东城区 2020-2021 学年度第一学期期末教学统一检测

初三数学　2021.1

一、　　选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是

A. 直角三角形　B. 圆　C. 等边三角形　D. 四边形

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，下列函数的图象上存在点 $P(m,n)$（$m>0,n>0$）的是

A. $y=\dfrac{2}{x}$　B. $y=-x-1$　C. $y=-x^2-1$　D. $y=-3x$

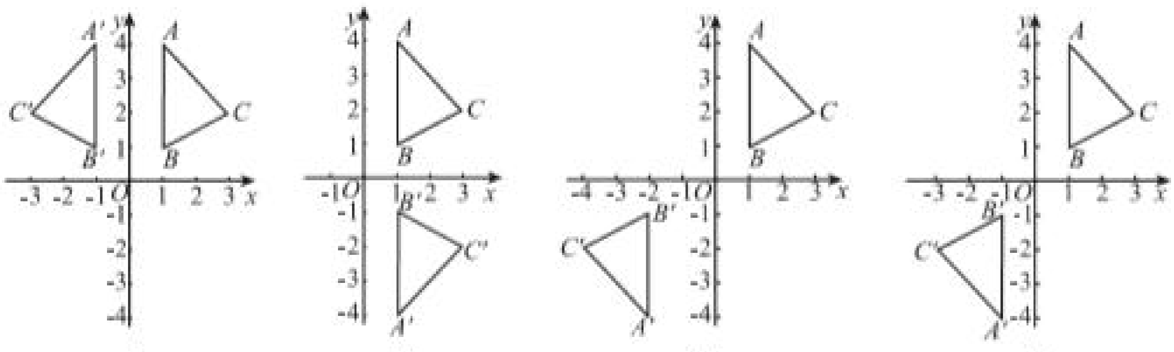
3. 若关于 x 的方程 $ax^2-2ax+1=0$ 的一个根是-1，则 a 的值是

A. 1　B. -1　C. $-\dfrac{1}{3}$　D. -3

4. 若菱形的面积为定值，则它的一条对角线的长与另一条对角线的长满足的函数关系是

A. 正比例函数关系　B. 反比例函数关系　C. 一次函数关系　D. 二次函数关系

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，△ABC 与△$A'B'C'$关于原点 O 中成心对称的是



A　　B　　C　　D

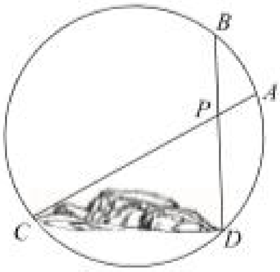
6. 不透明的袋子里有 50 张 2022 年北京冬奥会宣传卡片，卡片上印有会徽、吉祥物冰墩墩、吉祥物雪容融图案，每张卡片只有一种图案，除图案不同外其余均相同，其中印有冰墩墩的卡片共有 n 张. 从中随机摸出 1 张卡片，若印有冰墩墩图案的概率是 $\dfrac{1}{5}$，则 n 的值是

A. 250　B. 10　C. 5　D. 1

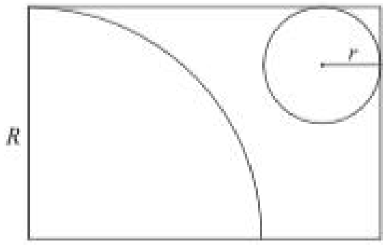
7. 如图，在圆形花圃中有两条笔直的小径,两端都在花圃边界上，分别记为 AC，BD，设交点为 P，点 C，D 之间有一座假山. 为了测量 C，D 之间的距离，小明已经测量了线段 AP 和 PD 的长度，只需再测量一条线段的长度，就可以计算 C，D 之间的距离.小明应该测量

的是

A．线段 BP　　B．线段 CP　　C．　线段 AB　　D．　线段 AD



7 题图



8 题图

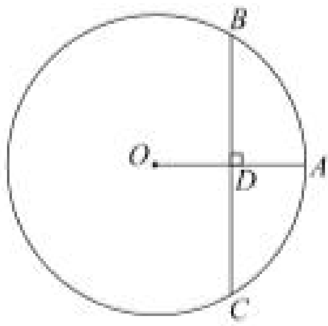
8．如图所示，在矩形纸片上剪下一个扇形和一个圆形，使之恰好能围成一个圆锥模型．若扇形的半径为 R，圆的半径为 r，则 R 与 r 满足的数量关系是

A. $R=\sqrt{3}r$　　B. $R=2r$　　C. $R=3r$　　D. $R=4r$

二、填空题（本题共 24 分，每小题 3 分）

9．写出一个二次函数，使其满足：①图象开口向下；②当 $x>0$ 时，y 随着 x 的增大而增小．这个二次函数的解析式可以是：________________．

10. 如图，点 A 在⊙O 上，弦 BC 垂直平分 OA，垂足为 D. 若 $OA=4$，则 BC 的长为___________.

