

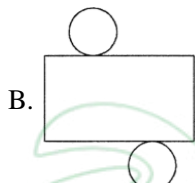
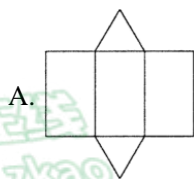


2022 北京昌平初三二模

数 学

一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

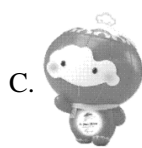
1. 斗笠，又名箬笠，即以竹皮编织的用来遮光遮雨的帽子，可以看做一个圆锥，下列平面展开图中能围成一个圆锥的是（ ）



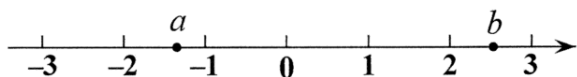
2. 2021 年 12 月 9 日 15 时 40 分，“天宫课堂”第一课开始，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，全国超过 6000 万中小学生观看授课直播，其中 6000 万用科学记数法表示为（ ）

- A. 6000×10^4 B. 6×10^7 C. 0.6×10^8 D. 6×10^8

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕。2022 年北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源；北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”是以熊猫为原型进行设计创作；北京冬季残奥会的吉祥物“雪容融”是以灯笼为原型进行设计创作。下列冬奥元素图片中，是轴对称图形的是（ ）



4. 若实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是（ ）



- A. $|a| < |b|$ B. $ab > 0$ C. $a < -b$ D. $a - b > 0$

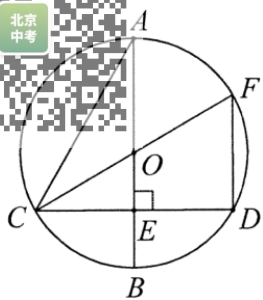
5. 若 $a + b = 1$ ，则代数式 $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \frac{b}{a^2 - b^2}$ 的值为（ ）

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6. 一个不透明的盒子中装有 15 个除颜色外无其他差别的小球，其中有 2 个黄球和 3 个绿球，其余都是红球，从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率为（ ）

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 如图， $\odot O$ 的直径 $AB \perp CD$ ，垂足为 E ， $\angle A = 30^\circ$ ，连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 F ，连接 FD ，则 $\angle CFD$ 的度数为（ ）



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

8. 某气球内充满了一定质量 气体，当温度不变时，气球内气体的气压 P （单位：千帕）随气球内气体的体积 V （单位：立方米）的变化而变化， P 随 V 的变化情况如下表所示，那么在这个温度下，气球内气体的气压 P 与气球内气体的体积 V 的函数关系最可能是

V （单位：立方米）	64	48	38.4	32	24	...
P （单位：千帕）	1.5	2	2.5	3	4	...

- A. 正比例函数 B. 一次函数 C. 二次函数 D. 反比例函数

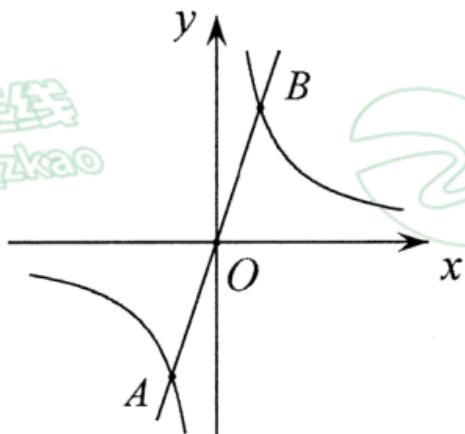
二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

10 因式分解： $3x^2 - 6x + 3 =$ _____.

11. 正多边形一个外角的度数是 60° ，则该正多边形的边数是_____.

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 3x$ 与双曲线 $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 交于 A, B 两点，若点 A, B 的横坐标分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 =$ _____.



13. 方程术是《九章算术》最高的数学成就，其中“盈不足”一章中曾记载“今有大器五小器一容三斛(“斛”是古代的一种容量单位)，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”

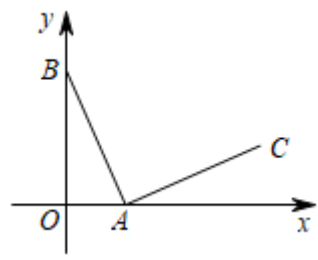


译文：有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛，问 1 个大桶和 1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

