



2022 北京上地实验学校初二（下）期中

数 学

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）第 1—10 题均有四个选项，符合题意的只有一个。

1. 下列各式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ B. $\sqrt{1.5}$ C. $\sqrt{a^2+1}$ D. $\sqrt{a^2}$

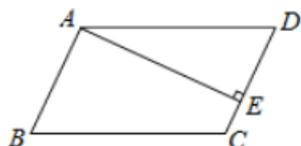
2. 平行四边形两邻边分别为 24 和 16，则平行四边形周长为（ ）

- A 20 B. 40 C. 60 D. 80

3. 下列计算正确 是（ ）

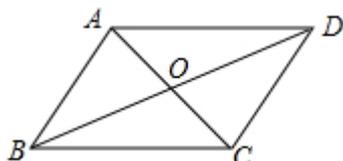
- A. $\sqrt{(-4)^2} = 2$ B. $(\sqrt{2})^2 = 4$ C. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ D. $\sqrt{6} \div \sqrt{2} = 3$

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp CD$ 于点 E ，若 $\angle B = 65^\circ$ ，则 $\angle DAE$ 等于（ ）



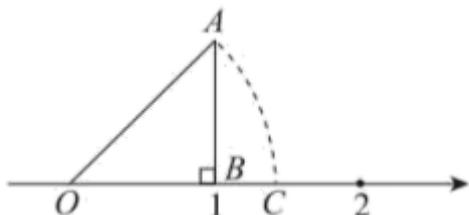
- A. 15° B. 25° C. 35° D. 45°

5. 小玲 爸爸在钉制平行四边形框架时,采用了一种方法:如图所示,将两根木条 AC 、 BD 的中点重叠,并用钉子固定,则四边形 $ABCD$ 就是平行四边形,这种方法的依据是（ ）



- A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
B. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形
C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
D. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形

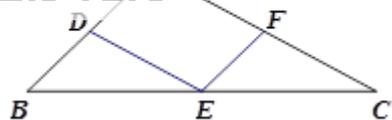
6. 如图，数轴上点 B 表示的数为 1， $AB \perp OB$ ，且 $AB = OB$ ，以原点 O 为圆心， OA 为半径画弧，交数轴正半轴于点 C ，则点 C 所表示的数为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $1-\sqrt{2}$



如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $AC=10$ ，点 D ， E ， F 分别是 AB ， BC ， AC 的中点，则四边形 $ADEF$ 的周长为



- A. 16 B. 12 C. 10 D. 8

8. 把六张大小形状完全相同的小平行四边形卡片（如图）放在一个底面为平行四边形的盒子底部，两种放置方法如图 2、图 3 所示，其中 3 中的重叠部分是平行四边形 $EFGH$ ，若 $EH=2GH$ ，且图 2 中阴影部分的周长比图 3 中阴影部分的周长大 3. 则 $AB - AD$ 的值为（ ）

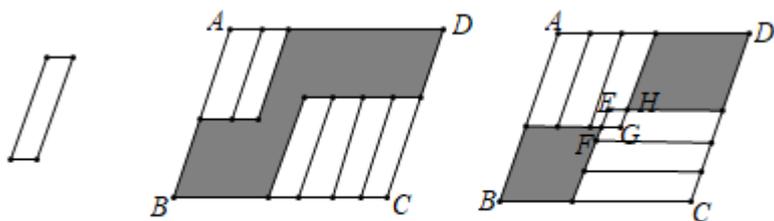
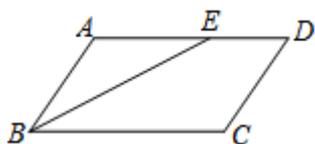


图1 图2 图3

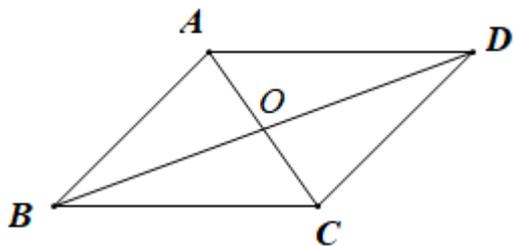
- A. 0.5 B. 1 C. 1.5 D. 3

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

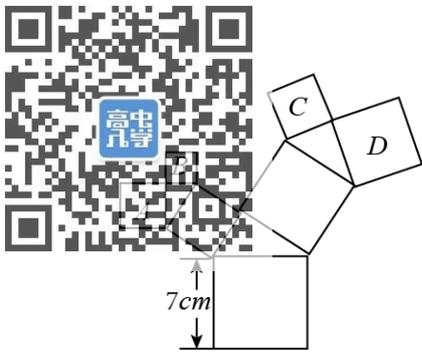
9. 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 _____.
10. 若平行四边形中两个内角的度数比为 2:3，则其中一个较小的内角的度数是 _____°.
11. 用一组 a, b 的值说明式子“ $\sqrt{(ab)^2} = ab$ ”是错误的，这组值可以是 $a =$ _____， $b =$ _____.
12. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， BE 平分 $\angle ABC$ ，与 AD 交于点 E ， $BC=5$ ， $DE=2$ ，则 AB 的长为 _____.



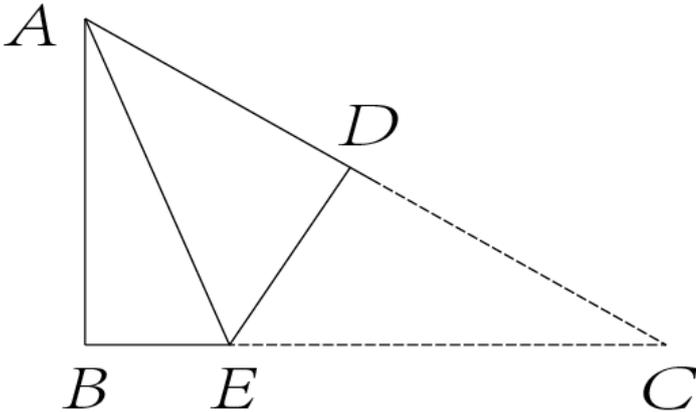
13. 如图， $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ，两条对角线的和为 18， AD 的长为 5，则 $\triangle OBC$ 的周长为 _____.



14. 如图所示，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为 7cm，正方形 A ， B ， C 的面积分别是 8cm^2 ， 10cm^2 ， 14cm^2 ，则正方形 D 的面积是 _____ cm^2 .



15. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=3$ ， $AC=5$ ，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕为 DE ，则 $\triangle ABE$ 的周长为__.



16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(0, 1)$ ， $B(1, 0)$ ， $C(3, 1)$ ，若以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标是_____.

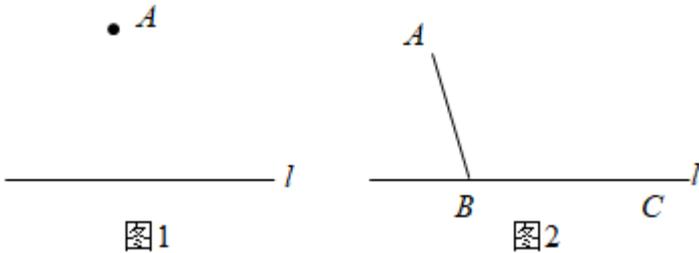
三、解答题（本题共 60 分，第 17~21 题，每小题 4 分，第 22~25 题，每小题 5 分，第 26 题 6 分第 27~28 题，每小题 7 分）

17. 计算： $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{6} \div \sqrt{3}$

18. 计算： $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \sqrt{(-3)^2}$

19. 已知 $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ， $y = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ，求代数式 $x^2 - xy + y^2$ 的值.

20. 下面是小明设计的“过直线外一点作已知直线的平行线”的尺规作图过程.



已知：如图 1，直线 l 及直线 l 外一点 A .

求作：直线 AD ，使得 $AD \parallel l$.

作法：如图 2，

①在直线 l 上任取两点 B, C ，连接 AB ；

②分别以点 A, C 为圆心，线段 BC, AB 长为半径画弧，两弧在直线 l 上方相交于点 D ；



所求作的直线.

