



一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

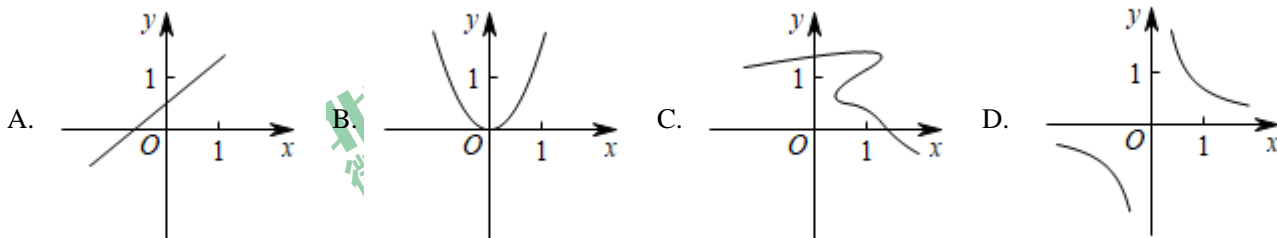
1. 函数 $y = \frac{1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 3$ B. $x \geq 3$ C. $x \neq 3$ D. $x < 3$

2. 一家鞋店在某种运动鞋进货的过程中，商家关注的是卖出的这种运动鞋尺码组成的一组数据的（ ）

- A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

3. 下列各曲线中，不能表示 y 是 x 的函数的是（ ）



4. 下面的多边形中，内角和与外角和相等的是（ ）



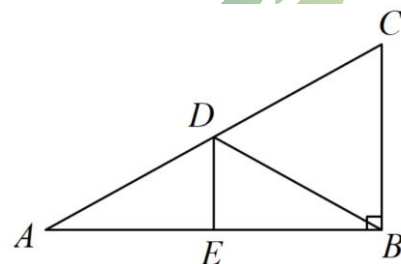
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别是 a ， b ， c ，下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是（ ）

- A. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ B. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$
 C. $a = 2$ ， $b = 2$ ， $c = 3$ D. $a = 1$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{5}$

6. 下列运算正确的是（ ）

- A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ C. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ D. $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{2}$

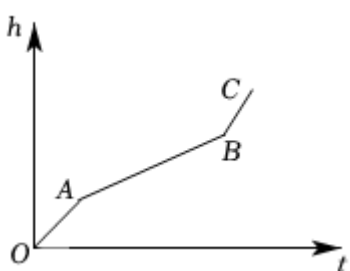
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 2$ ，点 D 是边 AC 的中点，点 E 是边 AB 的中点，则 $\triangle BDE$ 的周长是（ ）



- A. 6 B. $3 + \sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$



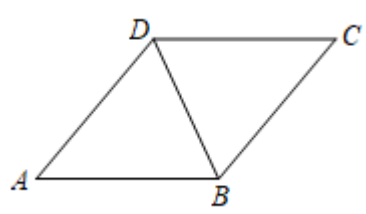
8. 匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示（图中 $OA-AB-BC$ 是一条折线）. 这个容器的形状可能是下面图中的（ ）



二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{5} =$ _____.

10. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle ABD=65^\circ$ ，则 $\angle C$ 度数是_____.



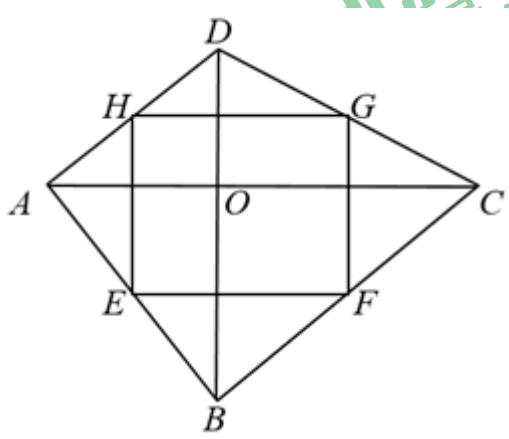
11. 如果一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象经过 $(0,-1)$ ，且 y 随 x 的增大而增大，那么这个一次函数的解析式可以是_____（写出一个即可）.

12. 每年的 4 月 23 日是“世界读书日”，某校为了解 4 月份八年级学生的读书情况，随机调查了八年级 50 名学生读书的册数，数据整理如下：

册数	0	1	2	3	4
人数	9	3	20	15	3

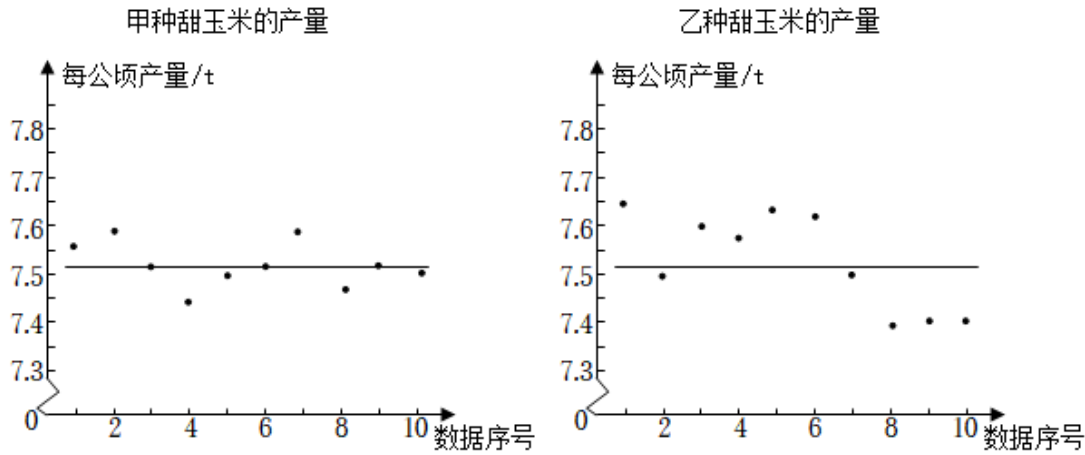
由此估计该校八年级学生 4 月份人均读书_____册.

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ， E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，只需添加一个条件，即可证明四边形 $EFCH$ 是矩形，这个条件可以是_____（写出一个即可）.

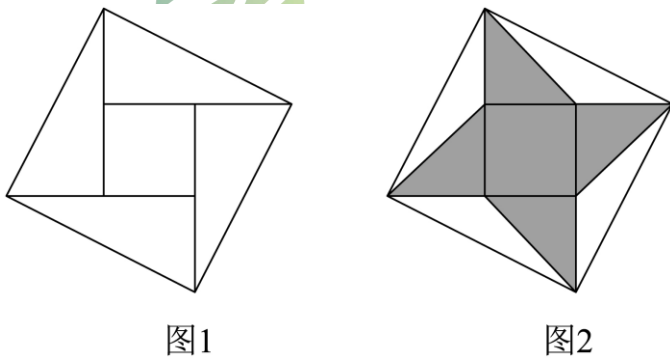




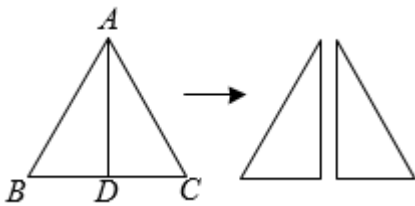
14. 农科院为某地选择甲、乙两种甜玉米种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农院所关心的问题，他们各用10块自然条件相同的试验田进行试验，下图是试验后得到的各试验田两种种子每公顷的产量（单位：t），已知甲、乙两种甜玉米种子的平均产量相差不大，那么由样本估计总体，推测这个地区比较适合种植_____（填“甲”或“乙”）种甜玉米，理由是_____。



15. 如图1，四个全等的直角三角形围成一个大正方形，中间是一个小正方形，这个图形是我国汉代赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。连接四条线段得到如图2的新的图案。如果图1中的直角三角形的长直角边为5，短直角边为3，图2中阴影部分的面积为 S ，那么 S 的值为_____。



16. 在等边 $\triangle ABC$ 中， AD 为边 BC 的中线，将此三角形沿 AD 剪开成两个三角形，然后把这两个三角形拼成一个平行四边形，如果 $AB = 2$ ，那么在所有能拼成的平行四边形中，对角线长度的最大值是_____。



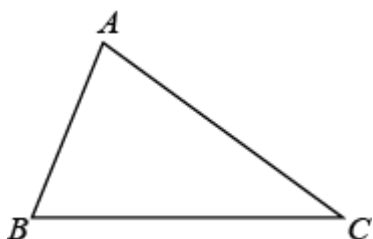
三、解答题（本题共60分，第17、18、20题，每小题5分，第19、21-23题，每小题6分，第24-26题，每小题7分）

17. 计算： $\sqrt{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{(-3)^2} + |-1|$.

18. 已知 $x = \sqrt{5} + 1$ ，求代数式 $x^2 - 2x + 1$ 的值.

19. 已知： $\triangle ABC$.

求作：直线 AD ，使得 $AD \parallel BC$.



作法：如图，

①分别以点A、点C为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径画弧，两弧相交于点M、点N；

②作直线MN交AC于点E；

③以点E为圆心，BE长为半径画弧，交射线BE于点D；

④作直线AD.

所以直线AD就是所求作的直线.

(1) 使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

(2) 完成下面的证明.

证明：连接CD，

$\because AE = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BE = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

\therefore 四边形ABCD是平行四边形，（ $\underline{\hspace{2cm}}$ ）（填推理的依据）.

$\therefore AD \parallel BC$ （ $\underline{\hspace{2cm}}$ ）（填推理的依据）.