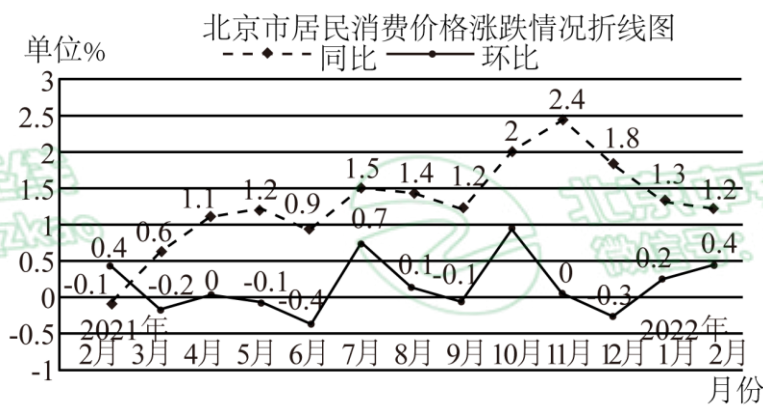
设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组为_____。

14. 不等式组 $\begin{cases} 2(x+1) \leq 3 \\ \frac{x-2}{3} > -1 \end{cases}$ 的解集为_____。

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$ ， $B(0,2)$ 。将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AC ，则点 C 的坐标为_____。



16. 下图是国家统计局发布的 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格涨跌幅情况折线图（注：2022 年 2 月与 2021 年 2 月相比较称为同比，2022 年 2 月与 2022 年 1 月相比较称为环比）。



根据图中信息，有下面四个推断：

- ①2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比均上涨；
- ②2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比有涨有跌；
- ③在北京居民消费价格同比数据中，2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差；

④在北京居民消费价格环比数据中，2021年4月至8月的环比数据的平均数小于2021年9月至2022年1月环比数据的平均数.

所有合理推断的序号是_____.

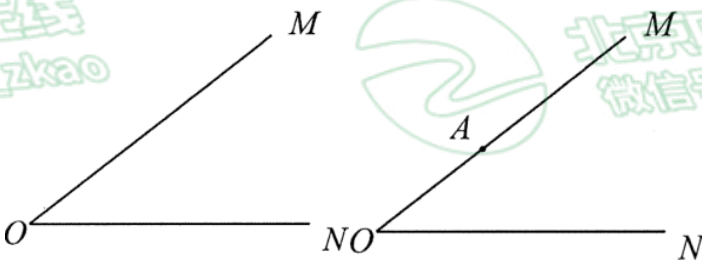
三、解答题（本题共68分，第17-22题，每小题5分，第23-26题，每小题6分，第27-28题，每小题7分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算： $(1-\sqrt{3})^0 + |-\sqrt{2}| - 2\cos 45^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

18 解方程： $\frac{3x}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$.

19. 已知：如图， $\angle MON$.

求作： $\angle BAD$ ，使 $\angle BAD = \angle MON$.



下面是小明设计的尺规作图过程.

作法：

①在 OM 上取一点 A ，以 A 为圆心， OA 为半径画弧，交射线 OA 于点 B ；

②在射线 ON 上任取一点 C ，连接 BC ，分别以 B, C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧，两弧交于点 E, F ，作直线 EF ，与 BC 交于点 D ；

③作射线 AD ， $\angle BAD$ 即为所求.

(1) 使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下列证明.

证明： $\because EF$ 垂直平分 BC ，

\therefore _____ = DC .

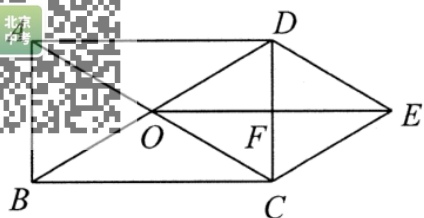
$\because AO = AB$,

$\therefore AD \parallel OC$ () (填推理依据).

$\therefore \angle BAD = \angle MON$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，写出一个满足条件 k 的值，并求此时方程的根.

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O ，分别过点 C, D 作 BD, AC 的平行线交于点 E ，连接 OE 交 AD 于点 F .

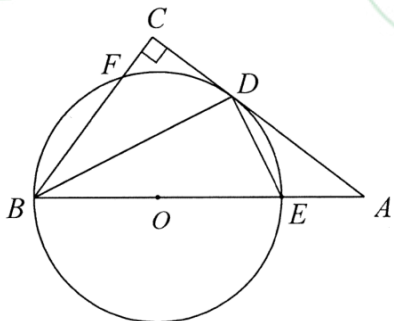


- (1) 求证：四边形 $OCED$ 菱形；
 (2) 若 $AC = 8$ ， $\angle DOC = 60^\circ$ ，求菱形 $OCED$ 的面积。

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与直线 $y = x$ 平行，且过点 $(2, 1)$ 。