的尺规作图过程,

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

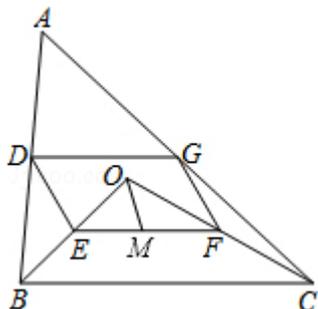
证明: 连接 CD .

$\because AB = \underline{\hspace{2cm}}, BC = \underline{\hspace{2cm}},$

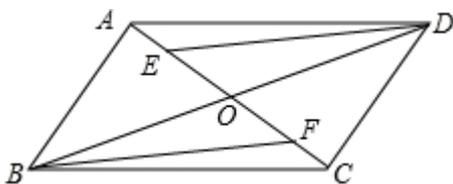
\therefore 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 () (填推理的依据).

$\therefore AD // l$.

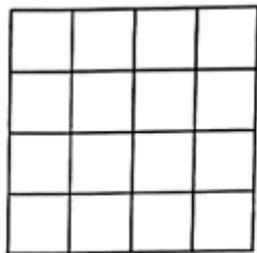
21. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 OB, OC , 并将 AB, OB, OC, AC 的中点 D, E, F, G 依次连接, 得到四边形 $DEFG$. 求证: 四边形 $DEFG$ 是平行四边形;



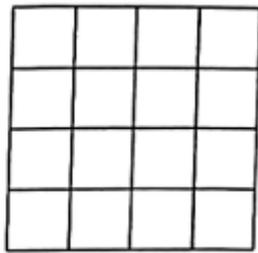
22. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , E, F 是线段 AC 上的两点, 并且 $AE=CF$. 求证: $DE // BF$.



23. 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 每个小格的顶点叫做格点, 边长为 1, 以格点为顶点的叫做格点三角形, 分别按下列要求作图.



图①



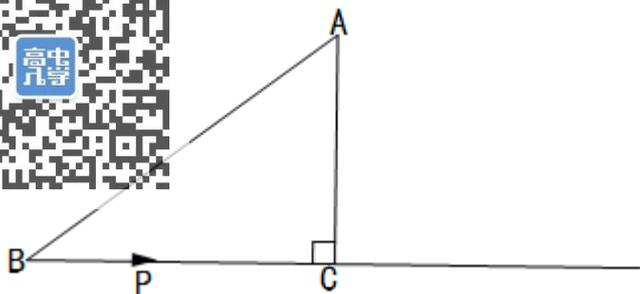
图②

(1) 在图①中, 画一个格点三角形 ABC , 使得 $AB = \sqrt{5}, BC = 2\sqrt{5}, CA = 5$;

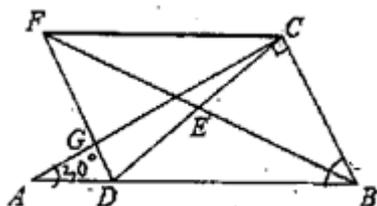
(2) 在 (1) 的条件下, 直接写出 AC 边上的高为 ;

(3) 在图②中, 画一个直角三角形, 使它的三边长都是无理数.

24. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AB = 5\text{cm}, AC = 3\text{cm}$, 动点 P 从点 B 出发, 沿射线 BC 以 1cm/s 的速度移动, 设运动的时间为 t 秒, 当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时, 求 t 的值.



25. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, D 为 AB 边上一点, 连接 CD , E 为 CD 的中点, 连接 BE 并延长至点 F , 使得 $EF=EB$, 连接 DF 交 AC 于点 G , 连接 CF ,



- (1) 求证: 四边形 $DBCF$ 是平行四边形
- (2) 若 $\angle A=30^\circ$, $BC=4$, $CF=6$, 求 CD 的长

26. 已知 $\triangle ABC$ 三条边的长度分别是 $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{(5-x)^2}$, $4-(\sqrt{4-x})^2$, 记 $\triangle ABC$ 的周长为 $C_{\triangle ABC}$.

- (1) 当 $x=2$ 时, $\triangle ABC$ 的最长边的长度是_____ (请直接写出答案);
- (2) 请求出 $C_{\triangle ABC}$ (用含 x 的代数式表示, 结果要求化简);
- (3) 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形三边长求面积的秦九韶公式: $S=$

$$\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]}$$

其中三角形边长分别为 a, b, c , 三角形的面积为 S .

若 x 为整数, 当 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值时, 请用秦九韶公式求出 $\triangle ABC$ 的面积.

27. 已知 $\square ABCD$ 中, $AC \perp BC$, $AC = BC$.

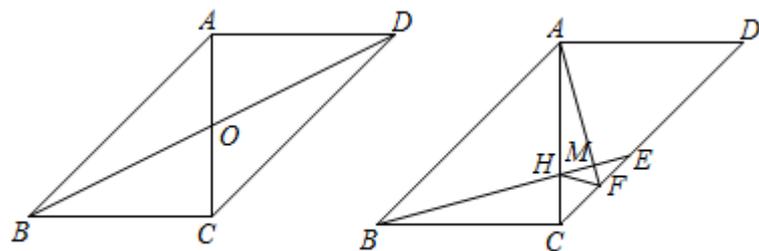


图1

图2

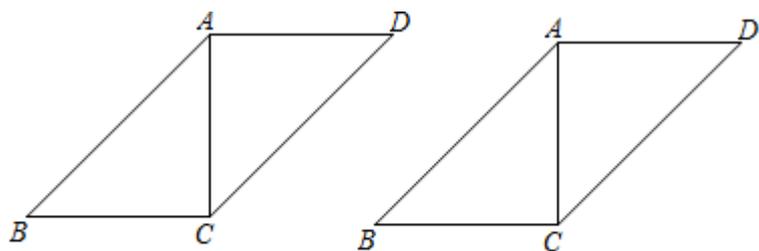


图3

备用图

- (1) 如图1, 对角线 AC, BD 交于点 O , 若 $BC=4$, 求 BD 的长;



点 E 是边 CD 上的一个动点，直线 BE 交直线 AC 于点 H ，过点 A 作 $AF \perp BE$ 交直线 CD 于点 F ，垂足为点

点 E 是边 CD 上一点（点 E 不与点 C 、 D 重合）时，判断线段 BH 、 AF 、 FH 的数量关系，并证明.

② 当点 E 在边 DC 的延长线上时，若 $\angle BEC > 45^\circ$ ，判断线段 BH 、 AF 、 FH 之间的数量关系，在图 3 中画出图形并直接写出结论，不需证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 A ，规定点 A α 变换和 β 变换. α 变换：将点 A 向左平移一个单位长度，再向上平移两个单位长度； β 变换：将点 A 向右平移三个单位长度，再向下平移一个单位长度

- (1) 若对点 B 进行 α 变换，得到点 $(1, 1)$ ，则对点 B 进行 β 变换后得到的点的坐标为_____.
- (2) 若对点 $C(m, 0)$ 进行 α 变换得到点 P ，对点 $C(m, 0)$ 进行 β 变换得到点 Q ， $OP = OQ$ ，求 m 的值.
- (3) 点 D 为 y 轴的正半轴上的一个定点，对点 D 进行 α 变换后得到点 E ，点 F 为 x 轴上的一个动点，对点 F 进行 β 变换之后得到点 G ，若 $DG + EF$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$ ，直接写出点 D 的坐标_____.



参考答案

【单选题】(本题共 24 分, 每小题 3 分) 第 1—10 题均有四个选项, 符合题意的只有一个.

1. $\sqrt{a^2+1}$, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ B. $\sqrt{1.5}$ C. $\sqrt{a^2+1}$ D. $\sqrt{a^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】最简二次根式的两个要求: ① 被开方数不含有分母(小数); ② 被开方数中不含有可以开方开得出的因数或因式, 据此进行分析判断即可.

【详解】A. $\sqrt{\frac{1}{4}}$, 被开方数是分数, 不是最简二次根式;

B. $\sqrt{1.5}$, 被开方数是小数, 不是最简二次根式;

C. $\sqrt{a^2+1}$, 符合条件, 是最简二次根式;

D. $\sqrt{a^2}$, 被开方数可以开方, 不是最简二次根式.

故选: C

【点睛】本题考查最简二次根式的要求, 牢记相关内容并灵活应用是解题关键.

