北师大实验中学 2023-2024 学年第一学期期中测验

高 一 数 学

2023 年 11 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题，共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid -2<x<4\}$, 那么 $A\cap B=$

(A) $\{-1,1\}$　(B) $\{1,3\}$　(C) $\{-1,1,3\}$　(D) $\{0,2,4\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为

(A) $(-1,1)$　(B) $[-1,1]$

(C) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

3. 下列函数中，在定义域内既是奇函数, 又是增函数的是

(A) $y=x^2$　(B) $y=x+1$　(C) $y=-\dfrac{1}{x}$　(D) $y=x^3$

4. 已知 $x>0$, 则 $x+\dfrac{9}{x}$ 的最小值为

(A) -3　(B) 3　(C) 6　(D) 10

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\geqslant 1, \\ x-2, x<1. \end{cases}$ 若 $f(a)=3$，则 $a=$

(A) ± 2　(B) 2　(C) -2　(D) 5

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的偶函数，且在 $[0,6]$ 上单调递增. 以下结论正确的是

(A) $f(-5)>f(\pi)>f(-2)$　(B) $f(\pi)>f(-2)>f(-5)$

(C) $f(\pi)>f(-5)>f(-2)$　(D) $f(-5)>f(-2)>f(\pi)$

7. 已知函数 $y=f(x)$ 图象是连续不断的，并且是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，有如下的对应值表

x	1	2	3	4
y	-0.24	1.21	3.79	10.28

以下说法中错误的是

(A) $f(0)<0$　(B) 当 $x>2$ 时，$f(x)>0$

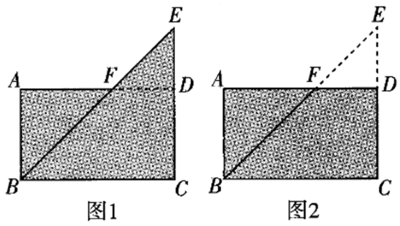
(C) 函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点　(D) 函数 $g(x)=f(x)+x$ 可能无零点

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，那么“存在实数 M，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $f(x)\leqslant M$” 是“函数 $f(x)$ 存在最大值”的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 数学里有一种证明方法为无字证明，是指仅用图形而无需文字解释就能不证自明的数学命题. 在同一平面内有形状、大小相同的图 1 和图 2，其中四边形 $ABCD$ 为矩形，$\triangle BCE$ 为等腰直角三角形，设 $AB=\sqrt{a}, BC=\sqrt{b}(b\geqslant a>0)$，则借助这两个图形可以直接无字证明的不等式是



(A) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　　(B) $\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$

(C) $a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{ab}$　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

10. 将 5 个 1, 5 个 2, 5 个 3, 5 个 4, 5 个 5 共 25 个数填入一个 5 行 5 列的表格内 (每格填入 1 个数)，使得同一行中任何两数之差的绝对值不超过 2，设第 k 行的所有数的和为 $r_k(k=1,2,3,4,5)$，m 为 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 中的最小值，则 m 的最大值为

(A) 8　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 11

第二部分 (非选择题，共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$, 则 $\neg p$: ______ .

12. 已知 a,b,c 为实数，能说明“若 $a>b>c$，则 $a^2>bc$” 为假命题的一组 a,b,c 的值是 ______ .

13. 函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的图象的对称中心是 ______ ，不等式 $f(x)\geqslant -1$ 的解集是 ______ .

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, x\in(-\infty,0], \\ |\dfrac{1}{x}-1|, x\in(0,+\infty). \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有 4 个不同的实数根 $x_1,x_2,x_3,x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$，则 t 的取值范围是 ______ , 若 $x_1+x_2+x_3x_4=0$，则 $t=$ ______ .

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 且满足下列条件:
(1) 对任意的 $x\in[0,1]$, 总有 $f(x)\geqslant 3$, 且 $f(1)=4$;
(2) 若 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_1+x_2\leqslant 1$, 则有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)-3$.
给出下列四个结论:

① $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant\dfrac{7}{2}$;

② $f(0)$ 可能为区间 $[3,4]$ 中的任意值;

③ 函数 $f(x)$ 的最大值是 4;