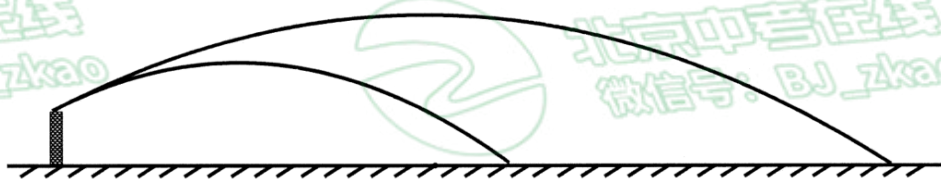
- (1) 求这个一次函数 解析式；
 (2) 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 分别交 x ， y 轴于点 A ，点 B ，若点 C 为 x 轴上一点，且 $S_{\triangle ABC} = 2$ ，直接写出点 C 的坐标。

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BC ， AC 与 $\odot O$ 交于点 F ， D ， BE 为 $\odot O$ 直径，点 E 在 AB 上，连接 BD ， DE ， $\angle ADE = \angle DBE$ 。



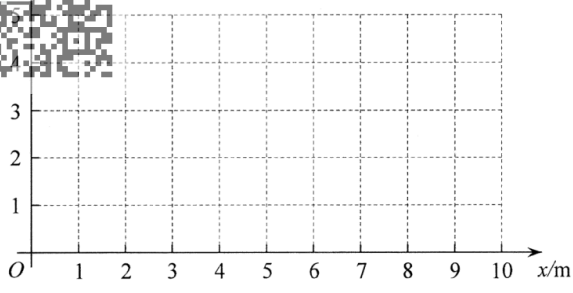
- (1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线；
 (2) 若 $\sin A = \frac{3}{5}$ ， $\odot O$ 的半径为 3，求 BC 的长。

24. 如图，在一次学校组织的社会实践活动中，小龙看到农田上安装了很多灌溉喷枪，喷枪喷出的水流轨迹是抛物线，他发现这种喷枪射程是可调节的，且喷射的水流越高射程越远，于是他从该农田的技术部门得到了这种喷枪的一个数据表，水流的最高点与喷枪的水平距离记为 x ，水流的最高点到地面的距离记为 y 。



y 与 x 的几组对应值如下表：

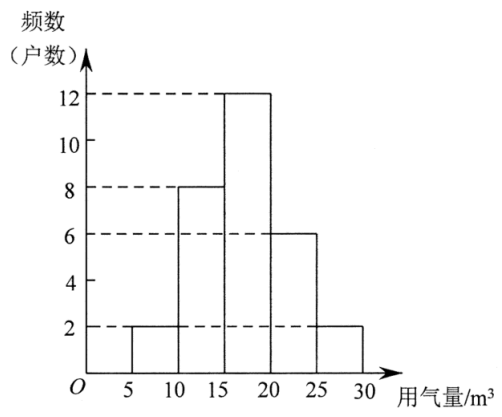
x (单位: m)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	...
y (单位: m)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	2	...



- (1) 该喷枪的出水口到地面的距离为_____ m；
- (2) 在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点，并画出 y 与 x 的函数图像；
- (3) 结合 (2) 中的图像，估算当水流的最高点与喷枪的水平距离为 8m 时，水流的最高点到地面的距离为_____ m (精确到 1m)。根据估算结果，计算此时水流的射程约为_____ m (精确到 1m)

25. 甲、乙两个小区各有 300 户居民，为了解两个小区 3 月份用户使用燃气量情况，小明和小丽分别从中随机抽取 30 户进行调查，并对数据进行了整理、描述和分析。下面给出了部分信息。

a. 甲小区用气量频数分布直方图如下 (数据分成 5 组: $5 \leq x < 10$, $10 \leq x < 15$, $15 \leq x < 20$, $20 \leq x < 25$, $25 \leq x < 30$)



b. 甲小区用气量的数据在 $15 \leq x < 20$ 这一组的是:

15 15 16 16 16 16 18 18 18 18 18 19

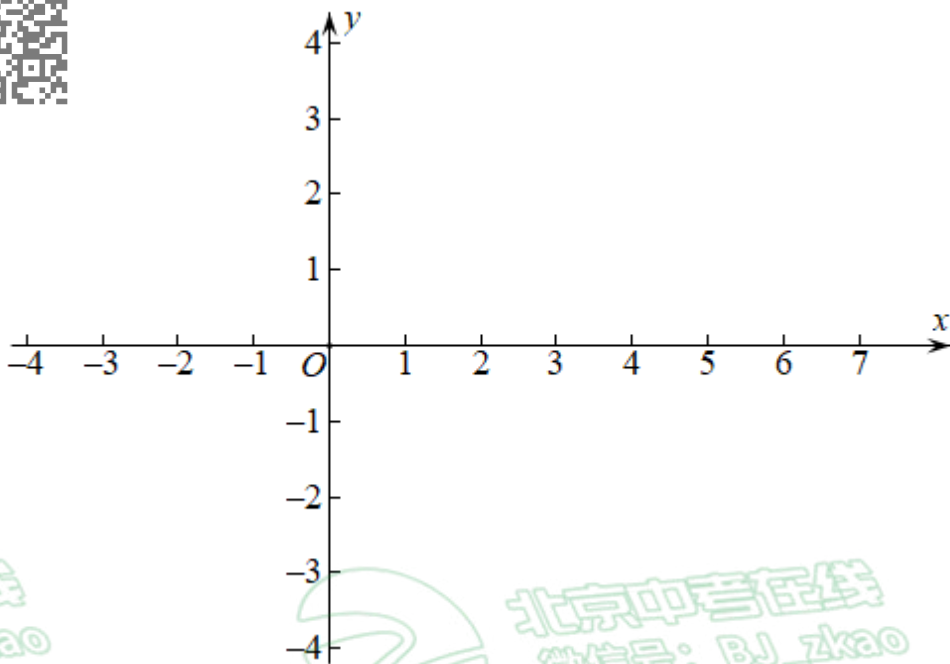
c. 甲、乙两小区用气量的平均数、中位数、众数如下:

小区	平均数	中位数	众数
甲	17.2	m	18
乙	17.7	19	15

根据以上信息，回答下列问题:

- (1) 写出表中 m 的值;
- (2) 在甲小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_1 。在乙小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_2 。比较 p_1 , p_2 的大小，并说明理由;
- (3) 估计甲小区中用气量超过 15 立方米的户数。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 1 (a > 0)$ 。



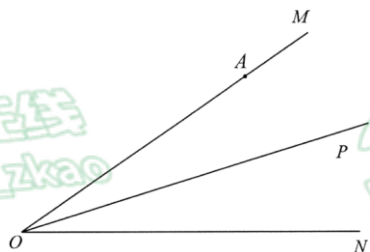
(1) 若抛物线过点 $(4, -1)$.

①求抛物线的对称轴;

②当 $-1 < x < 0$ 时, 图像在 x 轴的下方, 当 $5 < x < 6$ 时, 图像在 x 轴的上方, 在平面直角坐标系中画出符合条件的图像, 求出这个抛物线的表达式;

(2) 若 $(-4, y_1)$, $(-2, y_2)$, $(1, y_3)$ 为抛物线上的三点且 $y_3 > y_1 > y_2$, 设抛物线的对称轴为直线 $x = t$, 直接写出 t 的取值范围.

27. 如图, 已知 $\angle MON = \alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, OP 是 $\angle MON$ 的平分线, 点 A 是射线 OM 上一点, 点 A 关于 OP 对称点 B 在射线 ON 上, 连接 AB 交 OP 于点 C , 过点 A 作 ON 的垂线, 分别交 OP , ON 于点 D , E , 作 $\angle OAE$ 的平分线 AQ , 射线 AQ 与 OP , ON 分别交于点 F , G .



(1) ①依题意补全图形;

②求 $\angle BAE$ 度数; (用含 α 的式子表示)

(2) 写出一个 α 的值, 使得对于射线 OM 上任意的点 A 总有 $OD = \sqrt{2}AF$ (点 A 不与点 O 重合), 并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, 对于 $\triangle ABC$ 和直线 l 给出如下定义: 若 $\triangle ABC$ 的一条边关于直线 l 的对称线段 PQ 是 $\odot O$ 的弦, 则称 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关于直线 l 的“关联三角形”, 直线 l 是“关联轴”.

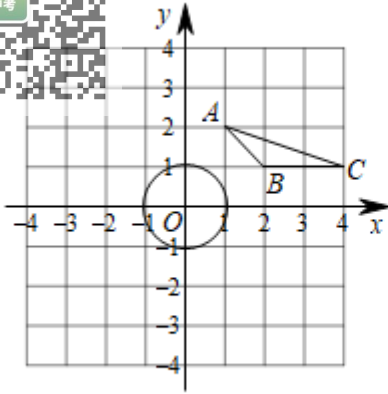
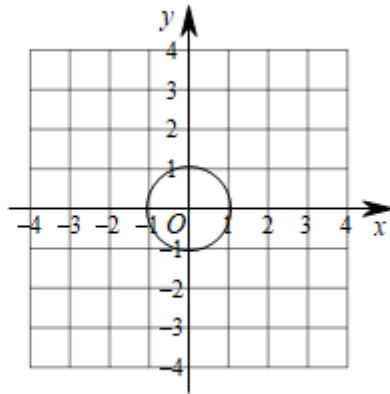