2. 平行四边形两邻边分别为 24 和 16, 则平行四边形周长为 ()

- A. 20 B. 40 C. 60 D. 80

【答案】D

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得出 $AB=CD=16$, $AD=BC=24$, 平行四边形 ABCD 的周长 $=2(AB+BC)$, 即可得出结果.

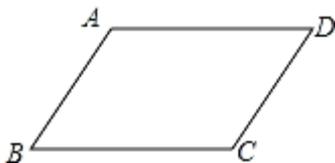
【详解】解: 如图所示:

∵ 四边形 ABCD 是平行四边形,

∴ $AB=CD=16$, $AD=BC=24$,

∴ 平行四边形 ABCD 的周长 $=2(AB+BC)=2(16+24)=80$;

故选: D.



【点睛】本题考查了平行四边形的性质以及周长的计算方法; 熟练掌握平行四边形的性质, 并能进行推理计算是解决问题的关键.

3. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{(-4)^2} = 2$ B. $(\sqrt{2})^2 = 4$ C. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ D. $\sqrt{6} \div \sqrt{2} = 3$



【分析】根据二次根式的性质和运算法则逐一计算可得.

【详解】A、 $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ ，此选项计算错误，不符合题意；

B、 $(\sqrt{2})^2 = 2$ ，此选项计算错误，不符合题意；

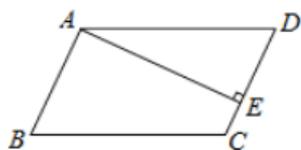
C、 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$ ，此选项计算正确，符合题意；

D、 $\sqrt{6} \div \sqrt{2} = \sqrt{6 \div 2} = \sqrt{3}$ ，此选项计算错误，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了二次根式的化简运算，解题的关键是准确利用公式计算.

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp CD$ 于点 E ，若 $\angle B = 65^\circ$ ，则 $\angle DAE$ 等于()



A. 15°

B. 25°

C. 35°

D. 45°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质和三角形的内角和定理求解.

【详解】在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp CD$ 于点 E ，

$$\therefore \angle AED = 90^\circ$$

$$\because \angle B = 65^\circ$$

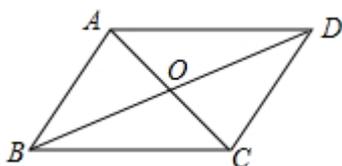
$$\therefore \angle D = \angle B = 65^\circ$$

$$\text{在 } \triangle AED \text{ 中, } \angle DAE = 180^\circ - \angle AED - \angle D = 25^\circ$$

故选：B

【点睛】本题考查了平行四边形的性质和三角形内角和定理，解题的关键在于把已知角转化到 $\triangle AED$ 中求解.

5. 小玲的爸爸在钉制平行四边形框架时，采用了一种方法：如图所示，将两根木条 AC 、 BD 的中点重叠，并用钉子固定，则四边形 $ABCD$ 就是平行四边形，这种方法的依据是 ()



A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形

C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

D. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形



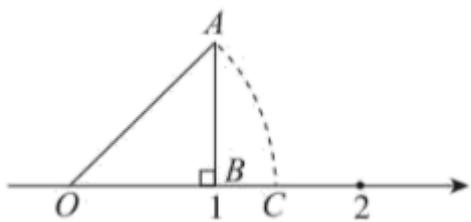
AC 和 BD 是对角线，取各自中点，则对角线互相平分（即 $AO=CO$ ， $BO=DO$ ）的四边形是平行四

【详解】解：由已知可得 $AO=CO$ ， $BO=DO$ ，所以四边形 ABCD 是平行四边形，依据是对角线互相平分的四边形是平行四边形。

故选：A.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定，熟记平行四边形的判定方法是解题的关键。

6. 如图，数轴上点 B 表示的数为 1， $AB \perp OB$ ，且 $AB = OB$ ，以原点 O 为圆心，OA 为半径画弧，交数轴正半轴于点 C，则点 C 所表示的数为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $1-\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据等腰直角三角形的性质求得 OA 的长，然后根据圆的性质即可求解 $OC = OA$ ，进而即可判断。

【详解】由已知得 $OB = 1$ ，

$\because AB \perp OB$ ，且 $AB = OB$ ，

\therefore 在 $Rt\triangle OBA$ 中， $OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ ，

\because 以原点 O 为圆心，OA 为半径画弧，交数轴正半轴于点 C，

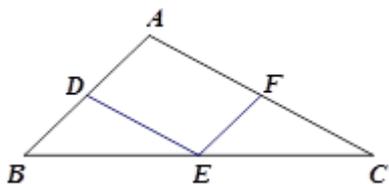
$\therefore OC = OA = \sqrt{2}$ ，

\therefore 点 C 所表示的数为 $\sqrt{2}$ ；

故选 A.

【点睛】本题考查了勾股定理和等腰直角三角形的性质，关键是求出 OA 的值，然后根据圆的性质即可求解。

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $AC=10$ ，点 D，E，F 分别是 AB，BC，AC 的中点，则四边形 ADEF 的周长为（ ）.



- A. 16 B. 12 C. 10 D. 8

【答案】A

【解析】



三角形的中位线定理，判断出四边形 ADEF 平行四边形，根据平行四边形的性质求出 ADEF 的周长即

∵点 D, E, F 分别是 AB, BC, AC 的中点，

$$\therefore DE \parallel AC, EF \parallel AB, DE = \frac{1}{2} AC = 5, EF = \frac{1}{2} AB = 3,$$

∴ 四边形 ADEF 是平行四边形，

$$\therefore AD = EF, DE = AF,$$

$$\therefore \text{四边形 ADEF 的周长为 } 2(DE + EF) = 16,$$

故选 A.

【点睛】本题考查了三角形中位线定理，利用中位线定理判断出四边形 ADEF 为平行四边形是解题的关键.

8. 把六张大小形状完全相同的小平行四边形卡片（如图）放在一个底面为平行四边形的盒子底部，两种放置方法如图 2、图 3 所示，其中 3 中的重叠部分是平行四边形 EFGH，若 $EH = 2GH$ ，且图 2 中阴影部分的周长比图 3 中阴影部分的周长大 3. 则 $AB - AD$ 的值为（ ）

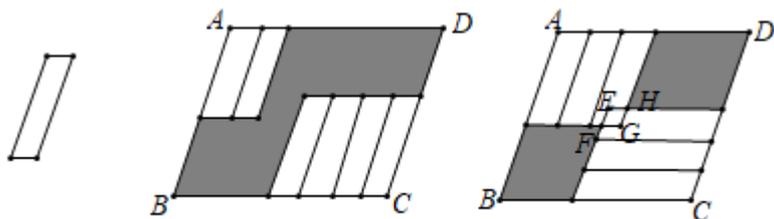


图1

图2

图3

A. 0.5

B. 1

C. 1.5

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】设 $AB = a, BC = b$ ，图 1 中的平行四边形的边长是 $x, y (y > x)$ ， $GH = c$ ，则 $EH = 2c$ ，根据图 2 中阴影部分的周长比图 3 中阴影部分的周长大 3 得出 $(2b + 2a) - [2(b - 2c) + 2(a - c)] = 3$ ，求出 c ，根据图形得出 $AB - AD =$

$$\left(y - \frac{1}{2} + 3x\right) - (3x - 1 + y), \text{ 再求出即可.}$$

【详解】解：设 $AB = a, BC = b$ ，图 1 中的平行四边形的边长是 $x, y (y > x)$ ， $GH = c$ ，则 $EH = 2c$ ，

∵ 图 2 中阴影部分的周长比图 3 中阴影部分的周长大 3，

$$\therefore (2b + 2a) - [2(b - 2c) + 2(a - c)] = 3,$$

解得： $c = 0.5$ ，

即 $GH = 0.5, EH = 1$ ，

$$\text{所以 } AB - AD = \left(y - \frac{1}{2} + 3x\right) - (3x - 1 + y) = 0.5,$$

故选 A.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，能根据题意得出 $(2b + 2a) - [2(b - 2c) + 2(a - c)] = 3$ 是解此题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 _____.

【答案】 $x \geq 1$



且使得二次根式有意义的条件即可得到答案.

