

通州区初三数学期末学业水平质量检测



一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）第 1—10 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

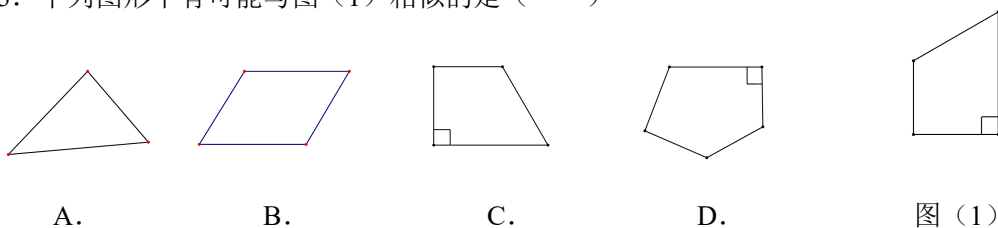
1. 已知 $2a = 3b$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为（ ）

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{5}{2}$

2. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是（ ）

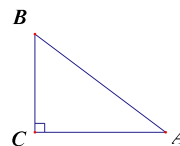
- A. $x \neq 1$ B. $x \neq 0$ C. $x > 0$ D. 全体实数

3. 下列图形中有可能与图（1）相似的是（ ）



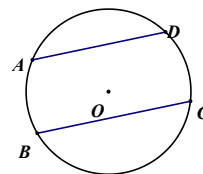
4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，则 $\sin B$ 的值为（ ）

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$



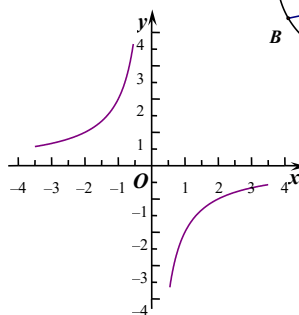
5. 如图， A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四个点， $AD \parallel BC$ 。那么 AB 与 CD 的数量关系是（ ）

- A. $AB = CD$ B. $AB > CD$ C. $AB < CD$ D. 无法确定



6. 如图，图象对应的函数表达式为（ ）

- A. $y = 5x$ B. $y = \frac{2}{x}$
C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

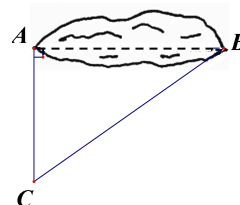


7. 在抛物线 $y = -2(x-1)^2$ 上的一个点是（ ）

- A. $(2, 3)$ B. $(-2, 3)$ C. $(1, -5)$ D. $(0, -2)$

8. 如图，某学校数学课外活动小组的同学们，为了测量一个小湖泊两岸的两棵树 A 和 B 之间的距离，在垂直 AB 的方向 AC 上确定点 C ，如果测得 $AC = 75$ 米， $\angle ACB = 55^\circ$ ，那么 A 和 B 之间的距离是（ ）米

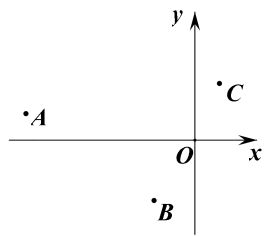
- A. $75 \cdot \sin 55^\circ$ B. $75 \cdot \cos 55^\circ$
C. $75 \cdot \tan 55^\circ$ D. $\frac{75}{\tan 55^\circ}$



9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象经过点 A, B, C , 则对系数 a 和 b 判断正确的是 ()

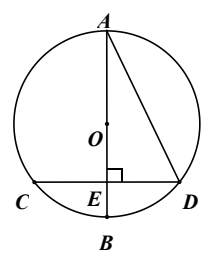
- A. $a > 0, b > 0$
- C. $a > 0, b < 0$

- B. $a < 0, b < 0$
- D. $a < 0, b > 0$



10. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 $AB \perp CD$ 于点 E , $AB=8$, $BE=1.5$, 将 AD 沿着 AD 对折, 对折之后的弧称为 M , 则点 O 与 M 所在圆的位置关系为 ()

- A. 点在圆上
- C. 点在圆外
- B. 点在圆内
- D. 无法确定



二、填空题 (本题共 18 分, 每小题 3 分)

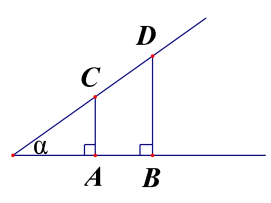
11. 计算: $\cos 60^\circ =$ _____.

12. 把二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式为 _____.