图1



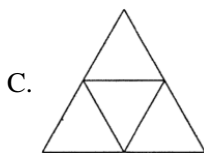
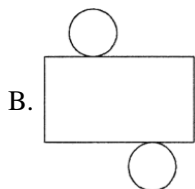
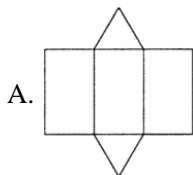
备用图

- (1) 如图1, 若 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关于直线 l 的“关联三角形”, 请画出 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的“关联轴”(至少画两条);
- (2) 若 $\triangle ABC$ 中, 点A坐标为 $(2,3)$, 点B坐标为 $(4,1)$, 点C在直线 $y=-x+3$ 的图像上, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形, 求点C横坐标的取值范围;
- (3) 已知 $A(\sqrt{3},1)$, 将点A向上平移2个单位得到点M, 以M为圆心MA为半径画圆, B, C为 $\odot M$ 上的两点, 且 $AB=2$ (点B在点A右侧), 若 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的关联轴至少有一条, 直接写出OC的最小值和最大值, 以及OC最大时AC的长.

参考答案

一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1. 斗笠，又名箬笠，即以竹皮编织的用来遮光遮雨的帽子，可以看做一个圆锥，下列平面展开图中能围成一个圆锥的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据圆锥的展开图可直接得到答案.

【详解】解：圆锥的展开图是扇形和圆，且圆在扇形的弧线上.

故选：D.

【点睛】此题主要考查了简单几何体的展开图，题目比较简单.

2. 2021 年 12 月 9 日 15 时 40 分，“天宫课堂”第一课开始，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，全国超过 6000 万中小学生观看授课直播，其中 6000 万用科学记数法表示为（ ）

A. 6000×10^4

B. 6×10^7

C. 0.6×10^8

D. 6×10^8

【答案】B

【解析】

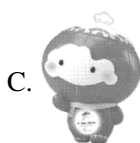
【分析】对于一个绝对值较大的数，用科学记数法写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 是比原整数位数少 1 的数.

【详解】解：6000 万 = 60000000 = 6×10^7 .

故选：B.

【点睛】此题考查了科学记数法表示方法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕. 2022 年北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源；北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”是以熊猫为原型进行设计创作；北京冬季残奥会的吉祥物“雪容融”是以灯笼为原型进行设计创作. 下列冬奥元素图片中，是轴对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义判断即可.

【详解】解：A、不是轴对称图形，不符合题意；

B、不是轴对称图形，不符合题意；

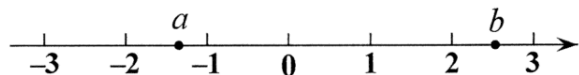
C、不是轴对称图形，不符合题意；

D、轴对称图形，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

4. 若实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是（ ）



A. $|a| < |b|$

B. $ab > 0$

C. $a < -b$

D. $a - b > 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据数轴上点的位置，先确定 a 、 b 的范围，再逐个判断得出结论.

【详解】解：根据数轴可得， $-2 < a < -1$ ， $2 < b < 3$ ，

$\therefore |a| < |b|$ ， $ab < 0$ ， $a > -b$ ， $a - b < 0$ ，即 A 正确，

故选：A.

【点睛】本题考查了数轴、绝对值、有理数乘法的符号法则、相反数以及有理数的减法. 认真分析数轴得到有用信息是解决本题的关键.

5. 若 $a + b = 1$ ，则代数式 $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \frac{b}{a^2 - b^2}$ 的值为（ ）

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】先将代数式进行化简，再将 $a + b = 1$ 代入化简之后的式子求解即可.

【详解】解： $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \frac{b}{a^2 - b^2} = \left(\frac{a - b}{b}\right) \cdot \frac{b}{(a - b)(a + b)} = \frac{1}{a + b}$

将 $a + b = 1$ 代入上式可得：原式 $= \frac{1}{1} = 1$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查分式的化简求值，解题的关键是根据分式运算法则先将式子正确化简，再将 $a + b = 1$ 代入计算.

6. 一个不透明的盒子中装有 15 个除颜色外无其他差别的小球，其中有 2 个黄球和 3 个绿球，其余都是红球，从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率为（ ）

A. $\frac{2}{15}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接根据概率公式求解.



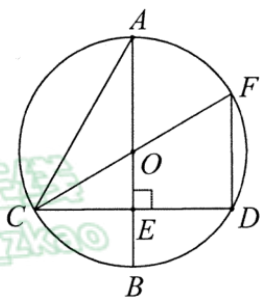
【详解】解：∵盒子中装有 $15-2-3=10$ 个红球，

∴从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率是 $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ；

故选：D.

