北京市育英学校2023-2024学年第一学期期中考试——高一数学（1-6

班级：________　姓名：__________　2023年11月

试卷满分：150分　　考试时间：120分钟

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x||x|<2,x\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{-2,0,1,2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{-1,0,1\}$

（C）$\{-2,0,1,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant 0$，则 $\neg p$ 为

（A）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$　　（B）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$

（C）$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2\geqslant 0$　　（D）$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2<0$

（3）下列各组函数为同一个函数的是

（A）$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　　（B）$f(x)=\dfrac{1}{x}-1$，$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

（C）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^3}$　　（D）$f(x)=(\sqrt{x})^4+1$，$g(x)=x^2+1$

（4）若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2(a+1)x+4=0$ 的解集为单元素集合，则

（A）$a=0$　　（B）$a=1$　　（C）$a=0$ 或 $a=1$　　（D）$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$

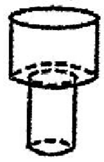
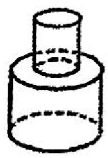
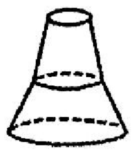
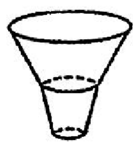
（5）若 a,b,c 为实数，且 $a<b<0$，则下列命题中正确的是

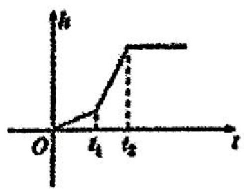
（A）$a^2>ab>b^2$　　（B）$ac^2<bc^2$

（C）$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（D）$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$

（6）向一杯子中匀速注水时，杯中水面高度 h 随时间 t 变化的函数 $h=f(t)$ 的图像如图所示，

则杯子的形状是(　　)

（A）（B）（C）（D）



（7）下列选项中，$p:\{x|a^2x^2>1\}$，$q:\left\{x\middle|x<-\dfrac{1}{a}\text{或}x>\dfrac{1}{a}\right\}$，则 p 是 q 的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1,\\x+by=1\end{cases}$（~~其中 $a>0$，$b>0$）无解~~，则必有

（A）$a+b>2$　　（B）$a-b>2$　　（C）$a-b<2$　　（D）$a+b<2$

（9）函数 $f(x)=\left[\dfrac{x+1}{3}\right]-\left[\dfrac{x}{3}\right]$（$x\in \mathbf{N}$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.）的值域为

（A）$\{0\}$　　（B）$\{1\}$　　（C）$[0,1]$　　（D）$\{0,1\}$

（10）已知函数 $f(x)=\left|x^2-2x-a\right|+a$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值是 3，那么实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$(-\infty,1]$　　（C）$[0,+\infty)$　　（D）$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=x^2$，则 $f(1)=$________

（12）函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 的定义域为________.

（13）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数．若 $f(2m-1)>f(m)$，则实数 m 的取值范围是________.

（14）能够说明"若 a，b，c 是任意正实数，则 $\dfrac{a+c}{b+c}>\dfrac{a}{b}$"是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为________.

（15）用 $C(A)$ 表示非空集合 A 中元素的个数，定义 $A*B=\begin{cases}C(A)-C(B),C(A)\ge C(B)\\C(B)-C(A),C(A)<C(B)\end{cases}$，

已知集合 $A=\{x\mid x^2+x=0\}$，$B=\{x\in R\mid (x^2+ax)(x^2+ax+1)=0\}$，

①$\exists a\in R, C(B)=3$；

②$\forall a\in R, C(B)\ge 2$；

③"$a=0$"是"$A*B=1$"的必要不充分条件；

④若 $S=\{a\in R\mid A*B=1\}$，则 $C(S)=3$

其中所有正确结论的序号是________

二、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x\geqslant 5或x\leq 1\}$，$B=\{x\mid a<x<a+6\}$.

（Ⅰ）当$a=2$ 时，求$\complement_U A$，$A\cap B$；

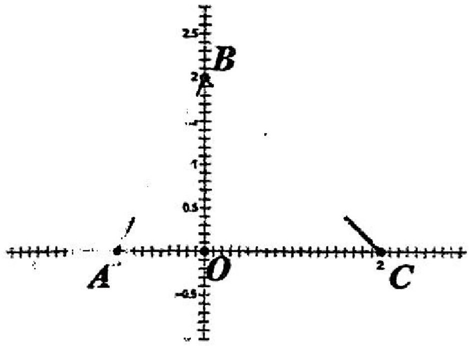
（Ⅱ）若命题“$\forall x\in \complement_U A, x\in B$”是真命题，求 a 的取值范围.