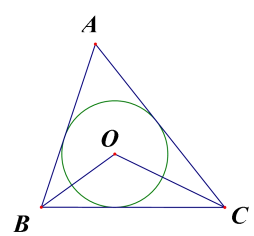
13. 如图, A, B, C, D 分别是 $\angle \alpha$ 边上的四个点, 且 CA, DB 均垂直于 $\angle \alpha$ 的一条边, 如果 $CA=AB=2, BD=3$, 那么 $\tan \alpha =$ _____.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle BOC=118^\circ$, $\angle A=$ _____ $^\circ$.

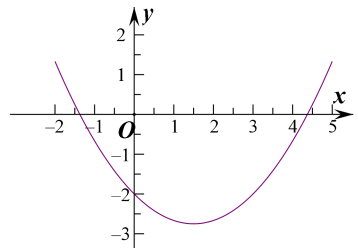
15. 二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 2$ 的图象如图所示, 那么关于 x 的方程 $\frac{1}{3}x^2 - x - 2 = 0$ 的近似解为 _____ (精确到 0.1).



13 题图



14 题图



15 题图

16. 数学课上, 老师介绍了利用尺规确定残缺纸片圆心的方法. 小华对数学老师说: “我可以用折叠纸片的方法确定圆心”. 小华的作法如下:

第一步: 如图 1, 将残缺的纸片对折, 使 AB 的端点 A 与端点 B 重合, 得到图 2;

第二步: 将图 2 继续对折, 使 CB 的端点 C 与端点 B 重合, 得到图 3;

第三步: 将对折后的图 3 打开如图 4, 两条折痕所在直线的交点即为圆心 O .

老师肯定了他的作法. 那么他确定圆心的依据是 _____



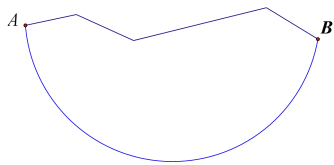


图 1

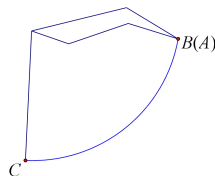


图 2

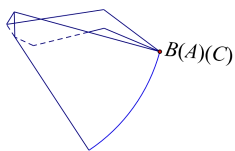


图 3

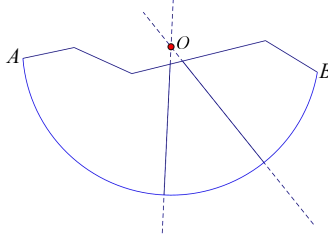


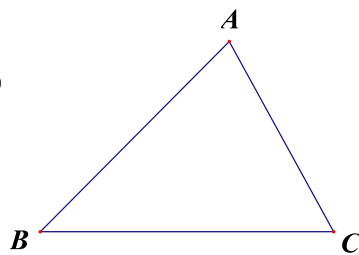
图 4

三、解答题（本题共 72 分，第 17-26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $3 \tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin 60^\circ$.

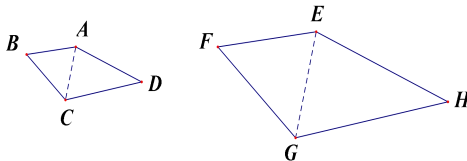
18. 计算: $(\pi - 3)^0 + 4 \sin 45^\circ - \sqrt{8} + |1 - \sqrt{3}|$.

19. 已知 $\triangle ABC$, 求作 $\triangle ABC$ 的内切圆. (不写作法, 保留作图痕迹)



20. 如图, 四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $EFGH$, 连接对角线 AC, EG .

求证 $\triangle ACD \sim \triangle EGH$.



21. 二次函数 $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两个不同的点.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 写出一个满足条件的 m 的值, 并求此时 A, B 两点的坐标.



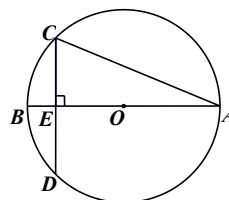
22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -x + 1$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 相交于点 $A(m, 2)$.

(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 画出直线和双曲线的示意图;

(3) 过动点 $P(n, 0)$ 且垂于 x 轴的直线与 $y = -x + 1$ 及双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的交点分别为 B 和 C , 当点 B 位于点 C 上方时, 根据图形, 直接写出 n 的取值范围_____.

23. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直弦 CD 于点 E , $AB=8$, $\angle A=22.5^\circ$
求 CD 的长.