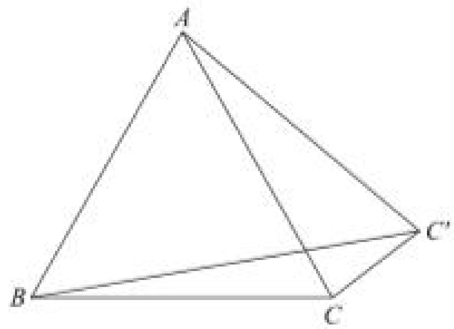


11. A 盒中有 2 个黄球、1 个白球，B 盒中有 1 个黄球、1 个白球，这些球除颜色外无其它差别．分别从每个盒中随机取出 1 个球，取出的 2 个球都是白球的概率是________.

12. 2017 年生产 1 吨某种商品的成本是 3000 元，由于原料价格上涨，两年后，2019 年生产 1 吨该商品的成本是 5000 元，求该种商品成本的年平均增长率. 设年平均增长率为 x，则所列的方程应为____________(不增加其它未知数）.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y=x^2$ 沿着 y 轴平移 2 个单位长度，所得抛物线的函数解析式为____________________.

14. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形．若将 AC 绕点 A 逆时针旋转角 α 后得到 AC'，连接 BC' 和 CC'，则 $\angle BC'C$ 的度数为_________．



15. 已知抛物线 $y=x^2-2x+c$ 与直线 $y=m$ 相交于 A，B 两点，若点 A 的横坐标 $x_A=-1$，则点 B 的横坐标 x_B 的值为________.

16. 如图 1，在△ABC 中，$AB>AC$， D 是边 BC 上的动点．设 B，D 两点之间的距离为 x，A，D 两点之间的距离为 y， 表示 y 与 x 的函数关系的图象如图 2 所示. 线段 AC 的长为__________，线段 AB 的长为_________.

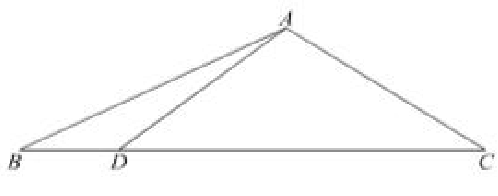


图 1

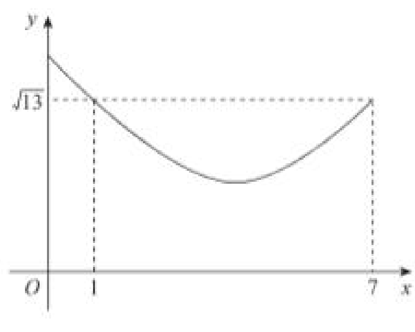


图 2

三、解答题（本题共 52 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22 题 6 分，第 23-25 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 已知：如图，线段 AB.

求作：以 AB 为斜边的直角△ABC，使得一个内角等于 30°．

作法：①作线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 O；

②以点 O 为圆心，OA 长为半径画圆；

③以点 B 为圆心，OB 长为半径画弧与⊙O 相交，记其中一个交点为 C；

④分别连接 AC，BC；

△ABC 就是所求作的直角三角形.

(1)使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 OC,

∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠ACB=__________°　(______________________________)(填推理的依据）.

∴△ABC 是以 AB 为斜边的直角三角形.

∵OC=OB=BC,

∴△OBC 是等边三角形.

∴∠COB=60°．

∴∠A=__________°．

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数的图象与 y 轴交于点 A(0，-1)，且过点 B(1，4)，C(-2，1).

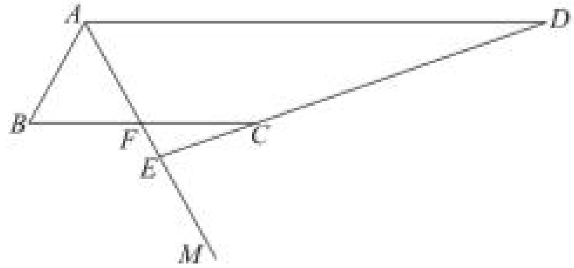
（1）求二次函数的解析式；

（2）当-1≤x≤0 时，求 y 的取值范围.