（17）（本小题 14 分）

如图所示，函数$f(x)$的定义域为$[-1,2]$，$f(x)$的图象为折线AB,BC，其中$A(-1,0)$, $B(0,2)$,$C(2,0)$.

(I) 求$f(x)$的解析式；

(II) 解不等式$f(x)\geq x^2$



（18）（本小题 14 分）

关于x的不等式$-x^2-px+q>0$的解集为$\{x|-1<x<3\}$

（Ⅰ）求实数p,q值；

（Ⅱ）若实数$a,b\in R^+$，满足$2a+b=p+2q$，求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$的最小值.

（19）（本小题 14 分）

已知$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

（Ⅰ）判断函数$f(x)$的奇偶性，并说明理由；

（Ⅱ）求证：函数$f(x)$在区间$(1+\sqrt{2},+\infty)$上单调递增.

（20）（本小题 15 分）

十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作.该地区有 200 户农民，且都从事水果种植，据了解，平均每户的年收入为 3 万元.为了调整产业结构，调查组和当地政府决定动员部分农民从事水果加工，据估计，若能动员 $x\left(x\geq 0\right)$ 户农民从事水果加工，则剩下的继续从事水果种植的农民平均每户的年收入有望提高 $4x\%$ 万元，而从事水果加工的农民平均每户收入将为 $3\left(a-\dfrac{3x}{50}\right)\left(a>0\right)$ 万元.

（Ⅰ）若动员 x 户农民从事水果加工后，要使从事水果种植的农民的总年收入不低于动员前从事水果种植的农民的总年收入，求 x 的取值范围；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，设：$f(x)$ 表示这 200 户农民动员后总收入与动员前总收入之差，求 $f(x)$ 最大值.

（21）（本小题 14 分）

设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，其中 a_1，a_2，a_3，a_4 是正整数，记 $S_A=a_1+a_2+a_3+a_4$．对于 a_i，$a_j\in A$ $(1\leq i<j\leq 4)$，若存在整数 k，满足 $k(a_i+a_j)=S_A$，则称 a_i+a_j 整除 S_A，设 n_A 是满足 a_i+a_j 整除 S_A 的数对 $(i,j)\,(i<j)$ 的个数.

（Ⅰ）若 $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,5,7,11\}$，写出 n_A，n_B 的值；

（Ⅱ）求 n_A 的最大值；

（Ⅲ）设 A 中最小的元素为 a，求使得 n_A 取到最大值时的所有集合 A．

北京市育英学校高一第一学期数学期中练习答案 2023.10

一、单选题（共10小题，每小题4分，共40分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	C	C	A	B	A	A	D	B

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

11. 4

12. $(-\infty, 1]\cup(2, +\infty)$

13. $(\frac{1}{3},1)$

14. 2，1，1（答案不唯一，$a>b,c>0$即可）

15. ①④

三、解答题(6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明程)

16. （本小题14分）

解：（Ⅰ）当$a=2$ 时，$B=\{x|2<x<8\}$ 【2分】

$$\complement_U A=\{x|1<x<5\}$$ 【4分】

$$A\cap B=[5,8)$$ 【6分】

（Ⅱ）$\because$“$\forall x\in\complement_U A,x\in B$”是真命题

$\therefore \complement_U A\subseteq B$， 【8分】

$\therefore \begin{cases}a\leqslant 1,\\ a+6\geqslant 5,\end{cases}$ 【10分】

解得$\begin{cases}a\leqslant 1,\\ a\geqslant -1.\end{cases}$ 【12分】

所以$a\in[-1,1]$. 【14分】

17. （本小题 14 分）

解：（I）因为 $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$

所以 $f(x)=\begin{cases}2x+2,-1\le x<0\\-x+2,0\le x\le 2\end{cases}$ 【4 分】

（II）原不等式即为

$\begin{cases}-1\le x<0\\2x+2\ge x^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\le x\le 2\\-x+2\ge x^2\end{cases}$ 【8 分】

解得：$1-\sqrt{3}\le x<0$ 或 $0\le x\le 1$ 【12 分】

所以原不等式的解集为 $[1-\sqrt{3}，1]$ 【14 分】

18. （本小题 14 分）

（Ⅰ）$\because -x^2-px+q>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<3\}$，