二次根式有意义, 则 $x-1 \geq 0$

故答案为: $x \geq 1$

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

10. 若平行四边形中两个内角的度数比为2:3, 则其中一个较小的内角的度数是_____°.

【答案】72

【解析】

【分析】根据平行线四边形的性质, 确定这两个角互补, 即可求得.

【详解】∵ 平行四边形的对角相等, 若平行四边形中两个内角的度数比为2:3,

∴ 这两个角为邻角,

设这两个角分别 $2x, 3x$,

∵ 平行四边形的邻角互补,

$$\therefore 2x + 3x = 180^\circ,$$

解得 $x = 36^\circ$,

$$\therefore 2x = 72^\circ,$$

其中一个较小的内角的度数是: 72° .

故答案为: 72

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、平行线的性质; 熟练掌握平行四边形的性质, 并能进行推理计算是解决问题的关键.

11. 用一组 a, b 的值说明式子“ $\sqrt{(ab)^2} = ab$ ”是错误的, 这组值可以是 $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$.

【答案】 ①. -1 答案不唯一 ②. 1 答案不唯一

【解析】

【分析】根据题意举出一个反例即可.

【详解】当 $a = -1, b = 1$ 时,

$$\sqrt{(ab)^2} = \sqrt{(-1 \times 1)^2} = 1,$$

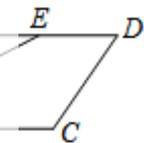
$$ab = (-1) \times 1 = -1,$$

$\sqrt{(ab)^2} = ab$ 是错误的.

故答案为 -1, 1. (答案不唯一).

【点睛】考查反证法, 解得的关键是掌握二次根式的性质以及反证法.

12. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, BE 平分 $\angle ABC$, 与 AD 交于点 E , $BC = 5$, $DE = 2$, 则 AB 的长为 ____.



【答案】

【解析】
【分析】根据平行四边形的性质可得 $AD = BC = 5$ ， $AD \parallel BC$ ，结合图形，利用线段间的数量关系可得 $AE = 3$ ，由平行线及角平分线可得 $\angle AEB = \angle EBC$ ， $\angle ABE = \angle EBC$ ，得出 $\angle AEB = \angle ABE$ ，根据等角对等边即可得出结果.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AD = BC = 5, AD \parallel BC,$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\therefore AE = AD - DE = 3,$$

∵ $AD \parallel BC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC, \angle ABE = \angle EBC,$$

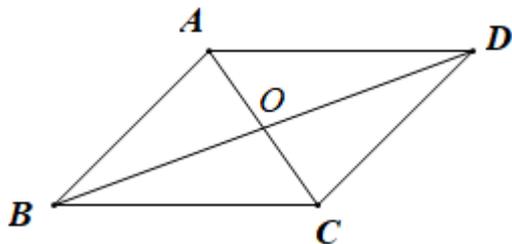
$$\therefore \angle AEB = \angle ABE,$$

$$\therefore AB = AE = 3,$$

故答案为：3.

【点睛】题目主要考查平行四边形的性质，利用角平分线计算及平行线的性质，等角对等边求边长等，理解题意，结合图形，综合运用这些知识是解题关键.

13. 如图， $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ，两条对角线的和为 18， AD 的长为 5，则 $\triangle OBC$ 的周长为 _____.



【答案】14

【解析】

【分析】根据两对角线之和为 18，可得出 $OB + OC$ 的值，再由 $AD = BC$ ，可得出 $\triangle OBC$ 的周长.

【详解】由题意得， $OB + OC = \frac{1}{2} (AC + BD) = 9$,

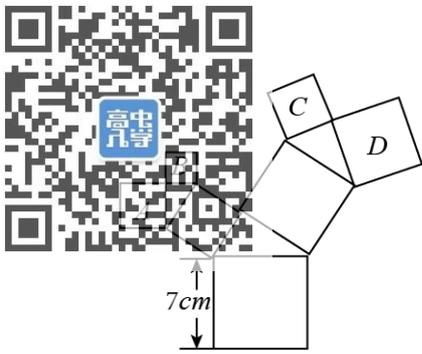
又 ∵ $AD = BC = 5$,

$$\therefore \triangle OBC \text{ 的周长} = 9 + 5 = 14.$$

故答案为 14.

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，解答此题需要掌握平行四边形的对角线互相平分，对边相等的性质.

14. 如图所示，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为 7cm，正方形 A ， B ， C 的面积分别是 8cm^2 ， 10cm^2 ， 14cm^2 ，则正方形 D 的面积是 _____ cm^2 .



【答案】17

【解析】

【分析】根据正方形的面积公式，连续运用勾股定理，得到四个小正方形的面积和等于最大正方形的面积，即可列出等式求出正方形 D 的面积。

【详解】解：∵所有的三角形都是直角三角形，所有的四边形都是正方形，

∴正方形 A 的面积 = a^2 ，正方形 B 的面积 = b^2 ，正方形 C 的面积 = c^2 ，正方形 D 的面积 = d^2 ，

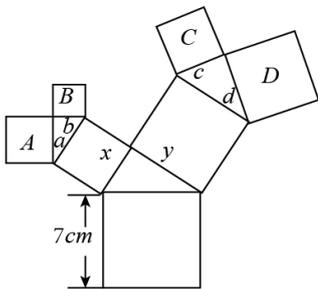
∴ $a^2 + b^2 = x^2$ ， $c^2 + d^2 = y^2$ ，

∴正方形 A 、 B 、 C 、 D 的面积和 = $(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = x^2 + y^2 = 7^2 = 49$ ，

即 $8 + 10 + 14 + d^2 = 49$ ，

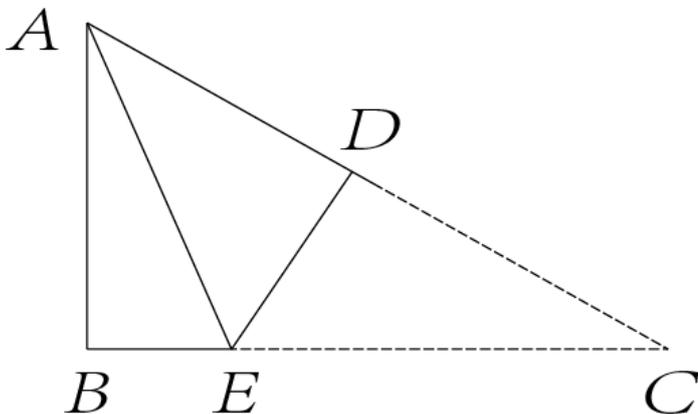
解得： $d^2 = 17$ 。

故答案为：17。



【点睛】本题考查了勾股定理的应用，根据数形结合得出正方形之间面积关系是解题关键。

15. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 5$ ，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕为 DE ，则 $\triangle ABE$ 的周长为__。



【答案】7



通过勾股定理求得 BC ，再根据折叠性质得到 $AE=CE$ ，进而由三角形的周长 $=AB+BC$ 求解即可。

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=3$ ， $AC=5$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$\because \triangle ADE$ 是 $\triangle CDE$ 翻折而成，

$$\therefore AE=CE,$$

$$\therefore AE+BE=BC=4,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长} = AB+BC=3+4=7.$$

故答案是：7.

【点睛】本题考查勾股定理、折叠性质，熟练掌握勾股定理是解答的关键。

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(0, 1)$ ， $B(1, 0)$ ， $C(3, 1)$ ，若以 A, B, C, D 为顶点 四边形是平行四边形，则点 D 的坐标是_____.

【答案】 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$ 或 $(2, 2)$

【解析】

【分析】分三种情况：① BC 为对角线时，② AB 为对角线时，③ AC 为对角线时；由平行四边形的性质容易得出点 D 的坐标.

【详解】解：分三种情况：① AB 为对角线时，点 D 的坐标为 $(-2, 0)$ ；

② BC 为对角线时，点 D 的坐标为 $(4, 0)$ ；

③ AC 为对角线时，点 D 的坐标为 $(2, 2)$.

综上所述，点 D 的坐标可能是 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$ 或 $(2, 2)$.

故答案为 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$ 或 $(2, 2)$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质、坐标与图形的性质；熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键。

三、解答题（本题共 60 分，第 17~21 题，每小题 4 分，第 22~25 题，每小题 5 分，第 26 题 6 分第 27~28 题，每小题 7 分）

17. 计算： $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{6} \div \sqrt{3}$

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先计算除法，再合并，即可求解.