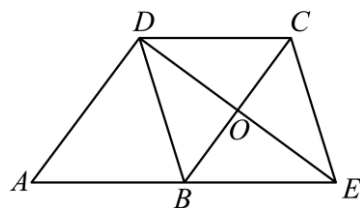
20. 在平面直角坐标系xOy中，一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点A(-3,4).

(1) 求k的值；

(2) 画出一函数的图象；

(3) 根据图象回答：当自变量x的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数值 $y > 0$.

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $CD = BD$ ，DE平分 $\angle BDC$ 交BC于点O，交AB的延长线于点E，连接CE.

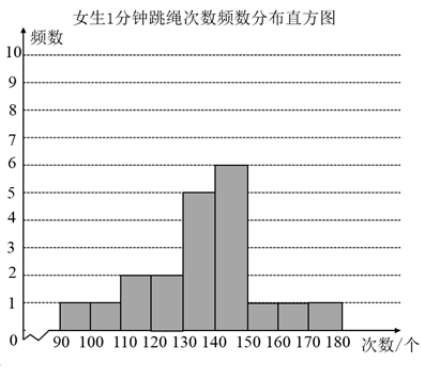
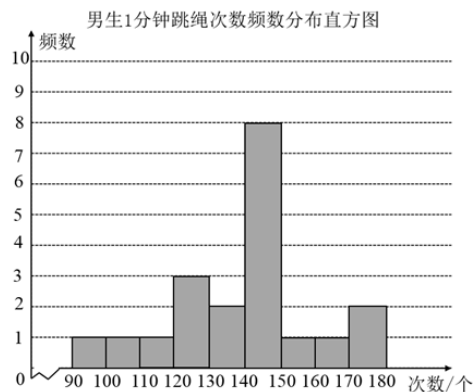


(1) 求证：四边形BECD是菱形；

(2) 如果 $AB = 5$ ， $AD = 6$ ，求四边形BECD的面积.

22. 2021年12月《北京市义务教育体育与健康考核评价方案》正式发布，跳绳成为新增的体育中考选考项目. 某校体育组为了解八年级学生跳绳的基本情况，从八年级男、女生中各随机抽取了20名学生1分钟跳绳次数，并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 学生1分钟跳绳次数频数分布直方图如下（数据分成9组： $90 \leq x < 100$ ， $100 \leq x < 110$ ，...， $170 \leq x < 180$ ）：



b. 男生 1 分钟跳绳次数在 $140 \leq x < 150$ 这一组的是：140, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147

c. 1 分钟跳绳次数的平均数、中位数、优秀率如下表：

组别	平均数	中位数	优秀率
男生	139	m	65%
女生	135	138	n

注：《国家中学生体质健康标准》规定：八年级男生 1 分钟跳绳次数大于或等于 135 个，成绩为优秀；八年级女生 1 分钟跳绳次数大于或等于 130 个，成绩为优秀。

根据以上信息，回答下列问题：

- 将女生 1 分钟跳绳次数频数分布直方图补充完整；
- 写出表中 m, n 的值；
- 此次测试中，某学生的 1 分钟跳绳次数为 140 个，这名学生的成绩排名超过同组一半的学生，判断该生属于 _____（填“男生”或“女生”）组；
- 如果全年级男生人数为 100 人，女生人数为 120 人，请估计该年级跳绳成绩优秀的总人数。

23. 在“一次函数”的课题学习中，某小组从购物节期间甲、乙两家商场的促销信息中发现并提出问题，请将他们分析、解决问题的过程补充完整。

甲商场：所有商品打 8 折；
乙商场：一次性购物不超过 300 元不打折，超过 300 元时，超出的部分打 6 折。

问题：在购买原价相同的同种商品时，应该如何选择这两家商场购物更省钱？

分析问题：

(1) 设原价为 x 元，则甲、乙两家商场的购物金额分别 $y_{甲}$ 元、 $y_{乙}$ 元，得到相应的函数解析式：

$$y_{甲} = 0.8x, (x \geq 0),$$

$$y_{乙} = \begin{cases} x, & (0 \leq x \leq 300) \\ \text{_____}, & (x > 300) \end{cases};$$

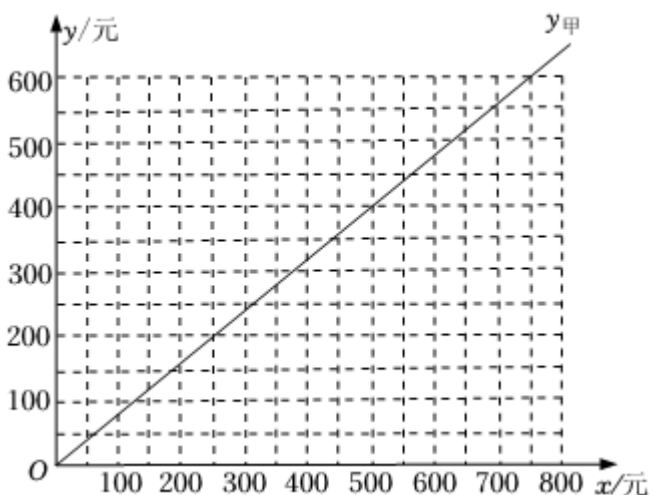
(2) 按照下表中自变量 x 的值代入解析式计算，分别得到了 $y_{甲}, y_{乙}$ 的几组对应值；

$x/\text{元}$	0	300	600	...
$y_{甲}/\text{元}$	0	a	480	...



$y_z/\text{元}$	0	300	b	...
----------------	---	-----	-----	-----

(3) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 描出补全后的表中各组数值所对应的点, 并画出函数 $y_{\text{甲}}$, $y_{\text{乙}}$ 的图象:



北京中考在线
微信号: BJ_zkao

解决问题:

根据以上分析, 在购买原价相同同种商品时, 选择购物更省钱的方案是_____.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 图象由正比例函数 $y = x$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到.

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 当 $x > -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 正比例函数 $y = ax (a \neq 0)$ 的值小于一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值, 直接写出 a 的取值范围.

25. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是直线 AC 上任意一点 (不与点 A, C 重合), 过点 E 作 $EF \perp BE$ 交直线 CD 于点 F , 过点 F 作 $FG \perp AC$ 交直线 AC 于点 G .

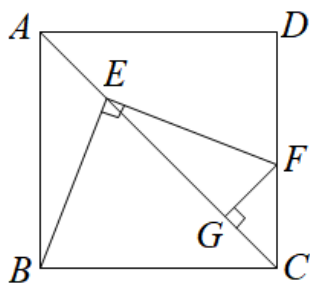


图1

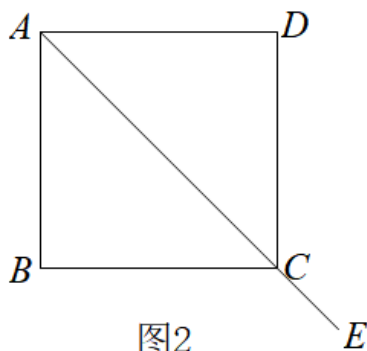


图2

北京中考在线
微信号: BJ_zkao

(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 猜想 EG 与 AB 数量关系;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 AC 的延长线上时, 补全图形, 并判断 (1) 中 EG 与 AB 的数量关系是否仍然成立. 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请说明理由.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 P 与图形 W 给出如下定义: 如果存在以点 P 为端点的一条射线与图形 W 有且只有 2 个公共点, 那么称点 P 是图形 W 的“相关点”. 已知点 $A(m, 2)$, $B(m-2, 0)$, $C(m+2, 0)$.

(1) 当 $m = 0$ 时,

①在点 $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(4, 0)$, $P_4(3, -1)$ 中, 是折线 $BA-AC$ 的“相关点”的是_____;

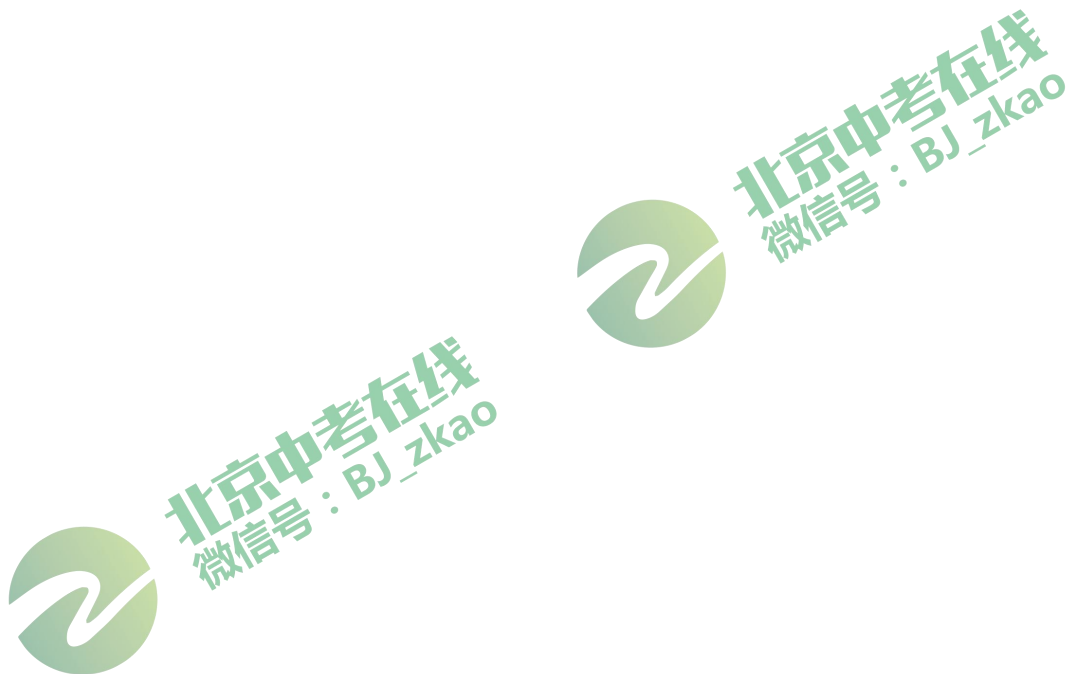


②点 M 是直线 $y = 2x + 4$ 上一点，如果点 M 是折线 $BA - AC$ 的“相关点”，求点 M 的横坐标 x_M 的取值范围；

(2) 正方形 $DEFG$ 的各边都平行于坐标轴，对角线的交点 N 的坐标是 $(2m - 4, 0)$ 。如果正方形的边长是 2，正方形 $DEFG$ 上的任意一点都是折线 $BA - AC$ 的“相关点”，请直接写出 m 的取值范围。