19. 如图，AM 平分∠BAD，BF//AD 交 AM 于点 F, 点 C 在 BF 的延长线上, CF=BF，DC 的延长线交 AM 于点 E..

(1) 求证：AB=BF；

(2) 若 AB=1，AD=4, 求 $S_{\triangle EFC}:S_{\triangle EAD}$ 的值



20. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+n=0$.

(1)若方程有两个相等的实数根，用含 m 的代数式表示 n；

(2)若方程有两个不相等的实数根，且 m=-4.

①求 n 的取值范围；

②写出一个满足条件的 n 的值，并求此时方程的根.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 过点 A（1, 1）, 与直线 $y=4x$ 交于 B, C 两点（点 B 的横坐标小于点 C 的横坐标）.

（1） 求 k 的值；

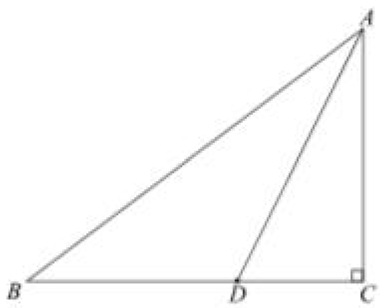
（2） 求点 B, C 的坐标；

（3）若直线 x=t 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 交于点 $D\left(t,y_1\right)$， 与直线 $y=4x$ 交于点 $E\left(t,y_2\right)$，当 $y_1<y_2$ 时，写出 t 的取值范围.

22. 如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AD 平分∠BAC，交 BC 于点 D，以点 D 为圆心，DC 长为半径画⊙D.

（1）补全图形，判断直线 AB 与⊙D 的位置关系，并证明；

（2）若 BD=5，AC=2DC，求⊙D 的半径.



23. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2-2bx+1$．

（1）若此抛物线经过点（-2,-2），求 b 的值；

（2）写出抛物线的顶点坐标（用含 b 的式子表示）；

（3）若抛物线上存在两点 A（m, m）和 B（n, n），且$|m|>2$，$|n|<2$，求 b 的取值范围．

24. 在△ABC 中，$AB=2\sqrt{3}$， $CD\perp AB$ 于点 D， $CD=\sqrt{2}$．

（1）如图 1，当点 D 是线段 AB 中点时，

①AC 的长为____________；

②延长 AC 至点 E, 使得 $CE=AC$，此时 CE 与 CB 的数量关系为________________，$\angle BCE$ 与 $\angle A$ 的数量关系为________________；

（2）如图 2，当点 D 不是线段 AB 的中点时，画$\angle BCE$（点 E 与点 D 在直线 BC 的异侧)，使$\angle BCE=2\angle A$，$CE=CB$，连接 AE.

①按要求补全图形；

②求 AE 的长.

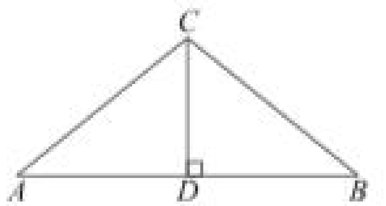


图 1

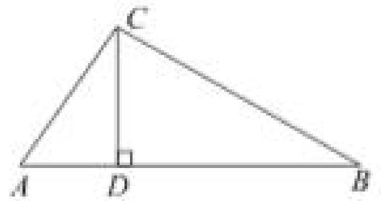


图 2

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1.

给出如下定义：记线段 AB 的中点为 M ，当点 M 不在⊙O 上时，平移线段 AB，使点 M 落在⊙O 上，得到线段 $A'B'$(A'，B'分别为点 A，B 的对应点). 线段 AA' 长度的最小值称为线段 AB 到⊙O 的“平移距离”.

(1) 已知点 A 的坐标为（-1，0），点 B 在 x 轴上.