【详解】解： $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{6} \div \sqrt{3}$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2},$$

故答案为： $2\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键。

18. 计算： $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \sqrt{(-3)^2}$

【答案】 6



利用平方差公式计算二次根式乘法，利用二次根式性质化简二次根式，再计算加减即可。

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\sqrt{(-3)^2}$$

$$= 5-2+3$$

$$=6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题词考查二次根式混合运算，利用平方差公式简便计算是解题词的关键.

19. 已知 $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ， $y = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ，求代数式 $x^2 - xy + y^2$ 的值.

【答案】22

【解析】

【分析】把所求的式子变形为 $(x+y)^2 - 3xy$ ，然后再把 x, y 的值代入进行计算即可解答.

【详解】解：∵ $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ， $y = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ，

$$\therefore x^2 - xy + y^2,$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - xy$$

$$= (x+y)^2 - 3xy$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{7} - \sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$= (2\sqrt{7})^2 - 3 \times 2$$

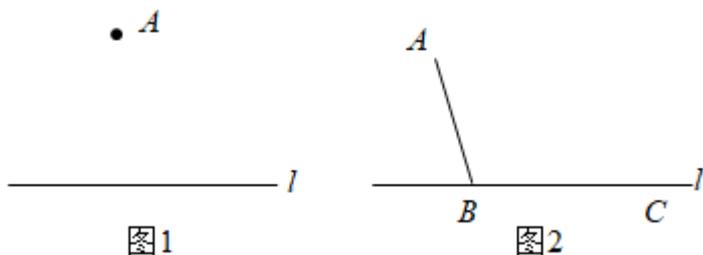
$$= 28 - 6$$

$$= 22,$$

故答案为：22.

【点睛】本题考查代数式求值、二次根式的运算，将原式变形为 $(x+y)^2 - 3xy$ 是解题的关键.

20. 下面是小明设计的“过直线外一点作已知直线的平行线”的尺规作图过程.



已知：如图 1，直线 l 及直线 l 外一点 A .

求作：直线 AD ，使得 $AD \parallel l$.

作法：如图 2，

①在直线 l 上任取两点 B, C ，连接 AB ；

②分别以点 A, C 为圆心，线段 BC, AB 长为半径画弧，两弧在直线 l 上方相交于点 D ；

③作直线 AD .



直线 AD 就是所求作的直线.

(1) 补全作图, 并写出尺规作图过程;

(2) 结合直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);

(3) 完成下面证明.

证明: 连接 CD .

$\because AB = \underline{\hspace{2cm}}, BC = \underline{\hspace{2cm}},$

\therefore 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 () (填推理的依据).

$\therefore AD \parallel l$.

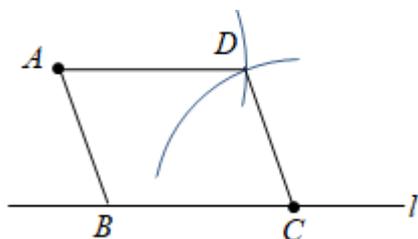
【答案】(1) 见解析; (2) DC, AD , 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

【解析】

【分析】(1) 根据作法画出图形即可;

(2) 根据“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”进行证明即可.

【详解】(1) 如图所示,



(2) 证明: 连接 CD .

$\because AB = \underline{CD}, BC = \underline{AD},$

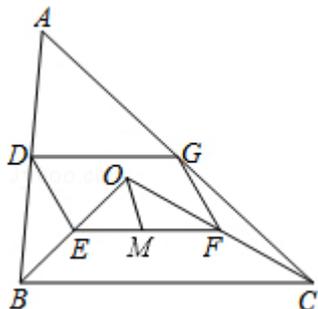
\therefore 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 (两组对边分别相等的四边形是平行四边形) (填推理的依据).

$\therefore AD \parallel l$.

故答案为: DC, AD , 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图: 复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法. 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作. 也考查了平行四边形的判定.

21. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 OB, OC , 并将 AB, OB, OC, AC 的中点 D, E, F, G 依次连接, 得到四边形 $DEFG$. 求证: 四边形 $DEFG$ 是平行四边形;



【答案】详见解析

【解析】



分别利用三角形中位线平行于第三边并且等于第三边的一半可得 $EF \parallel BC$ 且 $EF = \frac{1}{2}BC$, $DG \parallel BC$ 且 $DG = \frac{1}{2}BC$.

从而得到 $DE = EF$, $DG \parallel EF$, 再利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明即可.

证明: $\because D, G$ 分别是 AB, AC 的中点,

$$\therefore DG \parallel BC, DG = \frac{1}{2}BC.$$

$\because E, F$ 分别是 OB, OC 的中点,

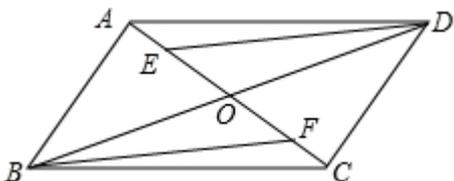
$$\therefore EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DG = EF, DG \parallel EF,$$

\therefore 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

【点睛】 本题考查的是中点四边形、平行四边形的判定和性质, 掌握三角形中位线定理、平行四边形的判定定理和性质定理是解题的关键.

22. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , E, F 是线段 AC 上的两点, 并且 $AE = CF$. 求证: $DE \parallel BF$.



【答案】 证明见解析.

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质可求得 $OA = OC$, $OB = OD$, 再结合条件可求得 $OE = OF$, 利用对角线互相平分的四边形为平行四边形可证得结论.

【详解】 如图, 连接 BE, DF .

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

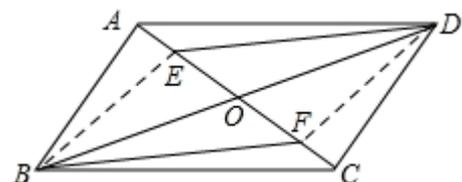
$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

又 $\because AE = CF$,

$$\therefore OE = OF,$$

\therefore 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

$$\therefore DE \parallel BF.$$

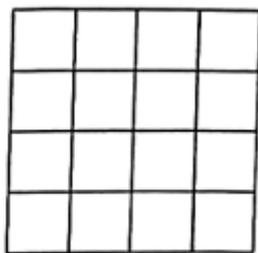


【点睛】 本题主要考查平行四边形的判定和性质, 利用平行四边形的性质求得 $OE = OF$ 是解题的关键.

23. 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 每个小格的顶点叫做格点, 边长为 1, 以格点为顶点的叫做格点三角形, 分别按下列要求作图.



图①



图②

(1) 在图①中, 画一个格点三角形 ABC , 使得 $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $CA = 5$;

(2) 在 (1) 的条件下, 直接写出 AC 边上的高为_____;

(3) 在图②中, 画一个直角三角形, 使它的三边长都是无理数.

【答案】 (1) 见解析;

(2) 2; (3) 见解析.

【解析】

【分析】 (1) 利用数形结合的思想解决问题即可;

(2) 先用勾股定理的逆定理判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 再利用面积法求解即可;

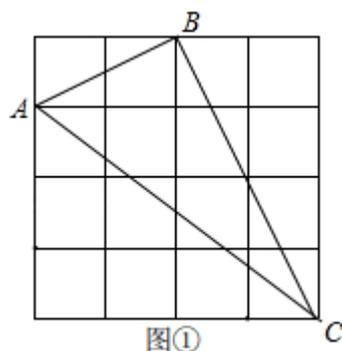
(3) 根据要求作出图形 (答案不唯一).

【小问 1 详解】

解: 如图①, $\triangle ABC$ 即为所求,

$$\because AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$\therefore \triangle ABC$ 即为所求;



图①

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because AB^2 = 2^2 + 1^2 = 5, BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20, AC^2 = 5^2 = 25,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

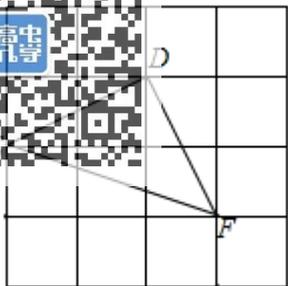
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$$\therefore AC \text{ 边上的高} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{5} = 2,$$

故答案为: 2.