北京中考在线
微信号：BJ_zkao



北京中考在线
微信号：BJ_zkao





参考答案

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 函数 $y = \frac{1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 3$
- B. $x \geq 3$
- C. $x \neq 3$
- D. $x < 3$

【答案】C

【分析】根据分式有意义的条件，列不等式求解。

【详解】解：根据分式有意义的条件，得 $x-3 \neq 0$ ，

解得 $x \neq 3$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围. 解题的关键是掌握知识点为：分式有意义，分母不为 0.

2. 一家鞋店在某种运动鞋进货的过程中，商家关注的是卖出的这种运动鞋尺码组成的一组数据的 ()

- A. 平均数
- B. 中位数
- C. 众数
- D. 方差

【答案】C

【分析】商家关注 是哪种尺码销量最多，利用众数定义即可判断.

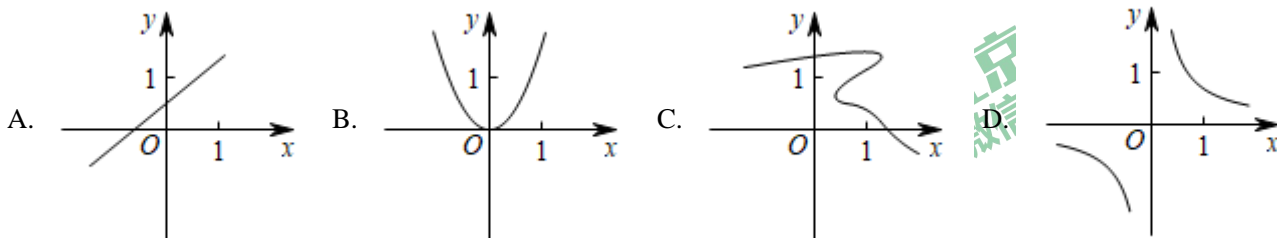
【详解】解：商家关注的是卖出的这种运动鞋中哪种尺码销量最多，

因此关注的是卖出的这种运动鞋尺码组成的一组数据的众数.

故选 C.

【点睛】本题考查众数的应用，掌握众数的定义是解题的关键.

3. 下列各曲线中，不能表示 y 是 x 的函数的是 ()



【答案】C

【分析】根据函数是一一对应的关系，给自变量一个值，有且只有一个函数值与其对应，就是函数，如果不是，则不是函数. 由此逐项判断即可.

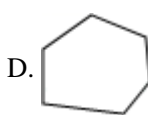
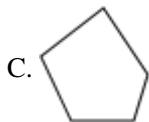
【详解】解：A、B、D 选项中，对于一定范围内自变量 x 的任何值， y 都有唯一的值与之相对应，所以 y 是 x 的函数；

C 选项中，对于一定范围内 x 取值时， y 可能有 2 个值与之相对应，所以 y 不是 x 的函数；

故选：C.

【点睛】本题考查了函数的定义. 解题的关键是注意：函数中，对于 x 的每一个值， y 都有唯一的值与其对应.

4. 下面的多边形中，内角和与外角和相等的是 ()



【答案】B

【分析】根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 与多边形的外角和定理列式进行计算即可得解.

【详解】解：设多边形的边数为 n ，根据题意得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

解得 $n=4$.

故选 B.

【点睛】此题考查多边形内角（和）与外角（和），解题关键掌握运算公式.

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别是 a ， b ， c ，下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是（ ）

A. $\angle A + \angle B = 90^\circ$

B. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$

C. $a = 2$ ， $b = 2$ ， $c = 3$

D. $a = 1$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{5}$

【答案】C

【分析】能够满足一个角为 90 度或两边的平方和等于另外一个边的平方即可证明是直角三角形，由此逐项分析即可.

【详解】解：选项 A：由 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 可得 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 90^\circ$ ，能够判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意；

选项 B：由 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ 可得 $\angle C = 180^\circ \times \frac{3}{1+2+3} = 90^\circ$ ，能够判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意；

选项 C： $a^2 + b^2 = 8$ ， $c^2 = 9$ ， $a^2 + b^2 \neq c^2$ ，不能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，符合题意；

选项 D： $a^2 + b^2 = 5$ ， $c^2 = 5$ ， $a^2 + b^2 = c^2$ ，能够判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查直角三角形的判定，掌握直角三角形的一个角为 90 度以及勾股定理的逆定理是解题的关键.

6. 下列运算正确的是（ ）

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$

C. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

D. $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{2}$

【答案】D

【分析】根据二次根式的运算法则逐项进行判断.

【详解】解：A、 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并，所以选项错误；

B、 $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，所以选项错误；

C、 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ，所以选项错误；

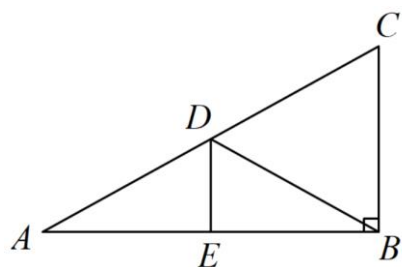


D、 $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ ，所以选项正确；

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式的运算，属于基础题，掌握二次根式的性质及运算法则是解题的关键.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 2$ ，点 D 是边 AC 的中点，点 E 是边 AB 的中点，则 $\triangle BDE$ 的周长是 ()



- A. 6 B. $3 + \sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】先根据含 30° 直角三角形的性质求出 $AC=4$ ，进而求出 AD ，再根据勾股定理求出 AB ，可得 BE ，然后说明 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，可求 DE ，即可得出 DE 是 AB 的垂直平分线，得出 BD ，即可得出答案.

【详解】在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore AC = 2BC = 4,$$

$$\text{则 } AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

$$\text{即 } AB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

\because 点 D, E 是 AC, AB 的中点，

$$\therefore AD = 2, \quad BE = \sqrt{3}, \quad DE \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 1, \quad DE \parallel BC,$$

$$\therefore DE \perp AB,$$

$\therefore DE$ 是 AB 的垂直平分线，

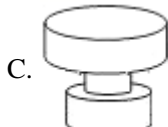
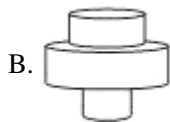
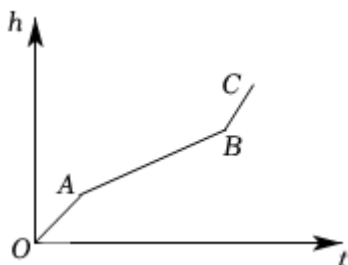
$$\therefore BD = AD = 2,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 的周长} = BD + DE + BE = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}.$$

故选：B.

【点睛】这是一道关于三角形的综合题目，考查了中点的定义，直角三角形的性质，三角形中位线的定义和性质，线段垂直平分线的定义和性质等.

8. 匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示 (图中 $OA - AB - BC$ 是一条折线). 这个容器的形状可能是下面图中的 ()



【答案】D

【分析】根据每一段函数图象的倾斜程度，反映了水面上升速度的快慢，再观察容器的粗细，作出判断.

【详解】解：注水量一定，函数图象的走势是稍陡，平，陡；那么速度就相应的变化，跟所给容器的粗细有关. 则相应的排列顺序就为 D.

故选：D.

【点睛】此题考查函数图象的应用，需注意容器粗细和水面高度变化的关联.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

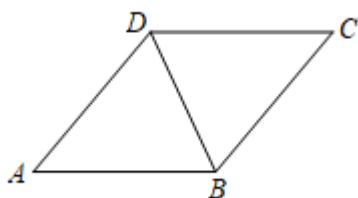
9. 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{5} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{10}$

【详解】根据 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 化简 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$.

故答案： $\sqrt{10}$.

10. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle ABD = 65^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数是_____.



【答案】 50°

【分析】在 $\triangle ABD$ 中，求出 $\angle A$ 的度数，再根据平行四边形对角相等得出答案.

【详解】在 $\triangle ABD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle ABD = 65^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 2 \times 65^\circ = 50^\circ.$$

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle C = \angle A = 50^\circ.$$

故答案为： 50° .

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质，平行四边形的性质等，等腰三角形的顶角度数等于 $180^\circ - 2 \times$ 底角度数.