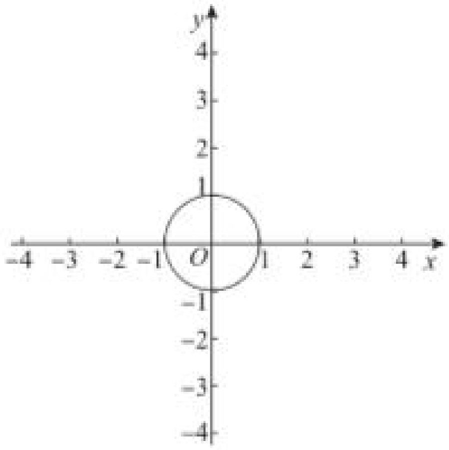
①若点 B 与原点 O 重合，则线段 AB 到⊙O 的“平移距离”为________；

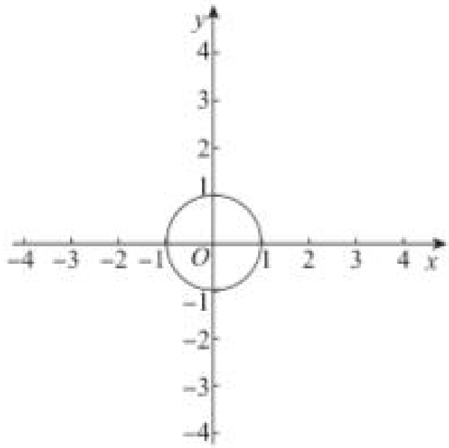
②若线段 AB 到⊙O 的“平移距离”为 2，则点 B 的坐标为________；

(2) 若点 A，B 都在直线 $y=\dfrac{4}{3}x+4$ 上，AB=2，记线段 AB 到⊙O 的“平移距离”为 d_1，

求d_1的最小值；

(3)若点A的坐标为（3，4），AB=2，记线段AB到⊙O的“平移距离”为d_2，直接写出d_2的取值范围.





备用图

东城区 2020-2021 学年度第一学期期末教学统一检测

初三数学参考答案及评分标准　2021.1

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）

答案	B	A	C	B	D	B	C	D
题号	1	2	3	4	5	6	7	8

二、填空题（本题共 24 分，每小题 3 分）

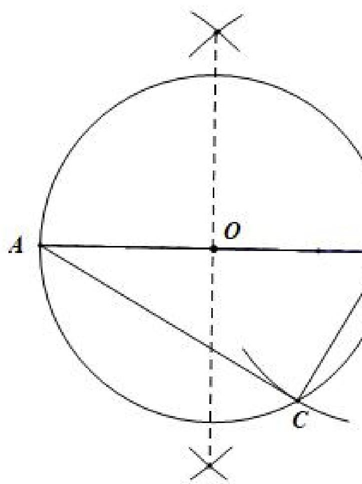
9. 答案不唯一，如 $y=-x^2$　　10. $4\sqrt{3}$　　11. $\frac{1}{6}$

12. $3000(1+x)^2=5000$　　13. $y=x^2+2$,或 $y=x^2-2$　　14. $30°$

15. 3　　16. $\sqrt{13}$，$2\sqrt{5}$

三.解答题（本题共 52 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22 题 6 分，第 23-25 题，每小题 7 分）

17. 解：（1）补全的图形如图所示.



-- 2 分

（2）90，直径所对的圆周角是直角，30.

--5 分

18. 解：（1）设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

∵点 A(0，-1)，B(1，4), C(-2，1)都在二次函数的图象上，

$$\therefore \begin{cases} c=-1, \\ a+b+c=4, \\ 4a-2b+c=1. \end{cases}$$

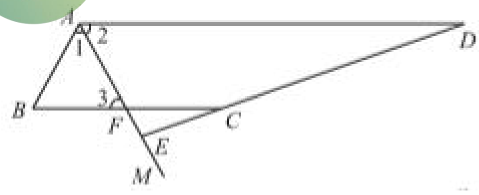
解得$\begin{cases} a=2, \\ b=3, \\ c=-1. \end{cases}$

所以，二次函数的解析式为$y=2x^2+3x-1$．　　--3 分

（2）函数图象的顶点坐标为$\left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{17}{8}\right)$.

当-1≤x≤0 时， y 的取值范围是$-\dfrac{17}{8}$≤y≤-1.　--5 分

19.（1）证明：∵AE 平分∠BAD,



∴∠1=∠2.

∵$BF//AD$,

∴∠3=∠2.　------------------------1 分

∴∠1=∠3.