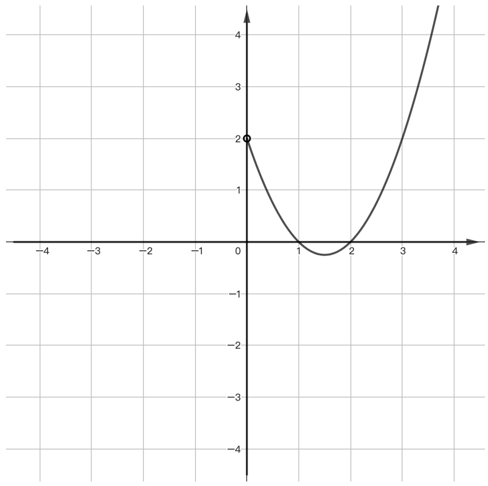
④ 当 $x\in\left(\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3}\right]$ 时, $f(x)<3x+3$.

其中所有正确结论的序号是 ______ .

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答题应写出文字说明，验算步骤或证明过程。

16.（15 分）

已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-3x+2$. 现已作出函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象，如图所示.



（I） 请根据条件，将函数 $f(x)$ 的图象补充完整，并直接写出函数 $f(x)$ 的表达式；

（II） 写出函数 $f(x)$ 的单调区间，并利用单调性的定义证明函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

（III） 直接写出不等式 $(x-1)f(x)>0$ 的解集.

17.（15 分）

已知集合 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x|x^2-6ax+5a^2<0\}$.

（I） 若 $a=1$，求 $A\bigcup B$；

（II） 请在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得至少存在一个实数 a 满足该条件，并求出 a 的范围.

① $A\bigcap B=B$；② $A\bigcup B=B$；③ $\complement_{\mathbf{R}}A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（14 分）

已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}2x^2+y^2=2,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{R}$.

（I） 当 $k=1$ 时，求该方程组的解；

（II） 证明：无论 k 为何值，该方程组总有两组不同的解；

（III） 记该方程组的两组不同的解分别为 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2,\\ y=y_2,\end{cases}$ 判断 $3(y_1+y_2)-2y_1y_2$ 是否为定值. 若为定值，请求出该值；若不是定值，请说明理由.

19.（13 分）

某厂家为开拓市场, 拟对广告宣传方面的投入进行调整. 经调查测算, 产品的年订购量 t(万件) 与广告费用 x(万元) 之间的关系为 $t=25-\dfrac{k}{x+2}$. 已知当广告费用投入为 6 万元时, 产品订购量为 19 万件. 该厂家每生产 1 万件该产品, 需投入 12 万元. 另外，厂家每年还需投入 30 万元用于生产线的维护. 规定年总成本为生产投入费用、维护投入费用、广告费用的总和.

(I) 求 k 的值;

(II) 试求该厂家的年总成本 y(万元) 与广告费用 x(万元) 之间的函数关系式;

(III) 假定年生产成本为生产投入费用、维护投入费用的和. 若每件产品的售价定为产品的年平均生产成本的 2 倍, 当广告费用为多少万元时, 厂家的年利润最高?

20.（14 分）

已知函数 $f(x)=x|x-a|+2x$，$a\geqslant 0$.

(I) 证明：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 是奇函数;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(III) 若对任意 $x\in[1,2]$, 关于 x 的不等式 $f(x)<2x+1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21.（14 分）

对任意非空数集 A, 定义 $\Omega(A)=\{\pi(X)\mid X\subseteq A\text{且}X\neq\phi\}$, 其中 $\pi(X)$ 表示非空数集 X 中所有元素的积. 特别地, 如果 $X=\{x\}$, 规定 $\pi(X)=x$.

(I) 若 $A_1=\left\{\dfrac{1}{2},1,4\right\},A_2=\{2,3,5\}$, 请直接写出集合 $\Omega(A_1)$ 和 $\Omega(A_2)$ 中元素的个数；

(II) 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, 其中 a_i 是正整数（$i=1,2,3,4,5$）, 求集合 $\Omega(A)$ 中元素个数的最大值和最小值, 并说明理由；

(III) 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$, 其中 a_i 是正实数 ($i=1,2,3,4,5,6,7$), 求集合 $\Omega(A)$ 中元素个数的最小值, 并说明理由.