11. 如果一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象经过 $(0, -1)$ ，且 y 随 x 的增大而增大，那么这个一次函数的解析式可以是_____（写出一个即可）。

【答案】 $y=x-1$ （答案不唯一）

【分析】根据一次函数的性质， $k>0$ 时， y 随 x 的增大而增大，不妨令 $k=1$ ，把经过的点 $(0, -1)$ 代入求出 b 的值即可。

【详解】解：∵一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 中， y 随 x 的增大而增大，

∴ $k>0$ ，

不妨设 $k=1$ ，

则 $y=x+b$ ，

把 $(0, -1)$ 代入得， $b=-1$ ，

∴ $y=x-1$ 。

故答案为： $y=x-1$ （答案不唯一）。

【点睛】本题考查了一次函数的性质，开放型题目，所写函数解析式必须满足 $k>0$ 。

12. 每年的4月23日是“世界读书日”，某校为了解4月份八年级学生的读书情况，随机调查了八年级50名学生读书的册数，数据整理如下：

册数	0	1	2	3	4
人数	9	3	20	15	3

由此估计该校八年级学生4月份人均读书_____册。

【答案】2

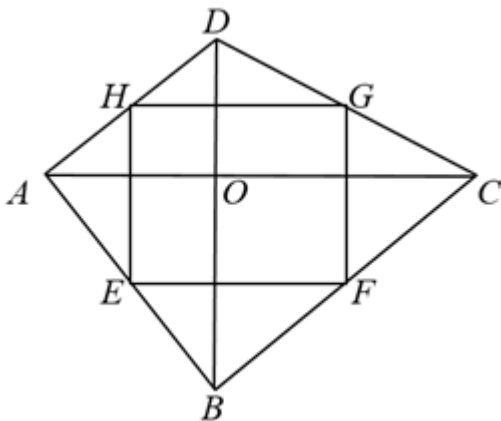
【分析】先根据表格中的数据得出50名学生读书的总册数，然后除以50即可求出平均数。

【详解】解：估计该校八年级学生4月份人均读书 $(0 \times 9 + 1 \times 3 + 2 \times 20 + 3 \times 15 + 4 \times 3) \div 50 = 2$ （册），
由此估计该校八年级学生4月份人均读书2册。

故答案为：2。

【点睛】本题考查的是加权平均数的计算方法，通过样本去估计总体，总体平均数与样本平均数近似相等。

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ， E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，只需添加一个条件，即可证明四边形 $EFCH$ 是矩形，这个条件可以是_____（写出一个即可）。





【答案】 $\angle EFG = 90^\circ$ (答案不唯一)

【分析】根据三角形中位线定理可以证明四边形 $EFCH$ 是平行四边形，再根据矩形的判定定理：有一个角等于 90° 的平行四边形为矩形，添加条件即可。

【详解】解： $\because E, F, G, H$ 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，

$$\therefore HG \parallel AC, EF \parallel AC, \text{ 且 } HG = \frac{1}{2}AC, EF = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore HG = EF, \text{ 且 } HG \parallel EF,$$

\therefore 四边形 $EFCH$ 是平行四边形，

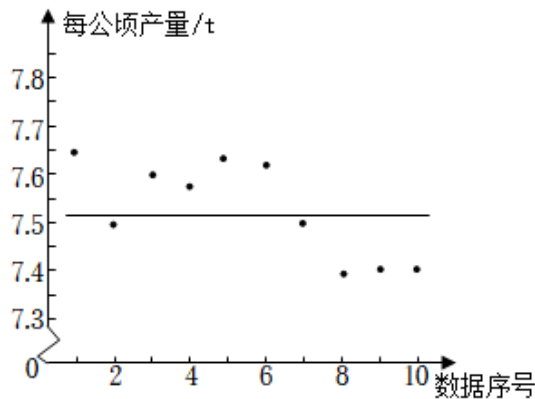
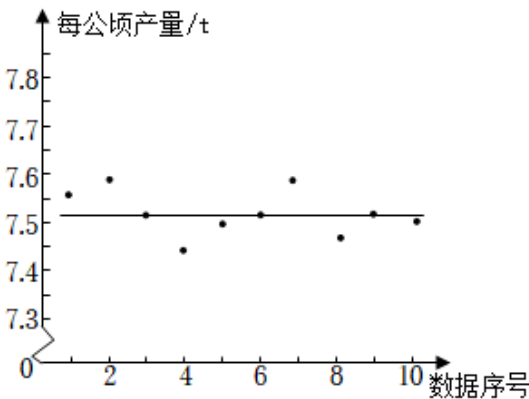
当 $\angle EFG = 90^\circ$ 时，则四边形 $EFCH$ 是矩形。

【点睛】本题考查三角形中位线定理，矩形的判定定理，平行四边形的判定定理，解题的关键是掌握三角形中位线定理，矩形的判定定理。

14. 农科院为某地选择甲、乙两种甜玉米种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农院所关心的问题，他们各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，下图是试验后得到的各试验田两种种子每公顷的产量（单位：t）。已知甲、乙两种甜玉米种子的平均产量相差不大，那么由样本估计总体，推测这个地区比较适合种植_____（填“甲”或“乙”）种甜玉米，理由是_____。

甲种甜玉米的产量

乙种甜玉米的产量



【答案】 ①. 甲 ②. 甲的产量比较稳定

【分析】据从图中数据的波动情况分析。

【详解】解：从图中看到，甲的波动比乙的波动小，故甲的产量比较稳定，所以这个地区比较适合种植甲种甜玉米，理由是甲的产量比较稳定。

故答案为：甲；甲的产量比较稳定。

【点睛】本题考查方差的意义。方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定。

15. 如图 1，四个全等的直角三角形围成一个大正方形，中间是一个小正方形，这个图形是我国汉代赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。连接四条线段得到如图 2 的新的图案。如果图 1 中的直角三角形的长直角边为 5，短直角边为 3，图 2 中阴影部分的面积为 S ，那么 S 的值为_____。

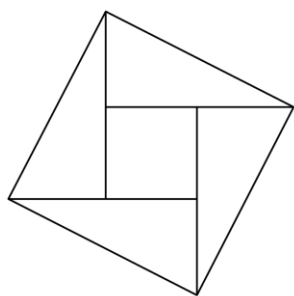


图1

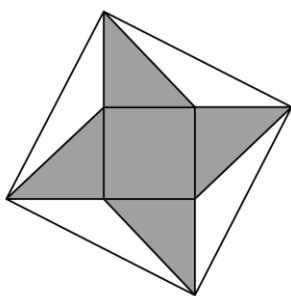
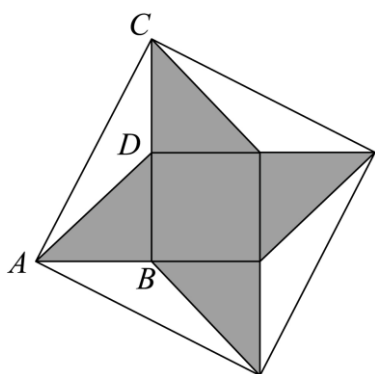


图2

【答案】16

【分析】利用勾股定理，求出空白部分面积，通过间接作差得出阴影部分面积。

【详解】解：由题意作出如下图，



得 $AC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ ， $BD = 5 - 3 = 2$ ， $AB = CD$ ， $\triangle ABD$ 是直角三角形，

则大正方形面积 $= AC^2 = 34$ ，

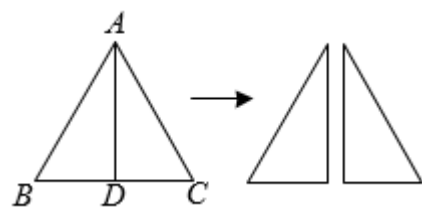
$$\triangle ADC \text{ 面积} = \frac{1}{2} (5 \times 3 - 2 \times 3) = \frac{9}{2}$$

$$\text{阴影部分的面积 } S = 34 - 4 \times \frac{9}{2} = 16$$

故答案为：16.

【点睛】本题主要考查了勾股定理中赵爽弦图模型，关键在于正确找出勾股关系，利用转换面积作差求解。

16. 在等边 $\triangle ABC$ 中， AD 为边 BC 的中线，将此三角形沿 AD 剪开成两个三角形，然后把这两个三角形拼成一个平行四边形，如果 $AB = 2$ ，那么在所有能拼成的平行四边形中，对角线长度的最大值是_____.



【答案】 $\sqrt{13}$

【分析】分三种情况作出图形，分别利用勾股定理计算出对角线的长度即可。

【详解】解：∵在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ， AD 为边 BC 的中线，

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = 1$$



$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

如图，有三种情况.

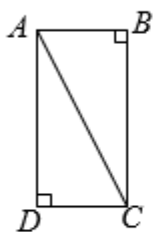


图1

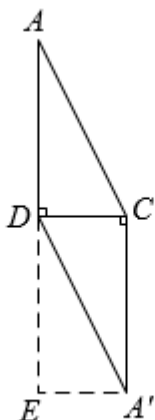


图2

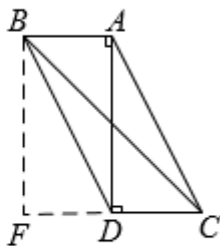


图3

在图1中，对角线 $AC=2$;

在图2中，过点 A' 作 $A'E \perp AD$ 交 AD 的延长线于 E ,

在 $Rt\triangle AEA'$ 中， $AE=AD+DE=AD+A'C=2\sqrt{3}$ ， $A'E=CD=1$,

$$\therefore AA' = \sqrt{AE^2 + A'E^2} = \sqrt{12+1} = \sqrt{13};$$

在图3中，过点 B 作 $BF \perp CD$ 交 CD 的延长线于 F ,

在 $Rt\triangle BFC$ 中， $BF=AD=\sqrt{3}$ ， $CF=DF+CD=2CD=2$,

$$\therefore BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7},$$

$$\because \sqrt{13} > \sqrt{7} > 2,$$

\therefore 对角线长度的最大值是 $\sqrt{13}$,

故答案为: $\sqrt{13}$.