【点睛】本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

7. 如图， $\odot O$ 的直径 $AB \perp CD$ ，垂足为 E ， $\angle A = 30^\circ$ ，连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 F ，连接 FD ，则 $\angle CFD$ 的度数为 ()



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】由 $OA=OC$ ，得 $\angle OCA = \angle A = 30^\circ$ 从而得 $\angle BOC = \angle OCA + \angle A = 60^\circ$ ，再由 CF 是直径，则 $\angle CDF = 90^\circ$ ，则 $FD \perp CD$ ，又因为 $AB \perp CD$ ，所以 $AB \parallel DF$ ，所以 $\angle CFD = \angle BOC = 60^\circ$.

【详解】解：∵ $OA=OC$ ，

∴ $\angle OCA = \angle A = 30^\circ$ ，

∴ $\angle BOC = \angle OCA + \angle A = 60^\circ$ ，

∵ CF 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle CDF = 90^\circ$ ，即 $FD \perp CD$ ，

又 ∵ $AB \perp CD$ ，

∴ $AB \parallel DF$ ，

∴ $\angle CFD = \angle BOC = 60^\circ$.

故选：C.

【点睛】本题考查直径所对圆周角是直角，等腰三角形的性质，三角形外角性质，平行线的判定与性质，掌握直径所对圆周角是直角是解题的关键.

8. 某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 P （单位：千帕）随气球内气体的体积 V （单位：立方米）的变化而变化， P 随 V 的变化情况如下表所示，那么在这个温度下，气球内气体的气压 P 与气球内气体的体积 V 的函数关系最可能是

V （单位：立方米）	64	48	38.4	32	24	...
P （单位：千帕）	1.5	2	2.5	3	4	...

A. 反比例函数

B. 一次函数

C. 二次函数

D. 反比例函数

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $PV=96$ 结合反比例函数的定义判断即可.

【详解】解：由表格数据可得 $PV=96$ ，即 $P = \frac{96}{V}$ ，

∴ 气球内气体的气压 P 与气球内气体的体积 V 的函数关系最可能是反比例函数，

故选：D.

【点睛】本题考查了反比例函数，掌握反比例函数的定义是解题的关键.

二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 5$

【解析】

【分析】由于分式的分母不能为 0，因此 $x-5 \neq 0$ ，解得 x .

【详解】解：∵ 分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，

∴ $x-5 \neq 0$ ，即 $x \neq 5$.

故答案为 $x \neq 5$.

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件：分式有意义，分母不能为 0.

10. 因式分解： $3x^2 - 6x + 3 =$ _____.

【答案】 $3(x-1)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，再用完全平方公式分解即可.

【详解】解： $3x^2 - 6x + 3$ ，
 $= 3(x^2 - 2x + 1)$ ，
 $= 3(x-1)^2$

故答案为： $3(x-1)^2$.

【点睛】本题考查了因式分解，解题关键是熟练运用提取公因式和公式法进行因式分解.

11. 正多边形一个外角的度数是 60° ，则该正多边形的边数是_____.

【答案】6.

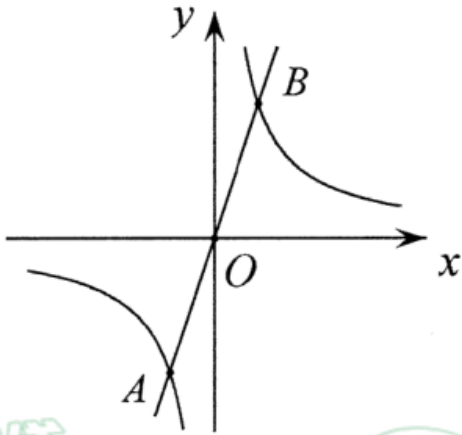
【解析】

【详解】解：这个正多边形的边数： $360^\circ \div 60^\circ = 6$

故答案为：6.

【点睛】本题考查多边形内角与外角.

北京 i21 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=3x$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 交于 A ， B 两点，若点 A ， B 的横坐标分别为 x_1 ， x_2 ，则 $x_1+x_2=_____$.



【答案】0

【解析】

【分析】根据反比例函数与正比例函数都是中心对称图形可得 $x_1=-x_2$ ，然后求解即可.

【详解】解：∵反比例函数与正比例函数都是中心对称图形，

$$\therefore x_1=-x_2,$$

$$\therefore x_1+x_2=0,$$

故答案为：0.

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，熟练掌握反比例函数与正比例函数的中心对称性是解题的关键.

13. 方程术是《九章算术》最高的数学成就，其中“盈不足”一章中曾记载“今有大器五小器一容三斛(“斛”是古代的一种容量单位)，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”



译文：有大小两种盛酒的桶，已知5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛，1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛，问1个大桶和1个小桶分别可以盛酒多少斛？

设1个大桶可以盛酒 x 斛，1个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组为_____.