∴$AB=BF$.　--2 分

（2）解：∵$CF=B\ F$, AB=1，

∴CF=1.　--3 分

∵$BF//AD$,

∴△EFC∽△EAD.　--4 分

∴$\dfrac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle EAD}}=\left(\dfrac{FC}{AD}\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.　--5 分

20. 解：(1) ∵方程$x^2+mx+n=0$有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=m^2-4n=0$．

∴ $n=\dfrac{m^2}{4}$．--2 分

（2）当 m=-4, 方程为$x^2-4x+n=0$．

①∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=16-4n>0$ ．

解得$n<4$．--3 分

②答案不唯一，如 n=3时，方程的两根为$x_1=1, x_2=3$．--5 分

（参考：$x_1=2-\sqrt{4-n}, x_2=2+\sqrt{4-n}$）

21．解：(1) ∵双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 过点 A（1, 1），

∴ $k=1$． --1 分

(2) 由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}, \\ y=4x, \end{cases}$

得 $\dfrac{1}{x}=4x$，

去分母，得 $4x^2=1$.

解得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$.

经检验，$x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$ 是原方程的解.

∴ $y_1=-2$，$y_2=2$．

∵点 B 的横坐标小于点 C 的横坐标，

∴$B\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$，$C\left(\dfrac{1}{2},2\right)$．--3 分

（3）当 $y_1<y_2$ 时，$-\dfrac{1}{2}<t<0$，或 $t>\dfrac{1}{2}$． --5 分

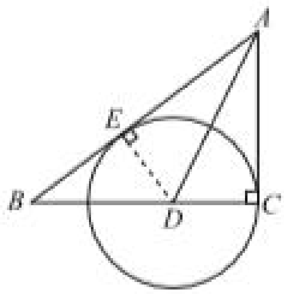
22．解：（1）补全图形如图，直线 AB 与⊙D 相切. --1 分

证明：作 $DE\perp AB$ 于点 E.

∵∠DCA=90°，AD 是∠BAC 的平分线，

∴ $DE=DC$． ---2 分

∴ 直线 AB 与⊙D 相切. --3 分



（2）∵$DE=DC$，$AC=2DC$，

∴ $AC=2DE$.

∵ ∠BCA=∠BED=90°，∠B=∠B，

∴ $\Delta BCA \backsim \Delta BED$． ---4 分

$\therefore \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}$.

$\therefore AB=2DB$.

$\because BD=5$,

$\therefore AB=10$. ---5 分

设 $DC=r$，则 $AC=2r$.

RtΔABC 中，$BC^2+AC^2=AB^2$，

$\therefore (5+r)^2+(2r)^2=10^2$.

解得 $r=3$.

$\therefore \odot D$ 的半径为 3. ---6 分

23. 解：（1）$\because$抛物线经过点（-2,-2），

$\therefore 4+4b+1=-2$.

$\therefore b=-\frac{7}{4}$. --------------------------------------2 分

（2）抛物线的对称轴为直线 $x=b$，纵坐标 $y=1-b^2$，顶点坐标 $\left(b,1-b^2\right)$.

--------------------------------4 分

（3）由（1）知，当抛物线经过点（-2,-2）时，$b=-\frac{7}{4}$.

当抛物线经过点（2,2）时，$b=\frac{3}{4}$.

①当 $b<-\frac{7}{4}$ 时，　令 $x=-2$，则 $y=4+4b+1=4b+5<-2$；

令 $x=2$，　则 $y=4-4b+1=-4b+5>2$.

$\because x>b$ 时，y 随着 x 的增大而增大，　$x<b$ 时，y 随着 x 的增大而减小，

$\therefore b<-\frac{7}{4}$ 符合题意；

②当 $b>\frac{3}{4}$ 时，　令 $x=-2$，则 $y=4+4b+1=4b+5>-2$；

令 $x=2$，　则 $y=4-4b+1=-4b+5<2$.

$\because x<b$ 时，y 随着 x 的增大而减小，　$x>b$ 时，y 随着 x 的增大而增大，

$\therefore b>\frac{3}{4}$ 符合题意；

③当 $-\frac{7}{4}\leqslant b\leqslant\frac{3}{4}$ 时，令 $x=-2$，则 $y=4+4b+1=4b+5\geqslant-2$；

令 $x=2$，　则 $y=4-4b+1=-4b+5\geqslant 2$.

$\because$抛物线的开口向上，

$\therefore -\frac{7}{4}\leqslant b\leqslant\frac{3}{4}$ 不符合题意.