【点睛】 本题考查图形的拼接，平行四边形的性质和勾股定理等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

三、解答题 (本题共 60 分，第 17, 18, 20 题，每小题 5 分，第 19, 21-23 题，每小题 6 分，第 24-26 题，每小题 7 分)

17. 计算: $\sqrt{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{(-3)^2 + |-1|}$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】 根据二次根式的性质，负整数指数幂的性质和绝对值的性质化简，然后计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{3} + 2 - 3 + 1 = 2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，熟练掌握运算法则和二次根式的性质是解题的关键.

18. 已知 $x = \sqrt{5} + 1$ ，求代数式 $x^2 - 2x + 1$ 的值.

【答案】 5

【分析】 将所求的代数式利用完全平方公式进行因式分解，然后代入求值.



【详解】解： $x = \sqrt{5} + 1$ ，

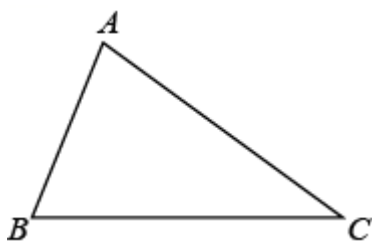
$$\therefore x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (\sqrt{5} + 1 - 1)^2 = 5.$$

即 $x^2 - 2x + 1 = 5$.

【点睛】本题主要考查了因式分解和二次根式的化简求值，二次根式的化简求值一定要先化简再代入求值.

19. 已知： $\triangle ABC$.

求作：直线 AD ，使得 $AD \parallel BC$.



作法：如图，

①分别以点 A 、点 C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径画弧，两弧相交于点 M 、点 N ；

②作直线 MN 交 AC 于点 E ；

③以点 E 为圆心， BE 长为半径画弧，交射线 BE 于点 D ；

④作直线 AD .

所以直线 AD 就是所求作的直线.

(1) 使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

(2) 完成下面的证明.

证明：连接 CD ，

$$\because AE = \underline{\hspace{2cm}}, BE = \underline{\hspace{2cm}},$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，（ ）（填推理的依据）.

$\therefore AD \parallel BC$ （ ）（填推理的依据）.

【答案】(1) 作图见解析

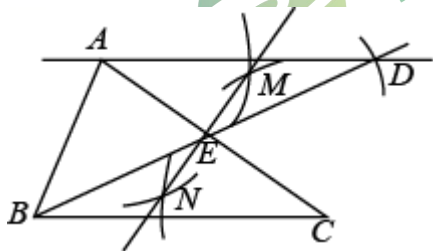
(2) EC, ED ，对角线互相平分的四边形是平行四边形，平行四边形的对边平行.

【分析】(1) 根据要求作出图形即可；

(2) 根据对角线互相平分的四边形是平行四边形证明，可得结论.

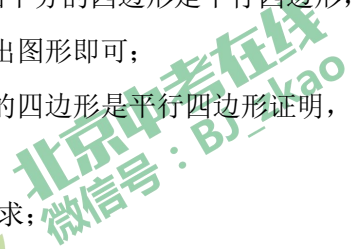
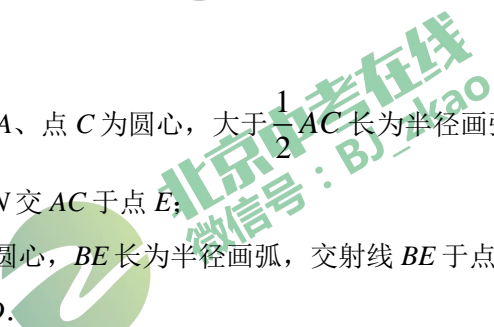
【小问 1 详解】

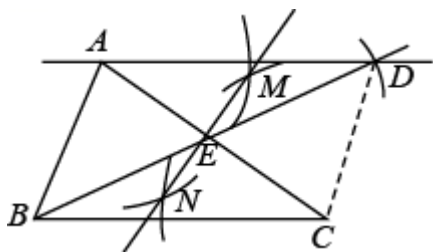
解：如图，直线 AD 即为所求；



【小问 2 详解】

证明：连接 CD .





$\because AE=EC, BE=ED.$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形),

$\therefore AD \parallel BC$ (平行四边形的对边平行),

故答案为: EC, ED , 对角线互相平分的四边形是平行四边形, 平行四边形的对边平行.

【点睛】 本题考查作图-基本作图, 平行四边形的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握五种基本作图, 属于中考常考题型.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点 $A(-3, 4)$.

(1) 求 k 的值;

(2) 画出一函数 图象;

(3) 根据图象回答: 当自变量 x 的取值范围是_____时, 函数值 $y > 0$.

【答案】 (1) $k = -\frac{2}{3}$;

(2) 见解析; (3) $x < 3$.

【分析】 (1) 将 $A(-3, 4)$ 代入一次函数中即可求出 k 的值;

(2) 找出一函数与 x 轴和 y 轴的交点, 即可画出一函数图象;

(3) 结合函数图象可知: 当 $x < 3$ 时, 函数值 $y > 0$.

【小问 1 详解】

解: \because 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点 $A(-3, 4)$,

$$\therefore 4 = -3k + 2$$

$$\text{解得: } k = -\frac{2}{3}.$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知: 一次函数解析式为: $y = -\frac{2}{3}x + 2$,

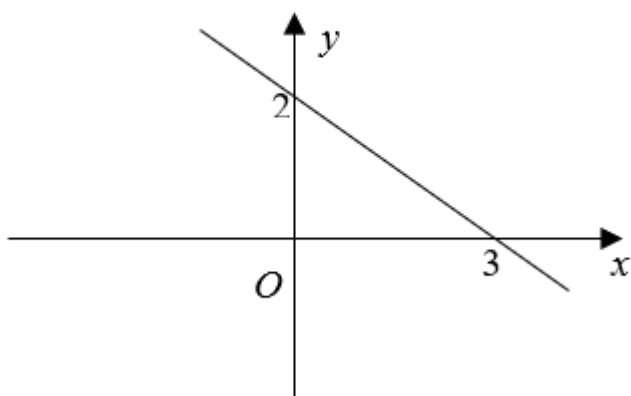
令 $x = 0$, 则 $y = 2$,

\therefore 一次函数于 y 轴交于点 $(0, 2)$,

令 $y = 0$, 则 $x = 3$,

\therefore 一次函数于 x 轴交于点 $(3, 0)$,

故函数图象如图:



北京中考在线
微信号：BJ_zkao

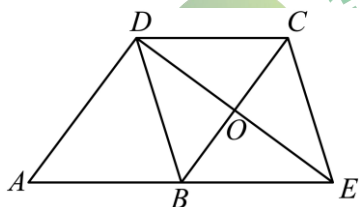
【小问 3 详解】

解：结合函数图象可知：

当 $x < 3$ 时，函数值 $y > 0$ 。

【点睛】本题考查一次函数综合，属于基础题，解题的关键是掌握利用待定系数法求一次函数函数解析式，一次函数的画法，根据直线与坐标轴的交点求不等式的解集。

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $CD = BD$ ， DE 平分 $\angle BDC$ 交 BC 于点 O ，交 AB 的延长线于点 E ，连接 CE 。



(1) 求证：四边形 $BECD$ 是菱形；

(2) 如果 $AB = 5$ ， $AD = 6$ ，求四边形 $BECD$ 的面积。

【答案】(1) 见解析 (2) 24

【分析】(1) 利用平行线和角平分线的性质证明 $\angle DEB = \angle BDE$ ，推出 $BE = BD$ ，结合已知条件证明 $CD \parallel BE$ ， $CD = BE$ ，得出四边形 $BECD$ 是平行四边形，结合 $CD = BD$ 即可证明四边形 $BECD$ 是菱形；

(2) 利用菱形的面积等于对角线乘积的一半求解；

【小问 1 详解】

证明： $\because \square ABCD$ 中， $CD \parallel AB$ ，

$\therefore CD \parallel BE$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle DEB$ 。

$\because DE$ 平分 $\angle BDC$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle BDE$ ，

$\therefore \angle DEB = \angle BDE$ ，

$\therefore BE = BD$ 。

$\because CD = BD$ ，

$\therefore CD = BE$ ，

\therefore 四边形 $BECD$ 是平行四边形。

又 $\because CD = BD$ ，

北京中考在线
微信号：BJ_zkao

北京中考在线
微信号：BJ_zkao



∴ 四边形 $BECD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: ∵ $\square ABCD$ 中, $AB = 5$, $AD = 6$,

∴ $DC = AB = 5$, $BC = AD = 6$,

由 (1) 知四边形 $BECD$ 是菱形,

∴ $BC \perp DE$, $OC = \frac{1}{2}BC = 3$,

在 $Rt\triangle DOC$ 中, 由勾股定理可得, $OD = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

∴ $DE = 2OD = 8$,

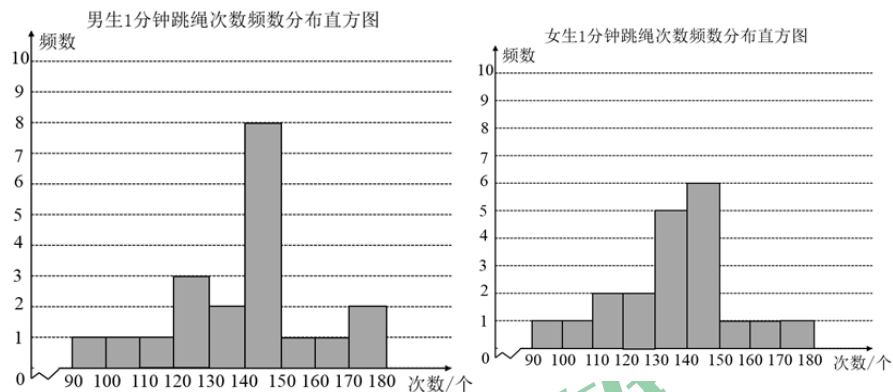
∴ $S_{\text{菱形}BECD} = \frac{1}{2}BC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$,

即四边形 $BECD$ 的面积为 24.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质、菱形的判定、菱形的面积公式、勾股定理等, 掌握菱形的判定方法及面积公式是解题的关键.