答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	D	C	B	A	D	B	A	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geqslant 0.$

12. 答案不唯一，如 $a = 1, b = -1, c = -2.$

13. $(1,1)$，$(-\infty, 0] \cup (1, +\infty).$

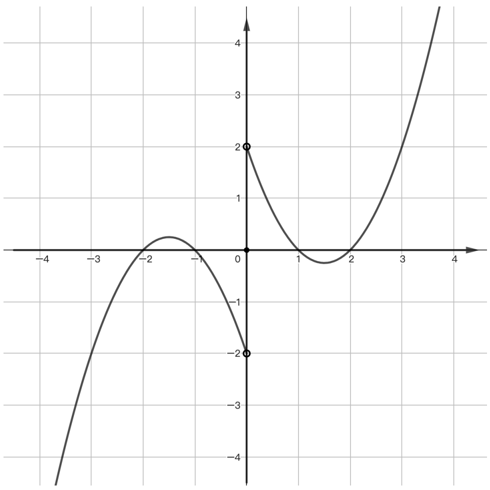
14. $(0,1)$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

15. ①③④.

13,14 题第一个空 3 分，第二个空 2 分，15 题的采分点为 0,2,3,5 分，有错误不给分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答题应写出文字说明，验算步骤或证明过程。

16. 解：(I) 图象如图，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -x^2 - 3x - 2, x < 0. \end{cases}$$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

(II) 单调增区间是 $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$，

单调减区间是 $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$，$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

证：$\forall x_1, x_2 \in (0,1)$，不妨设 $x_1 < x_2$，

$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - 3x_1 + 2 - (x_2^2 - 3x_2 + 2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3)$，

因为 $x_1 + x_2 - 3 < 0$，$x_1 - x_2 < 0$，

所以，$f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，

因此,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

解集为 $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

17. 解：(I)$A = (-1, 3)$,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

当 $a = 1$ 时，$B = (1, 5)$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

因此，$A \cup B = (-1, 5)$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

(II) 选择条件①或③，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 分

由条件可得 $B \subseteq A$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 分

当 $a = 0$ 时，$B = \emptyset$，满足题意；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

当 $a>0$ 时，$B=(a,5a)$，

所以，$5a\leqslant 3$，即 $a\leqslant\frac{3}{5}$，所以，$0<a\leqslant\frac{3}{5}$ ······································ 2 分

当 $a<0$ 时，$B=(5a,a)$，

所以，$5a\geqslant -1$，即 $a\geqslant -\frac{1}{5}$，所以，$-\frac{1}{5}\leqslant a<0$ ······································ 2 分

综上所述，a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right]$. ······································ 1 分

18. 解：(I) 当 $k=1$ 时，消去 y，得 $3x^2+2x-1=0$， ······································ 2 分

解得 $x_1=-1,x_2=\frac{1}{3}$，

因此，方程组的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{4}{3}. \end{cases}$ ······································ 2 分

(II) 消去 y，得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$， ······································ 1 分

$\Delta=8k^2+8>0$， ······································ 2 分

因此，该方程有两个不同的解，该方程组也对应有两组不同的解. ······································ 1 分

(II) 由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+2},x_1x_2=-\frac{1}{k^2+2}$， ······································ 2 分

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\frac{4}{k^2+2}$， ······································ 1 分

$y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-2k^2+2}{k^2+2}$， ······································ 1 分

所以，$3(y_1+y_2)-2y_1y_2=\frac{12}{k^2+2}-\frac{-4k^2+4}{k^2+2}=4$， ······································ 1 分

因此，是定值，且定值为 4. ······································ 1 分

19. 解:(I) 当 $x=6$ 时，$t=25-\frac{k}{6+2}=19$，解得 $k=48$, ······································ 2 分

(II)$y=30+x+12(25-\frac{48}{x+2}),x\geqslant 0$. ······································ 3 分

(III) 设年利润为 W 万元，

则 $W=\frac{y-x}{t}\cdot 2t-y=y-2x=30-x+300-\frac{576}{x+2}=332-(x+2+\frac{576}{x+2})$, ······ 6 分

当且仅当 $x+2=24$, $x=22$ 时, W 取最大值 284. ······································ 2 分

20. 解：(I) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x|x|+2x$，

$f(-x)=-x|-x|-2x=-f(x)$，

因此，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. ······································ 3 分

(II) $f(x)=\begin{cases} x^2+(2-a)x, x\geqslant a, \\ -x^2+(2+a)x, x<a. \end{cases}$ ······································ 2 分

当 $x\geqslant a$ 时，$\frac{a-2}{2}\leqslant a$，解得 $a\geqslant -2$； ······································ 2 分

当 $x<a$ 时，$\dfrac{a+2}{2}\geqslant a$，解得 $a\leqslant 2$；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

所以，a 的取值范围是 $[0,2]$.