综上所述，b 的取值范围是 $b<-\frac{7}{4}$，或 $b>\frac{3}{4}$. ------------------------------------7 分

24.解：（1）① $\sqrt{5}$. ------------------------------------1 分

② $CE=CB$, $\angle BCE=2\angle A$. ------------------------------------3 分

（2）解：按要求补全图形，如图. ------------------------------------4 分

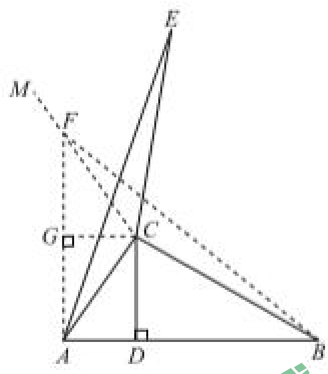
作 $\angle ACM=\angle BCE$，在射线 CM 上截取 $CF=CA$，连接 BF，AF.

∴ $\angle ACM+\angle FCE=\angle BCE+\angle FCE$，即 $\angle ACE=\angle FCB$.

∵ $CE=CB$,

∴ $\triangle ACE\cong\triangle FCB$（SAS）.

∴ $AE=BF$. ------------------------------------5 分



过点 C 作 $CG\perp AF$ 于点 G，

∴ $\angle CGF=90^\circ$.

∵ $CF=CA$，

∴ $\angle ACF=2\angle ACG$，$AF=2AG$.

∵ $\angle BCE=2\angle BAC$，

∴ $\angle ACG=\angle BAC$.

∴ $CG\parallel AD$.

∴ $\angle AGC=\angle BAF=\angle ADC=90^\circ$.

∴四边形 $ADCG$ 是矩形. ------------------------------6 分

∴ $AG=CD=\sqrt{2}$.

∴ $AF=2\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle BAF$ 中，$\angle BAF=90^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，$AF=2\sqrt{2}$，

∴ $BF=2\sqrt{5}$.

∴ $AE=2\sqrt{5}$. ------------------------------------7 分

25. 解：(1)①线段 AB 到⊙O 的“平移距离”为 $\frac{1}{2}$. ------------------------------1 分

② B 点的坐标为(-5，0)或(7，0). ------------------------------------3 分

(2)如图，取 AB 的中点 M，连接 OM 交⊙O 于点 M'，以 M' 为中点作线段 $A'B'$，使得 $A'B'$ $/\!/ AB$ 且 $A'B'=AB=2$，则四边形 $AA'BB'$ 为平行四边形.

∴$M'M=AA'$. ------------------------------------4 分

由题意可知，$AA'=d_1$.

设直线 $y=\dfrac{4}{3}x+4$ 交 x 轴于点 C，交 y 轴于点 D，

∴点 $C(-3,0)$，$D(0，4)$.

∴$CD=5$.

过点 O 作 $ON\perp$ 直线 CD 于点 N，交⊙O 于点 N'.

在 Rt△COD 中，可得 $ON=\dfrac{12}{5}$.

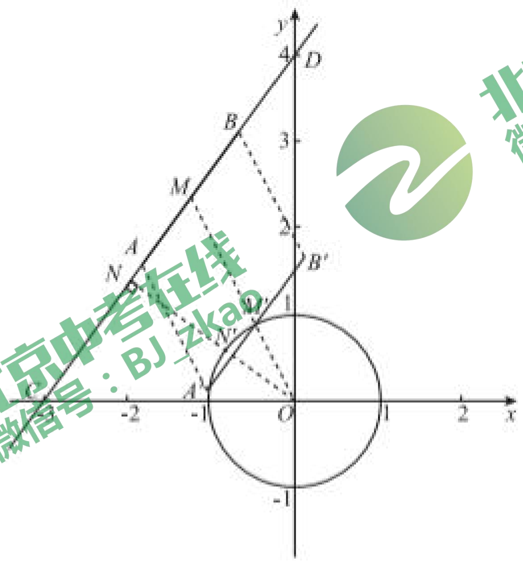
∴$NN'=ON-ON'=\dfrac{12}{5}-1=\dfrac{7}{5}$.

∵$MM'\geqslant NN'$，

∴$MM'\geqslant\dfrac{7}{5}$.

∴$AA'\geqslant\dfrac{7}{5}$.

∴d_1的最小值是$\dfrac{7}{5}$ （当点 M 与点 N 重合时取得）. ------------------------------------5 分



(3)$3\leqslant d_2\leqslant 5$. --7 分