22. 2021 年 12 月《北京市义务教育体育与健康考核评价方案》正式发布, 跳绳成为新增的体育中考选考项目. 某校体育组为了解八年级学生跳绳的基本情况, 从八年级男、女生中各随机抽取了 20 名学生 1 分钟跳绳次数, 并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 学生 1 分钟跳绳次数频数分布直方图如下 (数据分成 9 组: $90 \leq x < 100$, $100 \leq x < 110$, ..., $170 \leq x < 180$):



b. 男生 1 分钟跳绳次数在 $140 \leq x < 150$ 这一组的是: 140, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147

c. 1 分钟跳绳次数的平均数、中位数、优秀率如下表:

组别	平均数	中位数	优秀率
男生	139	m	65%
女生	135	138	n

注:《国家中学生体质健康标准》规定: 八年级男生 1 分钟跳绳次数大于或等于 135 个, 成绩为优秀; 八年级女生 1 分钟跳绳次数大于或等于 130 个, 成绩为优秀.

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 将女生 1 分钟跳绳次数频数分布直方图补充完整;



(2) 写出表中 m , n 的值;

(3) 此次测试中, 某学生的 1 分钟跳绳次数为 140 个, 这名学生的成绩排名超过同组一半的学生, 判断该生属于 _____ (填“男生”或“女生”) 组;

(4) 如果全年级男生人数为 100 人, 女生人数为 120 人, 请估计该年级跳绳成绩优秀的总人数.

【答案】 (1) 见解析 (2) $m = 141.5$, $n = 70%$

(3) “女生” (4) 149 人

【分析】 (1) 利用抽取女生的总人数和女生跳绳次数频数分布直方图中的数据, 求出成绩在 $130 \leq x < 140$ 之间的人数即可;

(2) 利用中位数的定义求 m , 利用八年级女生 1 分钟跳绳次数大于或等于 130 个的人数除以女生总人数求 n ;

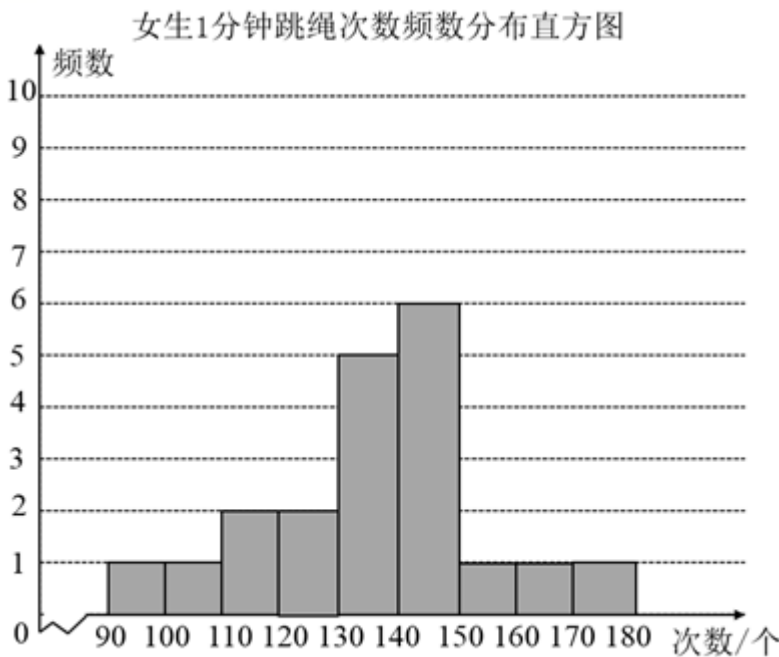
(3) 将这名学生的成绩与男生、女生成绩的中位数比较即可;

(4) 利用样本估计总体的方法解决.

【小问 1 详解】

解: 女生成绩在 $130 \leq x < 140$ 之间的人数为: $20 - 1 - 1 - 2 - 2 - 6 - 1 - 1 - 1 = 5$,

补全后的频数分布直方图如下图所示:



【小问 2 详解】

解: 由男生 1 分钟跳绳次数频数分布直方图和 $140 \leq x < 150$ 这一组的数据可知, 20 名男生中, 成绩从低到高排序, 第 10 位和第 11 位的成绩分别是 141, 142,

因此男生组的中位数: $m = \frac{141+142}{2} = 141.5$;

女生 1 分钟跳绳次数大于或等于 130 个的人数为: $5+6+1+1+1=14$,

因此女生组的优秀率: $n = \frac{14}{20} \times 100\% = 70\%$,

故 $m = 141.5$, $n = 70\%$;

【小问 3 详解】



解：这名学生的成绩 140 小于男生组的中位数 141.5，大于女生组的中位数 138，

因此该生属于“女生”，

故答案为：“女生”；

【小问 4 详解】

解：由已知和 (2) 的结论知男生组的优秀率为 65%，女生组的优秀率为 70%，

$$100 \times 65\% + 120 \times 70\% = 65 + 84 = 149 \text{ (人)},$$

因此估计该年级跳绳成绩优秀的总人数为 149 人。

【点睛】本题考查统计相关知识，掌握频数分布直方图、中位数的定义和应用，以及利用样本估计总体的方法是解题的关键。

23. 在“一次函数”的课题学习中，某小组从购物节期间甲、乙两家商场的促销信息中发现并提出问题，请将他们分析、解决问题的过程补充完整。

甲商场：所有商品打 8 折；
乙商场：一次性购物不超过 300 元不打折，超过 300 元时，超出的部分打 6 折。

问题：在购买原价相同的同种商品时，应该如何选择这两家商场购物更省钱？

分析问题：

(1) 设原价为 x 元，则甲、乙两家商场的购物金额分别 $y_{甲}$ 元、 $y_{乙}$ 元，得到相应的函数解析式：

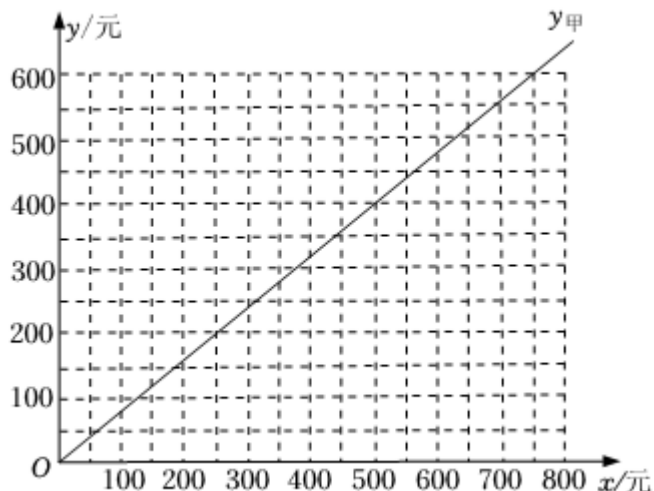
$$y_{甲} = 0.8x, (x \geq 0),$$

$$y_{乙} = \begin{cases} x, (0 \leq x \leq 300) \\ \text{_____}, (x > 300) \end{cases};$$

(2) 按照下表中自变量 x 的值代入解析式计算，分别得到了 $y_{甲}$ ， $y_{乙}$ 的几组对应值：

$x/\text{元}$	0	300	600	...
$y_{甲}/\text{元}$	0	a	480	...
$y_{乙}/\text{元}$	0	300	b	...

(3) 在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出补全后的表中各组数值所对应的点，并画出函数 $y_{甲}$ ， $y_{乙}$ 的图象：



解决问题：



根据以上分析，在购买原价相同的同种商品时，选择购物更省钱的方案是_____.

【答案】(1) $0.6x+120$; (2) 240, 480; (3) 见解析; 解决问题: 当 $x < 600$ 时, 选择甲; 当 $x = 600$ 时, 甲、乙一样; 当 $x > 600$ 时, 选择乙.

【分析】(1) 根据乙商场超过 300 元时, 超出的部分打 6 折列函数解析式即可;

(2) 根据 (1) 中解析式直接求值即可;

(3) 根据 (2) 中数据在坐标系中画出图象即可;

解决问题: 根据 (3) 中的数据和图象可以直接得出结论.

