

解：∵$\odot T$ 的圆心为 $T(2，2)$，半径为 2．

∴四边形 $OADC$ 是 $\odot T$ 的外接四边形，

∴$D(2，2)$，

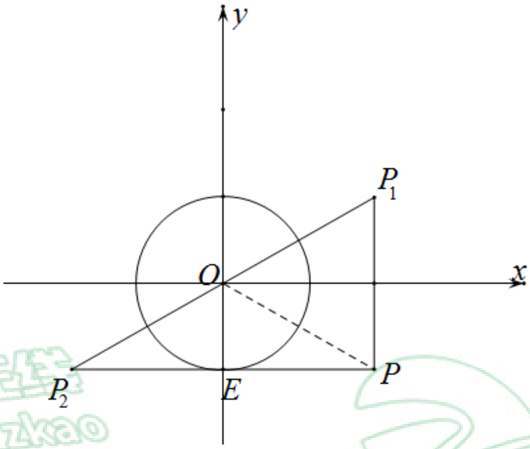


∵点 B 的"关联三角形"与⊙T 有公共点，且点 $B(m，n)$，

∴ $2-\sqrt{2}\le m\le 4$；

【小问 3 详解】

解：当 PP_2 与⊙O 相切于点 E 时，如图：



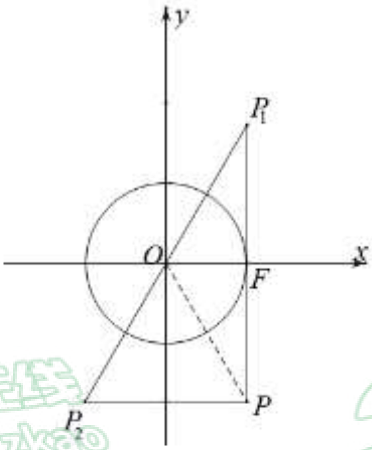
∵ $OE=r$，$OP=2r$，

∴ $\angle OPE=30°$，

∴ $\angle OPP_1=\angle OP_1P=60°$，

∴当 $60°<\angle OP_1P<90°$时，点 P 的"关联三角形"与⊙O 有四个公共点；

当 PP_1 与⊙O 相切于点 F 时，如图：



∵ $OF=r$，$OP=2r$，

∴ $\angle OPE=\angle OP_1P=30°$，

∴当 $0°<\angle OP_1P<30°$时，点 P 的"关联三角形"与⊙O 有四个公共点；

综上，点 P 的"关联三角形"与⊙O 有四个公共点，$\angle PP_1P_2$ 的取值范围为：$0°<\angle OP_1P<30°$或 $60°<\angle OP_1P<90°$.

【点睛】本题考查了轴对称的性质，含 30 度角的直角三角形的性质，切线的性质，数形结合是解题的关键.