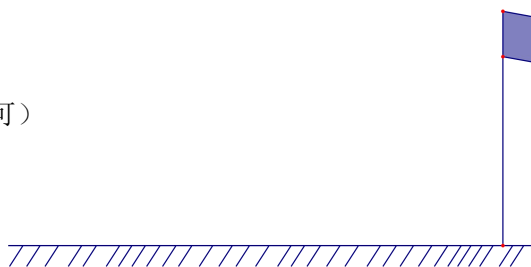


24. 在数学活动课上, 老师带领学生去测量操场上树立的旗杆的高度, 老师为同学们准备了如下工具:

①高为 m 米的测角仪, ②长为 n 米的竹竿, ③足够长的皮尺. 请你选用以上的工具, 设计一个可以通过测量, 求出国旗杆高度的方案 (不用计算和说明, 画出图形并标记可以测量的长度或者角度即可, 可测量的角度选用 α , β , γ 标记, 可测量的长度选用 a , b , c , d 标记, 测角仪和竹竿可以用线段表示).

(1) 你选用的工具为: _____; (填序号即可)

(2) 画出图形.

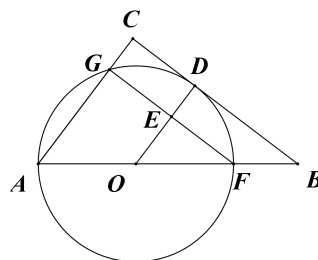


25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, F 是 AB 上一点, 以 AF 为直径的 $\odot O$ 切 BC 于点 D , 交 AC 于点 G , $AC \parallel OD$, OD 与 GF 交于点 E .

(1) 求证: $BC \parallel GF$;

(2) 如果 $\tan A = \frac{4}{3}$, $AO = a$,

请你写出求四边形 $CGED$ 面积的思路.



26. 有这样一个问题：探究函数 $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x^2}$ 的图象与性质.

小东根据学习函数的经验，对函数 $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x^2}$ 的图象与性质进行了探究.

下面是小东的探究过程，请补充完整：

(1) 函数 $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x^2}$ 的自变量 x 的取值范围是_____；

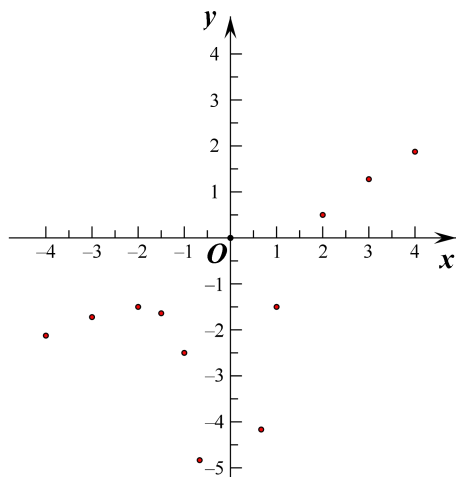
(2) 下表是 y 与 x 的几组对应值，求 m 的值：

x	...	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3	4	...
y	...	$-\frac{17}{8}$	$-\frac{31}{18}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{59}{36}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{29}{6}$	$-\frac{25}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{18}$	m	...

(3) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点. 根据描出的点，画出该函数的图象；

(4) 进一步探究发现，该函数图象在第三象限内的最高点的坐标是 $(-2, -\frac{3}{2})$ ，结合函数的图象，

写出该函数的其它性质（一条即可）_____.



27. 已知：过点 $A(3, 0)$ 直线 $l_1: y = x + b$ 与直线 $l_2: y = -2x$ 交于点 B . 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 B .

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A ，求抛物线的表达式；

(3) 直线 $x = -1$ 分别与直线 l_1 , l_2 交于 C, D 两点，当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与线段 CD 有交点时，求 a 的取值范围.



28. 在等边 $\triangle ABC$ 中, E 是边 BC 上的一个动点(不与点 B, C 重合), $\angle AEF=60^\circ$, EF 交 $\triangle ABC$ 外角平分线 CD 于点 F .

(1) 如图1, 当点 E 是 BC 的中点时, 请你补全图形, 直接写出 $\frac{CF}{AE}$ 的值, 并判断 AE 与 EF 的数量关系;

(2) 当点 E 不是 BC 的中点时, 请在图(2)中补全图形, 判断此时 AE 与 EF 的数量关系, 并证明你的结论.