【详解】解: (1) 当 $x > 300$ 时,

由题意得: $y = 300 + 0.6(x - 300) = 0.6x + 120$,

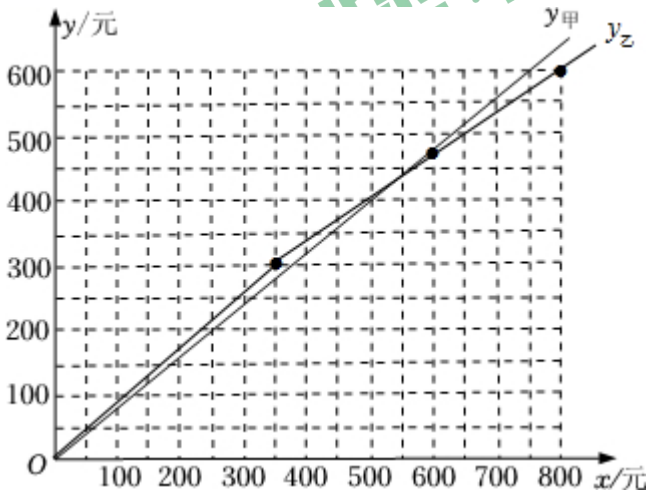
故答案为: $0.6x + 120$;

(2) 由 (1) 知, $a = 0.8 \times 300 = 240$,

$b = 0.6 \times 600 + 120 = 480$,

故答案 : 240, 480;

(3) 根据 (2) 中数据画图, 如图:



解决问题:

由 (3) 可知, 当购买原价小于 600 元商品时应选择甲商场购买;

当购买原价等于 600 元商品时, 甲、乙两家商场花费一样多;

当购买原价大于 600 元商品时应选择乙商场购买.

故答案为: 当 $x < 600$ 时, 选择甲; 当 $x = 600$ 时, 甲、乙一样; 当 $x > 600$ 时, 选择乙.

【点睛】本题考查一次函数的应用, 关键是根据相关信息列出函数解析式并能根据函数图象解决问题.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由正比例函数 $y = x$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到.

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 当 $x > -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 正比例函数 $y = ax (a \neq 0)$ 的值小于一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值, 直接写出 a 的取值范围.

【答案】(1) $y = x + 2$

(2) $a \leq -1$



【分析】(1) 根据平移的规律即可求得.

(2) 根据点 $(-1, 1)$ 结合一次函数的性质即可求得.

【小问 1 详解】

解: \because 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y=x$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到.

$\therefore k=1, b=2,$

\therefore 这个一次函数的解析式为 $y=x+2;$

【小问 2 详解】

把 $x=-1$ 代入 $y=x+2$, 得 $y=1,$

把点 $(-1, 1)$ 代入 $y=ax$, 得 $a=-1.$

\therefore 当 $x > -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 正比例函数 $y=ax$ ($a \neq 0$) 的值小于一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的值,

$\therefore a$ 的取值范围是 $a \leq -1.$

【点睛】本题考查了一次函数图象与几何变换, 一次函数与系数的关系, 熟知一次函数的性质是解题的关键.

25. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是直线 AC 上任意一点 (不与点 A, C 重合), 过点 E 作 $EF \perp BE$ 交直线 CD 于点 F , 过点 F 作 $FG \perp AC$ 交直线 AC 于点 G .

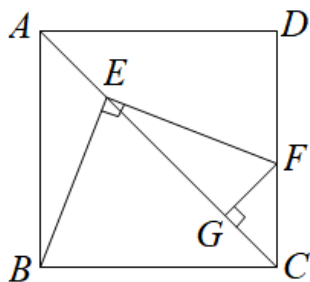


图1

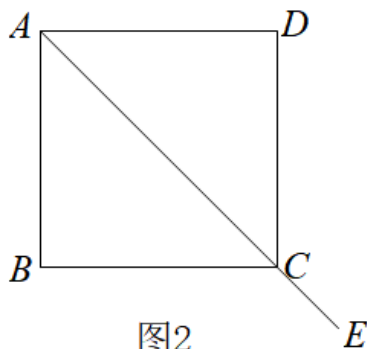


图2

(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 猜想 EG 与 AB 的数量关系;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 AC 延长线上时, 补全图形, 并判断 (1) 中 EG 与 AB 的数量关系是否仍然成立. 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请说明理由.

【答案】(1) $AB = \sqrt{2}EG$, 理由见解析

(2) 成立, 理由见解析

【分析】(1) 点 E 作 $EH \perp CD$ 于点 H , $EP \perp BC$ 于点 P , 证明 $\triangle BEP \cong \triangle FEH$ (ASA), 得到 $EB = EF$. 过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M , 证明 $\triangle EBM \cong \triangle FEG$ (AAS), 进而得出 $EG = MC$, 再利用等腰直角三角形的性质即可得出结论;

(2) 过点 E 作 $EH \perp CD$ 交 DC 延长线于点 H , $EP \perp BC$ 交 BC 延长线于点 P , 过点 B 作 $BO \perp AC$ 于点 O , 证明 $\triangle BEP \cong \triangle FEH$ (AAS), 再证 $\triangle BEO \cong \triangle FEG$ (AAS), 进而得出 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形, 即可证得结论.

【小问 1 详解】

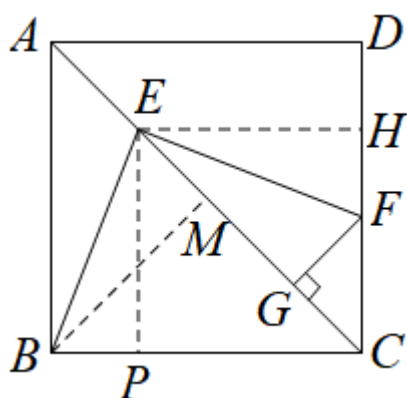
解: $AB = \sqrt{2}EG$, 理由如下:

\because 正方形 $ABCD$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \angle ACD = \angle ACB = 45^\circ,$



过点 E 作 $EH \perp CD$ 于点 H , $EP \perp BC$ 于点 P , 如下图所示,



则 $\angle EHC = \angle EPC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle EHC = \angle EPC = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $CHPE$ 是矩形,

$\because \angle ACD = 45^\circ$, $FG \perp AC$,

$\therefore \triangle EHC$ 与 $\triangle CGF$ 均为等腰直角三角形,

$\therefore EH = CH$, $GF = CG$,

\therefore 四边形 $CHPE$ 是正方形,

$\therefore EH = EP$.

$\because EF \perp BE$,

$\therefore \angle BEP + \angle PEF = 90^\circ$,

又 $\because \angle FEH + \angle PEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEP = \angle FEH$,

在 $\triangle BEP$ 与 $\triangle FEH$ 中,

$$\begin{cases} \angle BEP = \angle FEH \\ EP = EH \\ \angle BPE = \angle FHE \end{cases},$$

$\therefore \triangle BEP \cong \triangle FEH (ASA)$,

$\therefore EB = EF$.

过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ,

则 $\angle BME = 90^\circ$,

$\because \angle BEM + \angle EBM = \angle BEM + \angle FEG = 90^\circ$,

$\therefore \angle EBM = \angle FEG$,

$\triangle EBM$ 与 $\triangle FEG$ 中,

$$\begin{cases} \angle BME = \angle EGF \\ \angle EBM = \angle FEG \\ BE = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle EBM \cong \triangle FEG (AAS)$,





$$\therefore EM = FG .$$

$$\therefore CG = EM ,$$

$$\therefore CG + MG = EM + MG ,$$

$$\text{即 } EG = MC .$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ ,$$

$\therefore \triangle BMC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore MC = BM ,$$

$$\therefore BC^2 = MC^2 + BM^2 = 2MC^2 ,$$

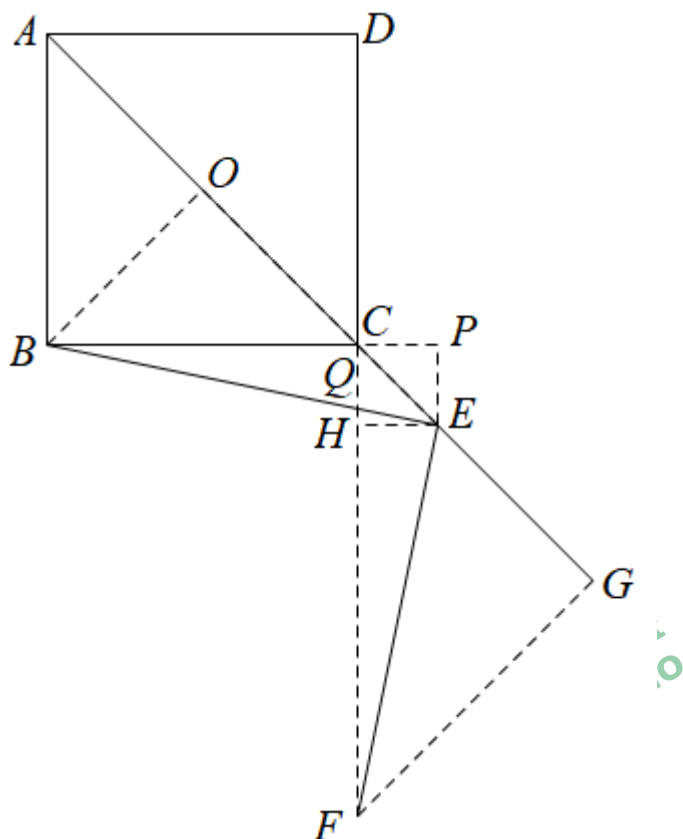
$$\therefore BC = \sqrt{2}MC ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}EG ;$$

【小问 2 详解】

解：成立，理由如下：

过点 E 作 $EH \perp CD$ 交 DC 延长线于点 H ， $EP \perp BC$ 交 BC 延长线于点 P ，过点 B 作 $BO \perp AC$ 于点 O ，如下图所示，



$$\text{则 } \angle P = \angle EHC = \angle HCP = 90^\circ ,$$

\therefore 四边形 $CHEP$ 是矩形,

$$\because \angle HCE = \angle ACD = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle HEC = 90^\circ - \angle HCE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle HEC = \angle HCE ,$$

$$\therefore HE = HC ,$$





∴ 四边形 $CHEP$ 是正方形,

∴ $EH = EP$.