【答案】
$$\begin{cases} 5x+y=3 \\ x+5y=2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】根据“5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛，1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛”建立方程组即可.



【详解】由题意得：
$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

故答案为：
$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

【点睛】本题考查了列二元一次方程组，读懂题意，正确建立方程是解题关键。

14. 不等式组
$$\begin{cases} 2(x+1) \leq 3 \\ \frac{x-2}{3} > -1 \end{cases}$$
 的解集为_____.

【答案】 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】分别求出两个不等式的解集，即可得出不等式组的解集

【详解】解：解不等式 $2(x+1) \leq 3$ 得： $x \leq \frac{1}{2}$ ，

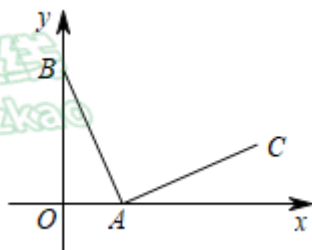
解不等式 $\frac{x-2}{3} > -1$ 得： $x > -1$ ，

\therefore 原不等式组的解集为 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ ，

故答案为： $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ 。

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键。

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$ ， $B(0,2)$ 。将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AC ，则点 C 的坐标为_____。

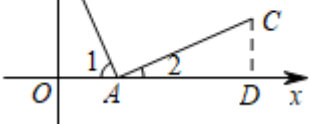


【答案】 (3, 1)

【解析】

【分析】过点 C 作 $CD \perp x$ 轴，垂足为 D ，证明 $\triangle OBA \cong \triangle DAC$ ，从而得到 $AD=BO$ ， $AO=CD$ ，计算 OD 的长即可确定点 C 的坐标。

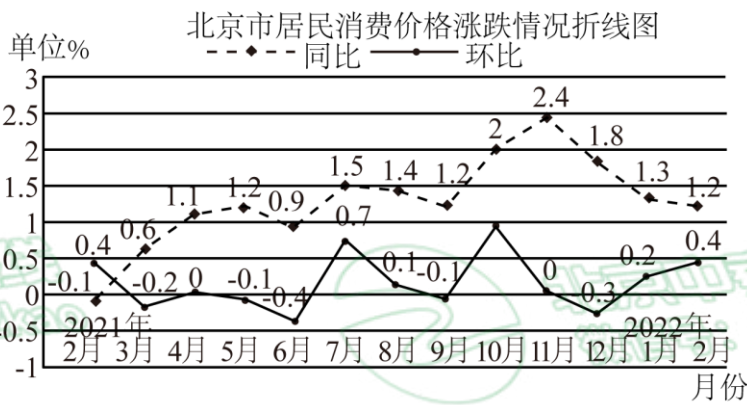
【详解】过点 C 作 $CD \perp x$ 轴，垂足为 D ，



∵ 线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AC ,
 ∴ $\angle OBA = \angle 2$, $BA = AC$,
 ∴ $\triangle OBA \cong \triangle DAC$,
 ∴ $AD = BO$, $AO = CD$,
 ∵ 点 $A(1,0)$, $B(0,2)$,
 ∴ $OA = 1$, $OB = 2$,
 ∴ $AD = BO = 2$, $AO = CD = 1$,
 ∴ $OD = 3$,
 ∴ 点 C 的坐标 $(3, 1)$,
 故答案为: $(3, 1)$.

【点睛】 本题考查了旋转 性质，三角形全等的判定和性质，线段与坐标的关系，熟练掌握旋转的性质和三角形全等的判定是解题的关键.

16. 下图是国家统计局发布的 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格涨跌幅情况折线图（注：2022 年 2 月与 2021 年 2 月相比较称为同比，2022 年 2 月与 2022 年 1 月相比较称为环比）.



根据图中信息，有下面四个推断：

- ① 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比均上涨；
- ② 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比有涨有跌；
- ③ 在北京居民消费价格同比数据中，2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差；
- ④ 在北京居民消费价格环比数据中，2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数.

所有合理推断的序号是_____.



【答案】②③④

【解析】

【分析】直接利用折线图，判断①②③④的结论，即可得出答案.

【详解】解：从同比来看，2021年2月至2022年2月北京居民消费价格同比数据有正数也有负数，即同比有上涨也有下跌，故①错误；

从环比来看，2021年2月至2022年2月北京居民消费价格环比数据有正数也有负数，即环比有上涨也有下跌，故②正确；

从折线统计图看，2021年4月至8月 同比数据波动小于2021年4月至8月的同比数据波动，所以2021年4月至8月的同比数据的方差小于2021年9月至2022年1月同比数据的方差，故③正确；

2021年4月至8月的环比数据的平均数为： $(0-0.1-0.4+0.7+0.1) \div 5 = 0.06$ ，

2021年9月至2022年1月环比数据的平均数为： $(-0.1+0.9+0-0.3+0.2) \div 5 = 0.14$ ，

∴2021年4月至8月的环比数据的平均数小于2021年9月至2022年1月环比数据的平均数，故④正确；

故答案为：②③④.