$\therefore -1$ 和 3 是方程 $-x^2-px+q=0$ 的两个根， 【2 分】

$\begin{cases}-1+3=-p,\\-1\times 3=-q,\end{cases}$ 【4 分】

解得：$p=-2,q=3$．经检验，$p=-2,q=3$ 满足条件。

所以 $p=-2,q=3$。 【6 分】

（Ⅱ）$2a+b=p+2q=4$ 【7 分】

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}$ 【9 分】

$\because a>0,b>0$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=4$（当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$ 即 $b=2a$ 时，等号成立） 【11 分】

$\therefore (2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 8$

$\therefore$ 当且仅当 $a=1$，$b=2$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 2. 【14 分】

19. （本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由 $x-1\neq 0$，可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$． 【2 分】

因为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 不关于原点对称， 【4 分】

所以函数 $f(x)$ 不具有奇偶性，即 $f(x)$ 是非奇非偶函数． 【6 分】

（Ⅱ）证明：$\forall x_1,x_2\in(1+\sqrt{2},+\infty)$，$x_1<x_2$， 【8 分】

由 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$，

可得 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+1+\dfrac{2}{x_1-1})-(x_2+1+\dfrac{2}{x_2-1})=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)$

【10 分】

因为 $1+\sqrt{2}<x_1<x_2$，所以 $x_2-1>x_1-1>\sqrt{2}$，且 $x_1-x_2<0$， 【12 分】

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)<0$． 【13 分】

即 $f(x_1)>f(x_2)$，亦即函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增． 【14 分】

20. （本小题 15 分）

（Ⅰ）$(200-x)\times\left[3\times(1+0.04x)\right]\geq 200\times 3$， 【3 分】

解得 $0\leq x\leq 175$． 【5 分】

（Ⅱ）$f(x)=(200-x)\times\left[3\times(1+0.04x)\right]+3\left(a-\dfrac{3x}{50}\right)\cdot x-600$，（$0\leq x\leq 175$）， 【7 分】

$=-0.3x^2+3(a+7)x$ 【9 分】

对称轴 $x=5(a+7)>0$ 【11 分】

当 $0<a<28$ 时，$f(x)_{\max}=f(5a+35)=\dfrac{15}{2}(a+7)^2$； 【13 分】

当 $a\geq 28$ 时，$f(x)_{\max}=f(175)=525\left(a-\dfrac{21}{2}\right)$； 【15 分】

21. （本小题 14 分）

（Ⅰ）$n_A=2$；$n_B=4$.　　　　　　　　【4 分】

（Ⅱ）不妨设 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$.

因为 $\frac{1}{2}S_A=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)<a_2+a_4<a_3+a_4<S_A$，所以 a_2+a_4，a_3+a_4 不能整除 S_A.

因为 (i,j) 最多有 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$ 六种情况，

而 $(2,4)$，$(3,4)$ 不满足题意，所以 $n_A\le 6-2=4$.

当 $A=\{1,5,7,11\}$ 时，$n_A=4$，所以 n_A 的最大值为 4.　　　　　　【9 分】

（Ⅲ）假设 $0<a=a_1<a_2<a_3<a_4$.

由（Ⅱ）可知，当 n_A 取到最大值 4 时，a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4，a_2+a_3 均能整除 S_A.

因为 $\frac{1}{2}S_A\le\max\{a_1+a_4,a_2+a_3\}<S_A$，故 $\frac{1}{2}S_A=\max\{a_1+a_4,a_2+a_3\}$，

所以 $a_1+a_4=a_2+a_3$.

设 $u=a_1+a_2$，$v=a_1+a_3$，则 u，v 是 $S_A=2(a_2+a_3)=2(u+v-2a_1)$ 的因数，

所以 v 是 $2(u-2a_1)$ 的因数，且 u 是 $2(v-2a_1)$ 的因数.

因为 $u<v$，所以 $2(u-2a_1)<2u<2v$，因为 v 是 $2(u-2a_1)$ 的因数，所以 $v=2u-4a_1$.

因为 u 是 $2(v-2a_1)=4u-12a_1$ 的因数，所以 u 是 $12a_1$ 的因数.

因为 $u<v=2u-4a_1$，所以 $u>4a_1$，所以 $u=6a_1=6a$，或 $u=12a_1=12a$.

故 $A=\{a_1,5a_1,7a_1,11a_1\}$，或 $A=\{a_1,11a_1,19a_1,29a_1\}$.

所以当 n_A 取到最大值 4 时，$A=\{a,5a,7a,11a\}$，或 $A=\{a,11a,19a,29a\}$.【14 分】