【小问 3 详解】

解: 如图②, $\triangle DEF$ 即为所求作 (答案不唯一).



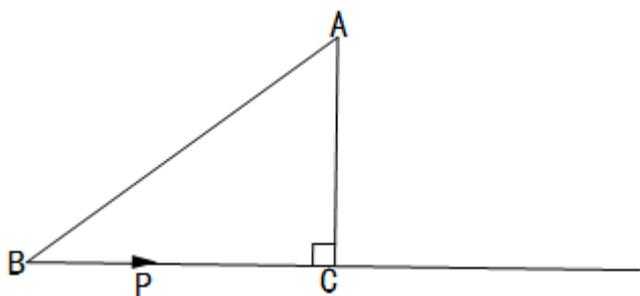
图②

$$\because DE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad DF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad EF = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore \triangle DEF$ 即为所求作 (答案不唯一).

【点睛】本题考查作图-应用与设计、勾股定理及其逆定理的应用、三角形的面积等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

24. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5\text{cm}$ ， $AC = 3\text{cm}$ ，动点 P 从点 B 出发，沿射线 BC 以 1cm/s 的速度移动，设运动的时间为 t 秒，当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时，求 t 的值.



【答案】当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时， $t = 4$ 或 $\frac{25}{4}$.

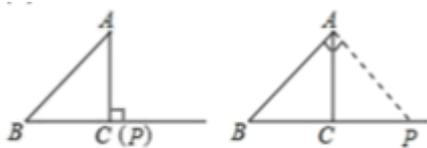
【解析】

【分析】当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时，分两种情况：①当 $\angle APB$ 为直角时，②当 $\angle BAP$ 为直角时，分别求出此时 t 的值即可.

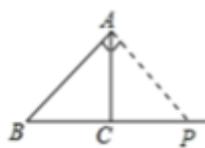
【详解】在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ ，

$$\therefore BC = 4\text{cm},$$

由题意得： $BP = t\text{cm}$.



图①



图②

①当 $\angle APB$ 为直角时，

如图①，点 P 与点 C 重合，

$$BP = BC = 4\text{cm},$$

$$\therefore t = 4;$$

②当 $\angle BAP$ 为直角时，

如图②， $BP = t\text{cm}$ ， $CP = (t - 4)\text{cm}$ ， $AC = 3\text{cm}$ ，



$$AP^2 = AC^2 + CP^2 = 3^2 + (t-4)^2,$$

$$AB^2 + AP^2 = BP^2,$$

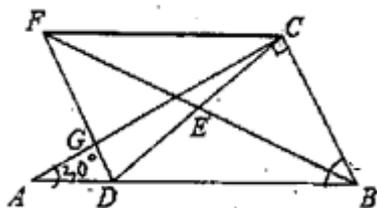
$$(t-4)^2 = t^2,$$

$$\text{解得 } t = \frac{25}{4},$$

答：当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时， $t=4$ 或 $\frac{25}{4}$ 。

【点睛】本题考查了勾股定理以及直角三角形的知识，解答本题的关键是掌握勾股定理的应用，以及分类讨论，否则会出现漏解。

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， D 为 AB 边上一点，连接 CD ， E 为 CD 的中点，连接 BE 并延长至点 F ，使得 $EF=EB$ ，连接 DF 交 AC 于点 G ，连接 CF ，



(1) 求证：四边形 $DBCF$ 是平行四边形

(2) 若 $\angle A=30^\circ$ ， $BC=4$ ， $CF=6$ ，求 CD 的长

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据对角线互相平分即可证明；

(2) 由四边形 $DBCF$ 是平行四边形，可得 $CF \parallel AB$ ， $DF \parallel BC$ ，可得 $\angle FCG = \angle A = 30^\circ$ ， $\angle CGF = \angle CGD = \angle ACB = 90^\circ$ ，由直角三角形的性质得到 FG, CG, GD 的长，由勾股定理即可求解。

【详解】(1) $\because E$ 为 CD 的中点，

$$\therefore CE = DE, \text{ 又 } EF = EB$$

\therefore 四边形 $DBCF$ 是平行四边形

(2) \because 四边形 $DBCF$ 是平行四边形， $\therefore CF \parallel AB$ ， $DF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle FCG = \angle A = 30^\circ, \angle CGF = \angle CGD = \angle ACB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle FCG$ 中， $CF=6$ ，

$$\therefore FG = \frac{1}{2}CF = 3, CG = 3\sqrt{3}$$

$$\because DF = BC = 4,$$

$$\therefore DG = 1,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle DCG \text{ 中, } CD = \sqrt{CG^2 + DG^2} = 2\sqrt{7}$$

【点睛】此题主要考查平行四边形的判定与性质，解题的关键是熟知含 30° 的直角三角形的性质。

26. 已知 $\triangle ABC$ 三条边的长度分别是 $\sqrt{x+1}$ ， $\sqrt{(5-x)^2}$ ， $4 - (\sqrt{4-x})^2$ ，记 $\triangle ABC$ 的周长为 $C_{\triangle ABC}$ 。



当 $x=2$ 时, $\triangle ABC$ 的最长边的长度是_____ (请直接写出答案);

$C_{\triangle ABC}$ (用含 x 的代数式表示, 结果要求化简);

南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边长求面积的秦九韶公式: $S =$

$$\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2 - (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2})^2]}$$

其中三角形边长分别为 a, b, c , 三角形的面积为 S .

若 x 为整数, 当 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值时, 请用秦九韶公式求出 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) 3; (2) $\sqrt{x+1}+5$; (3) $\frac{3}{4}\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 (1) $x=2$ 代入三边表达式可得答案;

(2) 由根式有意义可得 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$, 可得 x 的取值范围, $\sqrt{(5-x)^2} = 5-x$, $4 - (\sqrt{4-x})^2 = x$, 可得 $C_{\triangle ABC}$ 的

值;

(3) 由 (2) 可得 $C_{\triangle ABC} = \sqrt{x+1}+5$, 且 $-1 \leq x \leq 4$, x 为整数, 将 x 的值可以从大到小依次验证, 可得当 $x=3$ 时, 可得 S 的值.

【详解】 (1) 3

(2) 由根式有意义可得 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$, 即 $-1 \leq x \leq 4$.

$$\text{可得 } \sqrt{(5-x)^2} = 5-x, \quad 4 - (\sqrt{4-x})^2 = x.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } C_{\triangle ABC} &= \sqrt{x+1} + \sqrt{(5-x)^2} + 4 - (\sqrt{4-x})^2 \\ &= \sqrt{x+1} + 5 - x + x = \sqrt{x+1} + 5. \end{aligned}$$

(3) 由 (2) 可得 $C_{\triangle ABC} = \sqrt{x+1}+5$, 且 $-1 \leq x \leq 4$.

由于 x 为整数, 且要使 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值, 所以 x 的值可以从大到小依次验证.

当 $x=4$ 时, 三条边的长度分别是 $\sqrt{5}, 1, 4$,

但此时 $\sqrt{5}+1 < 4$, 不满足三角形三边关系.

所以 $x \neq 4$.

当 $x=3$ 时, 三条边的长度分别是 $2, 2, 3$, 满足三角形三边关系.

故此时 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值为 7, 符合题意.

不妨设 $a=2, b=2, c=3$, 得



$$\begin{aligned}
 & \left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \sqrt{4 \left[2^2 \times 2^2 - \left(\frac{2^2 + 2^2 - 3^2}{2} \right)^2 \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(16 - \frac{1}{4} \right)} \\
 &= \frac{3}{4} \sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查二次根式的运算及应用，注意运算的准确性.

27. 已知 $\square ABCD$ 中， $AC \perp BC$ ， $AC = BC$.