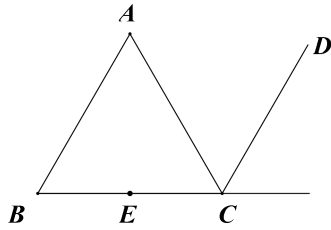


图1

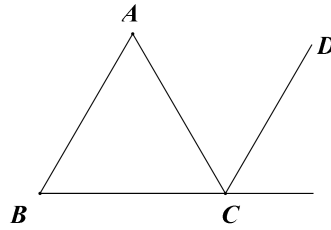


图2

29. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若 P 和 Q 两点关于原点对称, 则称点 P 与点 Q 是一个“和谐点对”, 表示为 $[P, Q]$, 比如 $[P(1, 2), Q(-1, -2)]$ 是一个“和谐点对”.

(1) 写出反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象上的一个“和谐点对”;

(2) 已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$,

①若此函数图象上存在一个和谐点对 $[A, B]$, 其中点 A 的坐标为 $(2, 4)$, 求 m, n 的值;

②在①的条件下, 在 y 轴上取一点 $M(0, b)$, 当 $\angle AMB$ 为锐角时, 求 b 的取值范围.



初三数学期末学业水平质量检测参考答案

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1. B, 2. B, 3. C, 4. D, 5. A, 6. D, 7. D, 8. C, 9. A, 10. B

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

11. $\frac{1}{2}$; 12. $y = (x-1)^2 + 2$; 13. $\frac{1}{2}$; 14. 56° ; 15. $x_1 = -1.2, -1.3, -1.4$ $x_2 = 4.2, 4.3, 4.4$; 16.

弧为轴对称图形；弧的对称轴与圆的对称轴为同一条直线；圆的两条对称轴的交点为圆心。

三、解答题（本题共 72 分，第 17-26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 解： $3 \tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin 60^\circ$.

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots (3 \text{分})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \dots\dots\dots (2 \text{分})$$

18. 解： $(\pi - 3)^0 + 4 \sin 45^\circ + \sqrt{8} + |1 - \sqrt{3}|$.

$$= 1 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1 \dots\dots\dots (4 \text{分})$$

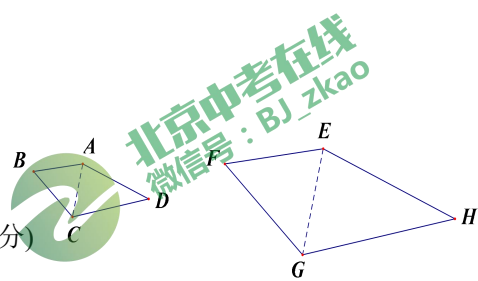
$$= \sqrt{3} \dots\dots\dots (1 \text{分})$$

19. 略

20. 证明： 四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $EFGH$

$$\therefore \frac{AD}{EH} = \frac{CD}{GH}, \angle D = \angle H \dots\dots\dots (4 \text{分})$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle EHG \dots\dots\dots (1 \text{分})$$



21. 解：（1） 二次函数 $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两个不同的点.

$$\therefore \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$$

$$\therefore m > -\frac{5}{4} \dots\dots\dots (2 \text{分})$$

（2） 略 $\dots\dots\dots (3 \text{分})$

22. 解（1）： 直线 $y = -x + 1$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 相交于点 $A(m, 2)$.

$$\therefore A(-1, 2)$$



$\therefore y = \frac{-2}{x}$ (1分)

(2) 略.....(3分)

(3) $0 < n < 2, n < -1$(5分)

23. 解：连接 OC ，则 $OC=OA=4$

$\angle A=22.5^\circ$

$\therefore \angle COE=2\angle A=45^\circ$ (1分)

直径 AB 垂直弦 CD 于 E

$\therefore CE = OC \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ (3分)

$\therefore CD = 4\sqrt{2}$ (5分)

24. 略

25. 证明：(1) $\odot O$ 切 BC 于点 D

$\therefore OD \perp BC$

$AC \parallel OD$

$\therefore \angle C = \angle ODB = 90^\circ$

AF 为 $\odot O$ 直径

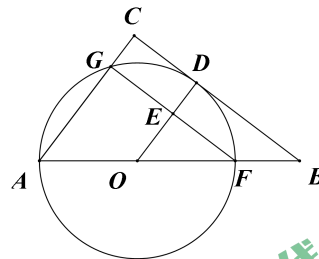
$\therefore \angle AGF = 90^\circ = \angle C$

$\therefore BC \parallel GF$(2分)

解：(2) ①由 (1) 可知四边形 $CGED$ 为矩形

②由 $AF=2AO=2a$, $OF=a$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 可求 GF, OE, DE 的长

③由 (1) 可得 $GE = \frac{1}{2}GF$, 进而可求四边形 $CGED$ 的面积.(5分)



26. 解：(1) $x \neq 0$ (1分)

(2) $m = \frac{15}{8}$ (2分)

(3) 略.....(3分)

(4) 略.....(5分)

27. 解：(1) $l_1: y = x + 3$ (1分)

$B(1, -2)$ (2分)

(2) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点式为 $y = a(x - h)^2 + k$



抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $B(1, -2)$.