(III) 因为 $f(x)<2x+1$ 在 $x\in[1,2]$ 恒成立, 即 $x|x-a|<1,x\in[1,2]$,

所以，$x-\dfrac{1}{x}<a<x+\dfrac{1}{x}$ 恒成立, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

考虑 $x-\dfrac{1}{x}\in[0,\dfrac{3}{2}]$，$x+\dfrac{1}{x}\in[2,\dfrac{10}{3}]$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

所以，a 的取值范围是 $(\dfrac{3}{2},2)$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

21. 解: (I)$\Omega(A_1)$ 中有 4 个元素, $\Omega(A_2)$ 中有 7 个元素. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$4 分

(II)$\Omega(A)$ 中元素个数的最大值是 31，最小值是 11.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

集合 A 的非空子集有 $2^5-1=31$ 个, 因此, $\Omega(A)$ 中最多有 31 个元素.

集合 $A=\{2,3,5,7,11\}$, A 中任意两个不同子集元素的乘积不同,

此时，$\Omega(A)$ 中有 31 个元素.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

不妨设 $1\leqslant a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,

则 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_2\cdot a_5<a_3\cdot a_5<a_4\cdot a_5<a_2\cdot a_4\cdot a_5<a_3\cdot a_4\cdot a_5<a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5$,

所以, $\Omega(A)$ 中至少 11 个元素.

$A=\{1,2,4,8,16\}$,$\Omega(A_1)=\{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024\}$,

此时，$\Omega(A)$ 中有 11 个元素.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

(III) $\Omega(A)$ 中最少有 13 个元素.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

如 $A=\left\{\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},1,2,4,8\right)$ ，$\Omega(A)=\left\{\dfrac{1}{64},\dfrac{1}{32},\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},1,2,4,8,16,32,64\right\}$,

此时，$\Omega(A)$ 中有 13 个元素.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

证明如下: 记 $|A|$ 表示集合 A 中的元素个数,

对集合 A 按照如下分类:

$$A_1=\{a\mid a\in A,a<1\},$$
$$A_2=\{a\mid a\in A,a=1\},$$
$$A_3=\{a\mid a\in A,a>1\},$$

设 $|A_1|=x,|A_2|=y,|A_3|=z$, 则 $x+y+z=7,y\leqslant 1,x+z\geqslant 6$. 设 $B=\Omega(A)$, 再对集合 B 按照如下分类:

$$B_1=\{b\mid b\in B,b<1\},$$
$$B_2=\{b\mid b\in B,b=1\},$$
$$B_3=\{b\mid b\in BA,b>1\},$$

设 $|B_1|=p,|B_2|=q,|B_3|=r$,

设 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_x\}$, 其中，$a_1<a_2<\cdots<a_x<1$, 则

$$a_1a_2\cdots a_x<a_1a_2a_3<\cdots<a_1a_2a_x<a_1a_2<a_1a_3<a_1a_x<a_1<a_2<\cdots<a_x<1,$$

故 $p\geqslant x+(x-1)+(x-2)+\cdots+1=\dfrac{1}{2}x(x+1)$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

同理可证，$r \geqslant z+(z-1)+(z-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}z(z+1)$,
而 $q \geqslant y$, 因此，

$$\begin{aligned}&p+q+r \geqslant \frac{1}{2}x(x+1)+\frac{1}{2}z(z+1)+y=\frac{1}{2}\left(x^2+x+z^2+z+2y\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2-x+z^2-z+14\right)=\frac{1}{2}\left[(x+z)^2-(x+z)-2xz\right]+7,\\&\geqslant \frac{1}{2}\left[(x+z)^2-(x+z)-\frac{(x+z)^2}{2}\right]+7=\frac{1}{4}\left[(x+z)^2-2(x+z)\right]+7,\end{aligned}$$

……………………………………………………………………………………1 分

注意到 $6 \leqslant x+z \leqslant 7$,
所以，$p+q+r \geqslant \frac{1}{4}\left(6^2-2\times 6\right)+7=13$ ，
当且仅当 $x=z=3, y=1$ 时，等号成立,……………………………………………1 分
因此，$\Omega(A)$ 中最少有 13 个元素.