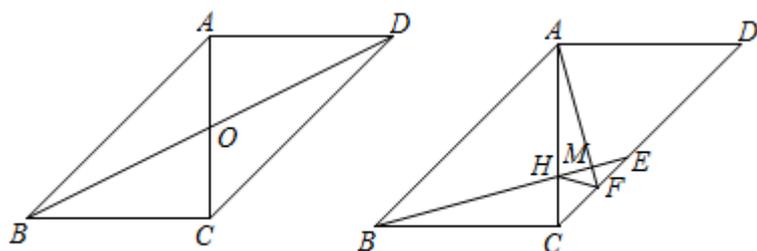


图1

图2

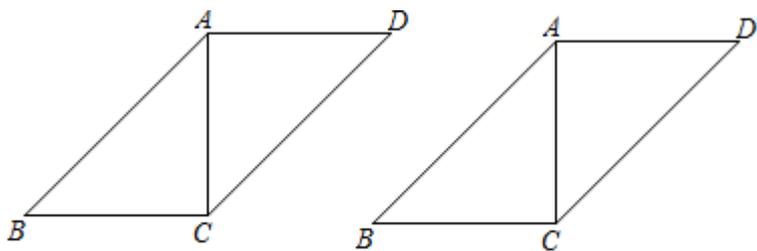


图3

备用图

(1) 如图 1，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，若 $BC = 4$ ，求 BD 的长；

(2) 点 E 是直线 CD 上的一个动点，直线 BE 交直线 AC 于点 H ，过点 A 作 $AF \perp BE$ 交直线 CD 于点 F ，垂足为点 M ，连接 FH 。

①如图 2，当点 E 是边 CD 上一点（点 E 不与点 C 、 D 重合）时，判断线段 BH 、 AF 、 FH 的数量关系，并证明。

②当点 E 在边 DC 的延长线上时，若 $\angle BEC > 45^\circ$ ，判断线段 BH 、 AF 、 FH 之间的数量关系，在图 3 中画出图形并直接写出结论，不需证明。

【答案】 (1) $BD = 4\sqrt{5}$

(2) ① $BH = AF + FH$ ，证明见解析；②画图见解析；当 $90^\circ < \angle BEC < 180^\circ$ 时，有 $AF = BH + FH$ ；当 $45^\circ < \angle BEC < 90^\circ$ 时，有 $FH = BH + AF$ ；当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时，点 F 不存在

【解析】

【分析】 (1) 先由 $\square ABCD$ 性质求出 $OC = 2$ ，在 $Rt\triangle BCO$ 中，由勾股定理求解即可；

(2) ①延长 AF 和 BC 交于点 G ，先证 $\triangle BCH \cong \triangle ACG(ASA)$ ，得 $BH = AG$ ， $HC = CG$ ，再证 $\triangle FCH \cong \triangle FCG(SAS)$ ，得 $HF = FG$ ，即可得出结论 $BH = AG = AF + FG = AF + FH$ ；



【小问 1 详解】：当 $90^\circ < \angle BEC < 180^\circ$ 时，有 $AF = BH + FH$ ，画出图形；当 $45^\circ < \angle BEC < 90^\circ$ 时，有 $FH = BH +$
 【小问 2 详解】：当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时，点 F 不存在；

解：∵ $\square ABCD$,

$$\therefore OC = \frac{1}{2} AC, \quad BD = 2BO,$$

$$\because AC \perp BC, \quad AC = BC, \quad BC = 4,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$Rt\triangle BCO$ 中,

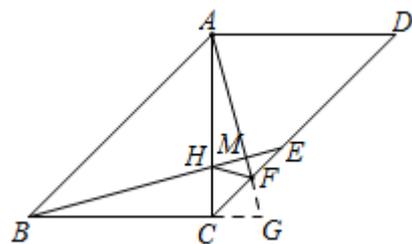
$$BO = \sqrt{BC^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} BH = AF + FH,$$

证明：延长 AF 和 BC 交于点 G ,



$$\because AC \perp BC, \quad AF \perp BE,$$

$$\therefore \angle HBC + \angle BHC = \angle AHM + \angle HAF = 90^\circ,$$

$$\because \angle BHC = \angle AHM,$$

$$\therefore \angle HBC = \angle HAF,$$

在 $\triangle BCH$ 和 $\triangle ACG$ 中,

$$\begin{cases} \angle HBC = \angle CAG \\ BC = AC \\ \angle BCA = \angle ACG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCH \cong \triangle ACG (ASA),$$

$$\therefore BH = AG, \quad HC = CG,$$

在 $\triangle FCH$ 和 $\triangle FCG$ 中,

$$\begin{cases} HC = CG \\ \angle HCF = \angle GCF, \\ CF = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FCH \cong \triangle FCG (SAS),$$

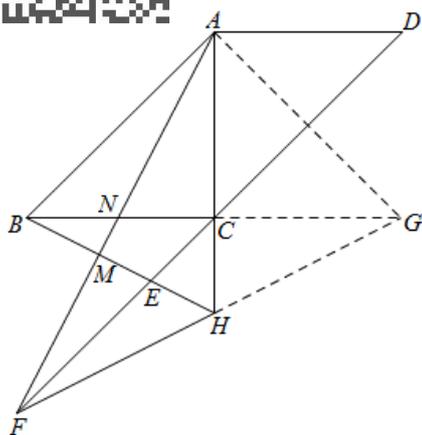
$$\therefore HF = FG,$$



$$AF = AC + AF + FG = AF + FH,$$

当 $\angle BEC < 180^\circ$ 时, 有 $AF = BH + FH$, 如图,

延长 BE 与 BC 相交于 G , 连接 AG , 设 AF 交 BC 于 N ,



$$\because AC \perp BC,$$

$$\therefore \angle HBC + \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\because AM \perp BH,$$

$$\therefore \angle HAM + \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBC = \angle HAM, \text{ 即 } \angle HBC = \angle CAN,$$

在 $\triangle BCH$ 和 $\triangle ACN$ 中,

$$\begin{cases} \angle HBC = \angle CAN \\ BC = AC \\ \angle BCH = \angle ACN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCH \cong \triangle ACN (\text{ASA}),$$

$$\therefore CH = CN, \angle BHC = \angle ANC,$$

$$\because AC \perp BC, AC = BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\because \square ABCD,$$

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle ABC = 45^\circ, \angle FCH = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle FCH,$$

在 $\triangle FCN$ 和 $\triangle FCH$ 中,

在 $\triangle FCN$ 和 $\triangle FCH$ 中,

$$\begin{cases} CN = CH \\ \angle FCN = \angle FCH \\ CF = CF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle FCN \cong \triangle FCH (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CFN = \angle CFH,$$

$$\therefore \angle GHC = \angle CFG + \angle FCH, \angle ANC = \angle FCN + \angle CFN,$$

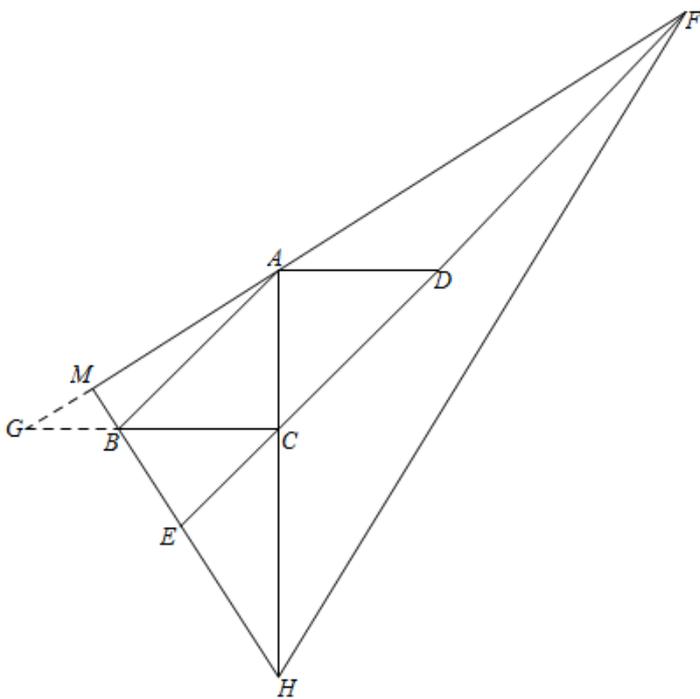


$\angle HGC = \angle ANC$,
 $\angle HBC = \angle BHC$,
 在 $\triangle HGC$ 和 $\triangle BHC$ 中,
 $\left\{ \begin{array}{l} \angle HGC = \angle BHC \\ CH = CH \\ \angle BCH = \angle GCH = 90^\circ \end{array} \right.$,