$\therefore y = a(x-1)^2 - 2$

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A

\therefore 解得 $a = \frac{1}{2}$

\therefore 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ (4分)

(3) 直线 $x = -1$ 分别与直线 l_1, l_2 交于 C, D 两点

$\therefore C, D$ 两点的坐标分别为 $(-1, 2), (-1, -4)$

当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 C 时

解得 $a = 1$ (5分)

当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 D 时

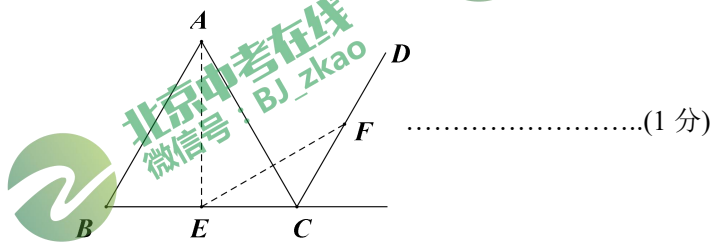
解得 $a = -\frac{1}{2}$ (6分)

\therefore 当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与线段 CD 有交点时, a 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$(7分)

北京中考在线
微信号: BJ_zkao

北京中考在线
微信号: BJ_zkao

28.解: (1)



$\frac{CF}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;(2分)

AE 与 EF 的数量关系为 $AE=EF$(3分)

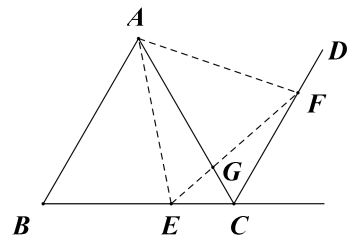
证明: (2) 连接 AF, EF 与 AC 交于点 G .

在等边 $\triangle ABC$ 中, CD 是它的外角平分线.

$\therefore \angle ACF = 60^\circ = \angle AEF,$

$\angle AGE = \angle FGC,$

$\therefore \triangle AGE \sim \triangle FGC$(5分)



$$\begin{aligned} \therefore \frac{GE}{GC} &= \frac{GA}{GF} \\ \therefore \frac{GE}{GA} &= \frac{GC}{GF} \\ \angle AGF &= \angle EGC \\ \therefore \triangle AGF &\sim \triangle EGC \dots\dots\dots (6 \text{分}) \\ \angle AFE &= \angle ACB = 60^\circ, \\ \therefore \triangle AEF &\text{为等边三角形} \\ \therefore AE &= EF \dots\dots\dots (7 \text{分}) \end{aligned}$$

29.解: (1)[P(1,1),Q(-1,-1)], 反比例图象上关于原点对称的两点均可; \dots\dots\dots (1分)

(2)① \because A(2,4)且 A 和 B 为和谐点对, \therefore B 点坐标为(-2,-4) \dots\dots\dots (2分)

将 A 和 B 两点坐标代入 $y=x^2+mx+n$, 可得 $\begin{cases} 4+2m+n=4 \\ 4-2m+n=-4 \end{cases}$ \dots\dots\dots (3分)

$$\therefore \begin{cases} m=2 \\ n=-4 \end{cases} \dots\dots\dots (4 \text{分})$$

②(i) M 点在 x 轴上方时, 若 $\angle AMB$ 为直角(M 点在 x 轴上), 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形

\because A(2,4)且 A 和 B 为和谐点对,
\therefore 原点 O 在 AB 线段上且 O 为 AB 中点
\therefore AB=2OA \dots\dots\dots (4分)

\because A(2,4), \therefore OA=2\sqrt{5}, \therefore AB=4\sqrt{5} \dots\dots\dots (5分)

在 Rt $\triangle ABC$ 中, \because O 为 AB 中点

\therefore MO=OA=2\sqrt{5} \dots\dots\dots (6分)

若 $\angle AMB$ 为锐角, 则 $b > 2\sqrt{5}$ \dots\dots\dots (7分)

(ii) M 点在 x 轴下方时, 同理可得, $b < -2\sqrt{5}$

综上所述, b 的取值范围为 $b > 2\sqrt{5}$ 或 $b < -2\sqrt{5}$ \dots\dots\dots (8分)

