



2023-2024 学年度第一学期高三数学 12 月练习

总分：150 分 测试时间：120 分钟

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{1, a\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 且 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则实数 a 取值的集合是 ()

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{2\}$ D. $\{3\}$

2. 设 $m \in \mathbf{R}$, 则 “ $m = 2$ ” 是 “复数 $z = (m + 2i)(1 + i)$ 为纯虚数” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0, 3)$ 上单调递减的是 ()

- A. $y = x^2 - 4$ B. $y = -x^3$ C. $y = |x| + \frac{1}{|x|}$ D. $y = \cos x$

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm\sqrt{3}x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

5. 已知角 α 的终边在第三象限，且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ ()

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x) \leq 2$, 则实数 x 的取值范围是

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(0, 4]$ C. $[-1, 4]$ D. $(-\infty, 4]$

7. 如图, A, B 是两个形状相同的杯子, 且 B 杯高度是 A 杯高度的 $\frac{3}{4}$,

则 B 杯容积与 A 杯容积之比最接近的是

- A. 1:3 B. 2:5
C. 3:5 D. 3:4



A B



8. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1, |\mathbf{c}|=\sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 则 $\cos\langle \mathbf{a}-\mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{c} \rangle=(\quad)$

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. 图 1 是中国古代建筑中的举架结构, AA', BB', CC', DD' 是桁, 相邻桁的水平距离称为步, 垂直距离称为举, 图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图. 其中 DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 是举,

OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 是相等的步, 相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1}=0.5, \frac{CC_1}{DC_1}=k_1,$

$\frac{BB_1}{CB_1}=k_2, \frac{AA_1}{BA_1}=k_3$. 已知 k_1, k_2, k_3 成公差为 0.1 的等差数列, 且直线 OA 的斜率为 0.725,

则 $k_3=(\quad)$

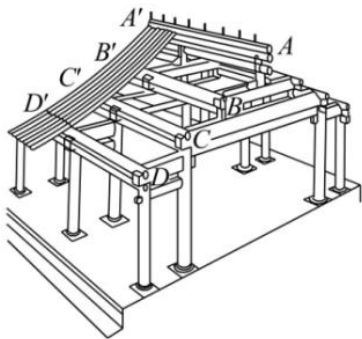


图1

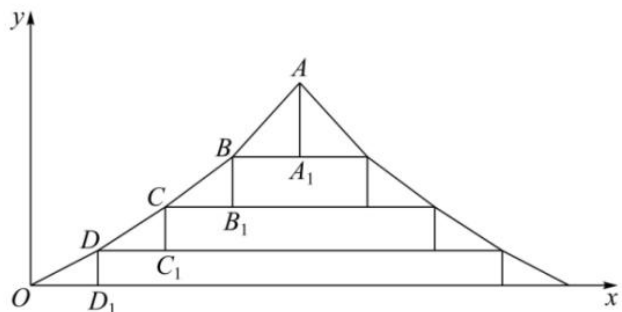


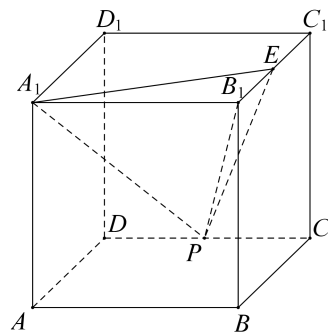
图2

- A. 0.75 B. 0.8 C. 0.85 D. 0.9

10. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 B_1C_1 的中点. 动点 P 沿着棱 DC 从点 D 向点 C 移动, 对于下列三个结论:

- ①存在点 P , 使得 $PA_1=PE$;
- ② ΔPA_1E 的面积越来越小;
- ③四面体 A_1PB_1E 的体积不变.

其中, 所有正确结论的个数是 (\quad) .



- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题共 5 道小题, 每题 5 分, 共 25 分, 把答案填在答题卡上.



11. 若抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点为 F , 点 P 在此抛物线上且横坐标为 3, 则 $|PF|$ 等于_____.

12. 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为_____.

13. 将函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是_____.

14. 已知直线 $l: ax + by - 3 = 0$ 经过点 $(a, b - 2)$, 则原点到点 $P(a, b)$ 的距离可以是_____. (答案不唯一, 写出你认为正确的一个常数就可以)

15. 已知集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x | x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$. 将 $A \cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $S_n > 12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = 2\cos x \cos(x - \frac{\pi}{6})$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 最小正周期;

(II) 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值.

17. (本小题 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $b^2 + c^2 - a^2 + bc = 0$.

(I) 求 $\angle A$ 的大小;

(II) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

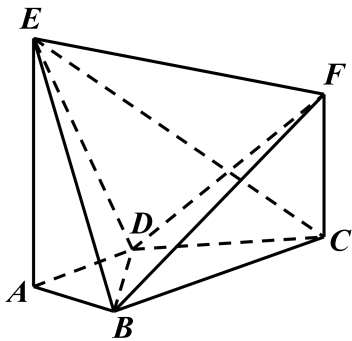
条件①: $\cos B = \frac{1}{3}$;

条件②: $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

条件③: $a = \sqrt{3}$.



18. (本小题 14 分) 如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$,
 $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$, $AE = BC = 2$.



(I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(II) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(III) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.

19. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$ ($a \neq 0$).

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若存在两条直线 $y = ax + b_1$, $y = ax + b_2$ ($b_1 \neq b_2$) 都是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的取值范围;

20. (本小题 14 分) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右顶点分别为 A_1, A_2 , 右焦点为 F ,

已知 $|A_1F| = 3, |A_2F| = 1$.

(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 已知点 P 是椭圆上一动点(不与端点重合), 直线 A_2P 交 y 轴于点 Q , 若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍, 求直线 A_2P 的方程.

21. (本小题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 有 100 项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in [2, 100]$, 存在 $a_n = a_i + d, 1 \leq i \leq n-1$, 若 a_k 与前 n 项中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .

(I) 若 $a_1 = 1, d = 2$, 写出 a_4 所有可能的值;

(II) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 中存在某些项具有性质 P ;

(III) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P , 这三项和为 c , 请用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.