$\therefore \triangle BHC \cong \triangle GCH$ (ASA),
 $\therefore GH = BH, BH = CH, \angle HBC = \angle HGC$,
 $\therefore CH = AC, \angle FAH = \angle HGC$,
 $\therefore \angle CAG = \angle CGA$,
 $\therefore \angle FAH + \angle CAG = \angle FGC + \angle CHA$, 即 $\angle FAG = \angle FGA$,
 $\therefore AF = GF = FH + HG$,
 $\therefore AF = BH + FH$;

当 $45^\circ < \angle BEC < 90^\circ$ 时, 有 $FH = BH + AF$, 如图,

理由: 延长 AM 、 CB 相交于 G ,



$\because AC \perp BC$,
 $\therefore \angle G + \angle GAC = 90^\circ$,
 $\because AM \perp BH$,
 $\therefore \angle BHC + \angle GAC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle G = \angle BHC$,

在 $\triangle ACG$ 和 $\triangle BCH$ 中,



$\angle G = \angle BHC$
 $\angle GCH = \angle BCH = 90^\circ$
 $\therefore \triangle ACG \cong \triangle BCH(ASA),$

$\therefore AG=BH, CG=CH,$

$\because AC \perp BC, AC=BC,$

$\therefore \angle BAC=45^\circ,$

$\because \square ABCD,$

$\therefore DC \parallel AB,$

$\therefore \angle ACF = \angle BAC = 45^\circ,$

$\therefore \angle GCF = \angle ACB + \angle ACF = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

$\because \angle BCH = 90^\circ,$

$\therefore \angle HCF = 360^\circ - \angle GCF - \angle BCH = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ,$

$\therefore \angle GCF = \angle HCF,$

在 $\triangle FCG$ 和 $\triangle FCH$ 中,

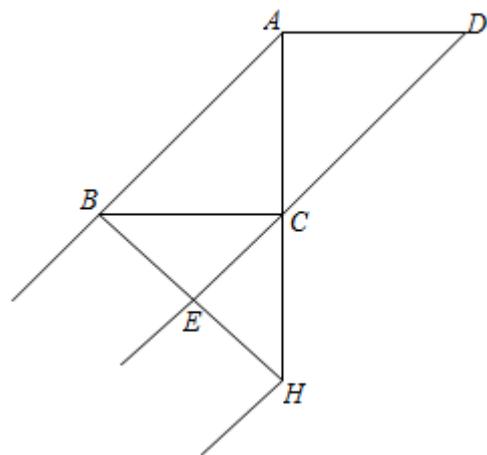
$$\begin{cases} CF = CF \\ \angle GCF = \angle HCF, \\ CG = CH \end{cases}$$

$\therefore \triangle FCG \cong \triangle FCH(SAS),$

$\therefore FG = FH,$

$\therefore FH = AF + AG = AF + BH$

当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时, 则 $CD \perp BE$, 因 $AF \perp BE$, 所以 $AF \parallel CD$, 即 AF 与 CD 无交点, 如图, 所以点 F 不存在.



综上, 当 $90^\circ < \angle BEC < 180^\circ$ 时, 有 $AF = BH + FH$; 当 $45^\circ < \angle BEC < 90^\circ$ 时, 有 $FH = BH + AF$; 当 $\angle BCE = 90^\circ$ 时, 点 F 不存在.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质, 等腰直角三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 属三角形综合性探究题目, 注意分类讨论, 以免漏解.



在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 A ，规定点 A 的 α 变换和 β 变换. α 变换：将点 A 向左平移一个单位长度，再向上平移两个单位长度； β 变换：将点 A 向右平移三个单位长度，再向下平移一个单位长度

(1) 对点 B 进行 α 变换，得到点 $(1, 1)$ ，则对点 B 进行 β 变换后得到的点的坐标为_____.

(2) 若对点 $C(m, 0)$ 进行 α 变换得到点 P ，对点 $C(m, 0)$ 进行 β 变换得到点 Q ， $OP = OQ$ ，求 m 的值.

(3) 点 D 为 y 轴的正半轴上的一个定点，对点 D 进行 α 变换后得到点 E ，点 F 为 x 轴上的一个动点，对点 F 进行 β 变换之后得到点 G ，若 $DG + EF$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$ ，直接写出点 D 的坐标_____.

【答案】 (1) $(5, -2)$

$$(2) m = -\frac{5}{8}$$

$$(3) (0, \frac{3}{2})$$

【解析】

【分析】 (1) 根据 α 变换求出 B 的坐标，再根据 β 变换求出对应点的坐标即可；

(2) 先求出 P 、 Q 的坐标，然后根据 $OP=OQ$ 构建关于 m 的方程即可求解；

(3) 设 $D(0, y)$ ， $F(x, 0)$ ，则 $E(-1, y+2)$ ， $G(x+3, -1)$ ，可得

$$DG + EF = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$

$$= \sqrt{[x - (-3)]^2 + [0 - (y+1)]^2} + \sqrt{[x - (-1)]^2 + [0 - (y+2)]^2}, \text{ 令 } P_1(-3, y+1), P_2(-1, y+2), \text{ 则}$$

$$P_1F = \sqrt{[x - (-3)]^2 + [0 - (y+1)]^2}, P_2F = \sqrt{[x - (-1)]^2 + [0 - (y+2)]^2}, \text{ 推出 } DG + EF = P_1F + P_2F, \text{ 推出}$$

$DG + EF$ 的最小值就是 x 轴上点 $F(x, 0)$ 到 P_1, P_2 的距离之和的值最小.

【小问 1 详解】

解：由题意知：点 $(1, 1)$ 向右平移一个单位长度，再向下平移两个单位长度即可得到 B ，

$\therefore B$ 的坐标为 $(2, -1)$ ，

\therefore 点 B 进行 β 变换后得到的点的坐标为 $(5, -2)$ ；

故答案为： $(5, -2)$ ；

【小问 2 详解】

解：由题意知：对点 $C(m, 0)$ 进行 α 变换得到点 P 的坐标为 $(m-1, 2)$ ，对点 $C(m, 0)$ 进行 β 变换得到点 $Q(m+3, -1)$ ，

$\because OP=OQ$,

$$\therefore OP^2 = OQ^2, \text{ 即 } (m-1)^2 + 2^2 = (m+3)^2 + (-1)^2,$$

$$\therefore m = -\frac{5}{8};$$

【小问 3 详解】

解：由题意，设 $D(0, y)$ ， $F(x, 0)$ ，则 $E(-1, y+2)$ ， $G(x+3, -1)$ ，

$$\therefore DG = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}, EF = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2},$$



$$P_1(-3, y+1), P_2(-1, y+2),$$

$$则 P_1F = \sqrt{[x-(-3)]^2 + [0-(y+1)]^2}, P_2F = \sqrt{[x-(-1)]^2 + [0-(y+2)]^2}$$

$$\therefore DG + EF = P_1F + P_2F,$$

$\therefore DG + EF$ 的最小值就是 x 轴上点 $F(x, 0)$ 到 P_1, P_2 的距离之和的值最小,

如果 P_1, P_2 在 x 轴的两侧, 那么点 F 就是 P_1P_2 与 x 轴的交点, $P_1F + P_2F$ 的最小值就是 P_1P_2 的长,

此时 $P_1P_2 = \sqrt{(-3+1)^2 + (y+1-y-2)^2} = \sqrt{5} \neq 2\sqrt{10}$, 故此种情况不符合题意, 舍去,

如果 P_1, P_2 在 x 轴的同侧, 作 P_1 关于 x 轴的对称点 $P_3(-3, -y-1)$, 连接 P_3P_2 交 x 轴于点 K , 此时, $P_1K + P_2K$ 的值最小,

$$\therefore \sqrt{(-3+1)^2 + (y+2+y+1)^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore y = \frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{9}{2},$$

又点 $D(0, y)$ 在 y 轴上, 则 $y > 0$,

$$\therefore y = \frac{3}{2},$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (0, \frac{3}{2}).$$

$$\text{故答案为: } (0, \frac{3}{2}).$$

【点睛】 本题考查了点的平移, 轴对称, 两点间距离公式, 二元二次方程组等知识, 解题关键是学会利用参数解决问题.