设 CF 与 BE 交于点 Q ,

在 $\triangle BQC$ 与 $\triangle QEF$ 中,

∴ $\angle BQC = \angle EQF$, $\angle BCH = \angle QEF = 90^\circ$,

∴ $\angle PBE = \angle HFE$,

在 $\triangle BEP$ 与 $\triangle FEH$ 中,

$$\begin{cases} \angle PBE = \angle HFE \\ \angle P = \angle FHE \\ EP = EH \end{cases},$$

∴ $\triangle BEP \cong \triangle FEH$ (AAS),

∴ $EB = EF$.

∵ $BO \perp AC$, $FG \perp AC$,

∴ $\angle BOE = \angle G = 90^\circ$,

∵ $\angle BEO + \angle FEG = \angle EFG + \angle FEG = 90^\circ$,

∴ $\angle BEO = \angle EFG$,

在 $\triangle BEO$ 与 $\triangle EFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle G \\ \angle BEO = \angle EFG \\ BE = EF \end{cases}$$

∴ $\triangle BEO \cong \triangle EFG$ (AAS),

∴ $BO = EG$.

∵ $\angle ACB = 45^\circ$,

∴ $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形,

∴ $AB = BC = \sqrt{2}BO$,

∴ $AB = \sqrt{2}EG$.

【点睛】 本题考查正方形的性质与判定、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理等, 熟练掌握上述知识点, 通过作辅助线构造全等三角形, 将所求线段进行等量代换是解题的关键.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 P 与图形 W 给出如下定义: 如果存在以点 P 为端点的一条射线与图形 W 有且只有 2 个公共点, 那么称点 P 是图形 W 的“相关点”. 已知点 $A(m, 2)$, $B(m-2, 0)$, $C(m+2, 0)$.

(1) 当 $m = 0$ 时,

① 在点 $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(4, 0)$, $P_4(3, -1)$ 中, 是折线 $BA-AC$ 的“相关点”的是_____;

② 点 M 是直线 $y = 2x + 4$ 上一点, 如果点 M 是折线 $BA-AC$ 的“相关点”, 求点 M 的横坐标 x_M 的取值范围;



(2) 正方形 $DEFG$ 的各边都平行于坐标轴，对角线的交点 N 的坐标是 $(2m-4, 0)$ 。如果正方形的边长是 2，正方形 $DEFG$ 上的任意一点都是折线 $BA-AC$ 的“相关点”，请直接写出 m 的取值范围。

【答案】 (1) ① P_2, P_3 ; ② $-2 \leq x_M < -\frac{2}{3}$

(2) $m < 0$ 或 $m > 8$

【分析】 (1) ① 根据所给坐标画出图像，根据定义进行判断即可求解；

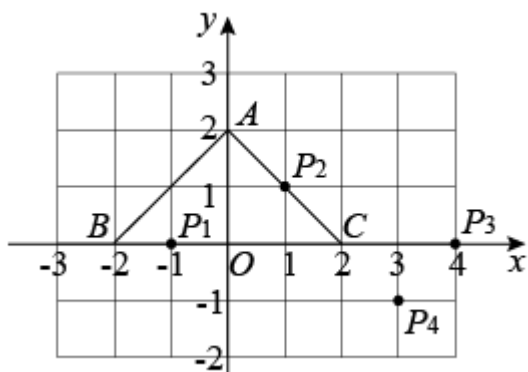
② 根据题意画出 $y = 2x + 4$ ，结合定义可知当 M 与点 B 重合时 x_M 取得最小值，与直线 AC 相交时， x_M 取得最大值，进而即可求解；

(2) 根据题意求得直线 AB 的解析式为 $y = x - m + 2$ ，直线 AC 的解析式为 $y = -x + m + 2$ ，正方形 $DEFG$ 上的任意一点都不在 $BA-AC$ 所围成的锐角之内以及边上（除线段 AB, AC 外），当正方形有一点在 AB 或 AC 上时，根据点 N 的坐标以及正方形的性质求得点 F 的坐标，分别代入直线 AB, AC 的解析式即可求得点 F 的坐标，结合函数图像即可求解。

【小问 1 详解】

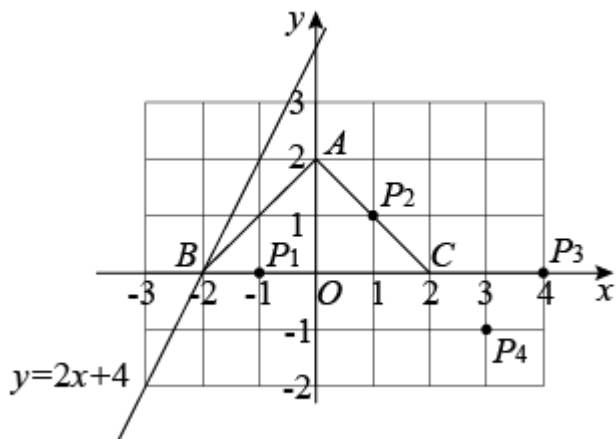
当 $m = 0$ 时， $A(0, 2), B(-2, 0), C(2, 0)$ ，

① 如图，在平面直角坐标系中描出点 $A(0, 2), B(-2, 0), C(2, 0), P_1(-1, 0), P_2(1, 1), P_3(4, 0), P_4(3, -1)$ 连接 AB, AC ，



由图像可知， P_2, P_3 为折线 $BA-AC$ 的“相关点”；

② 如图，





∵ 点 M 是直线 $y = 2x + 4$ 上一点,

根据定义可知: 点 M 为折线 $BA - AC$ 的“相关点”

当 M 与点 $B(-2, 0)$ 重合时, 此时 x_M 取得最小值, 为 -2 ,

当 M 在直线 AC 上时, x_M 取得最大值,

设直线 AC 解析式为 $y = kx + b$

∵ $A(0, 2), C(2, 0)$

$$\text{则} \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

∴ 直线 AC 解析式为 $y = -x + 2$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

即 x_M 的最大值为 $-\frac{2}{3}$

$$\therefore -2 \leq x_M < -\frac{2}{3}$$

【小问 2 详解】

∵ 点 $A(m, 2), B(m-2, 0), C(m+2, 0)$.

设直线 AB 的解析式为 $y = cx + d$, AC 解析式为 $y = ex + f$,

$$\text{则} \begin{cases} mc + d = 2 \\ (m-2)c + d = 0 \end{cases}, \begin{cases} me + f = 2 \\ (m+2)e + f = 0 \end{cases}$$

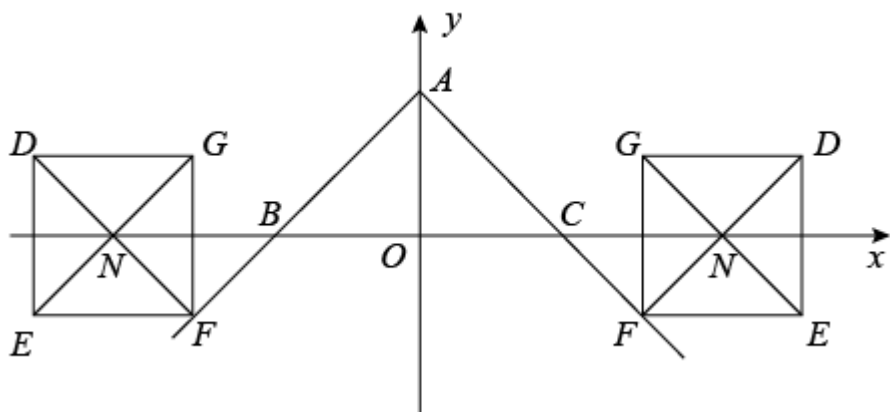
$$\text{解得} \begin{cases} c = 1 \\ d = -m + 2 \end{cases}, \begin{cases} e = -1 \\ f = m + 2 \end{cases}$$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y = x - m + 2$, 直线 AC 的解析式为 $y = -x + m + 2$,

当正方形 $DEFG$ 上的任意一点都是折线 $BA - AC$ 的“相关点”;

∴ 正方形 $DEFG$ 上的任意一点都不在 $BA - AC$ 所围成的锐角之内以及边上 (除线段 AB, AC 外),

当正方形有一点在 AB 或 AC 上时, 如图,



当点 F 在 AB 上时, $\because N(2m-4,0)$, 正方形的边长为 2,

则 $F(2m-3,-1)$,

代入直线 AB 解析式, 可得 $-1=(2m-3)-m+2$,

解得 $m=0$;

当点 F 在 AC 上时, $\because N(2m-4,0)$, 正方形的边长为 2,

则 $F(2m-5,-1)$,

代入直线 AC 解析式, 可得 $-1=-(2m-5)+m+2$,

解得 $m=8$,

结合图像可知, 当正方形 $DEFG$ 上的任意一点都是折线 $BA-AC$ 的“相关点”, $m < 0$ 或 $m > 8$.

【点睛】 本题考查了新定义问题, 待定系数法求一次函数解析式, 正方形的性质, 坐标与图形, 两直线交点问题, 理解新定义是解题的关键.