【点睛】本题考查折线统计图，方差，平均数，从统计图获取的所要的信息是解题的关键.

三、解答题（本题共68分，第17-22题，每小题5分，第23-26题，每小题6分，第27-28题，每小题7分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算： $(1-\sqrt{3})^0 + |-\sqrt{2}| - 2\cos 45^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

【答案】5

【解析】

【分析】直接利用零指数幂的性质以及绝对值的性质、特殊角的三角函数、负指数幂的性质分别化简得出答案.

【详解】解： $(1-\sqrt{3})^0 + |-\sqrt{2}| - 2\cos 45^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
 $= 1 + \sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4$
 $= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 4$
 $= 5$.

【点睛】本题主要考查实数的混合运算，掌握零指数幂，负整数指数幂，绝对值以及特殊角的三角函数的运算法则，是解题的关键.

18. 解方程： $\frac{3x}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】先去分母，等号两边同时乘以 $(x-2)$ ，化成整式方程在求解，最后验根即可.

【详解】解：方程两边同时乘以 $(x-2)$ ，

得到： $3x = x - 2 - 2$ ，

解得： $x = -2$

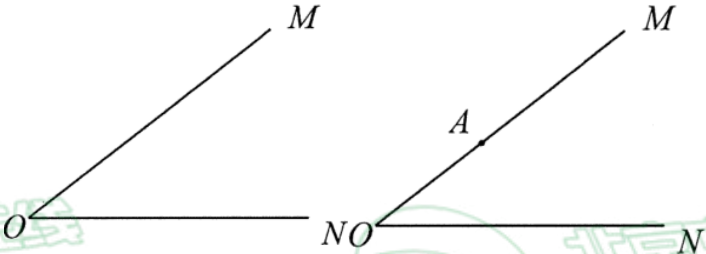
经检验： $x = -2$ 是原方程的解，

\therefore 原方程的解是 $x = -2$ ，

【点睛】 本题考查了分式方程的解法，属于基础题，熟练掌握分式方程的解法是解决本题的关键，最后一定要记得检验.

19. 已知： 如图， $\angle MON$.

求作： $\angle BAD$ ， 使 $\angle BAD = \angle MON$.



下面是小明设计的尺规作图过程.

作法：

①在 OM 上取一点 A ， 以 A 为圆心， OA 为半径画弧， 交射线 OA 于点 B ；

②在射线 ON 上任取一点 C ， 连接 BC ， 分别以 B ， C 为圆心， 大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧， 两弧交于点 E ， F ， 作直线 EF ， 与 BC 交于点 D ；

③作射线 AD ， $\angle BAD$ 即为所求.

(1) 使用直尺和圆规， 补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下列证明.

证明： $\because EF$ 垂直平分 BC ，

\therefore _____ = DC .

$\because AO = AB$ ，

$\therefore AD \parallel OC$ () (填推理依据) .

$\therefore \angle BAD = \angle MON$.

【答案】 (1) 见详解 (2) BD , 三角形中位线定理

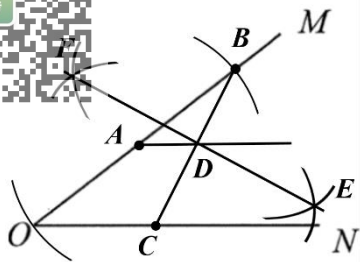
【解析】

【分析】 (1) 根据题目的描述， 进行尺规作图即可；

(2) 利用三角形中位线定理即可求解.

【小问 1 详解】

作图如下：



【小问 2 详解】

证明：∵ EF 垂直平分 BC ,

∴ $BD=DC$,

∵ $AO=AB$,

∴ 根据三角形的中位线定理有： $AD \parallel OC$,

∴ $\angle BAD = \angle MON$.

故答案为： BD , 三角形中位线定理.

【点睛】 本题考查了尺规作图、三角形中位线定理、平行线的性质等知识，根据三角形的中位线得出 $AD \parallel OC$ 是解答本题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，写出一个满足条件 k 的值，并求此时方程的根.

【答案】 当 $k=0$ 时， $x_1=0$, $x_2=-4$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 先求出 b^2-4ac ，再根据 $b^2-4ac > 0$ 求出 k 的取值范围，然后写出一个，并求出方程的根即可.

【详解】 ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $b^2-4ac=4^2-4 \times k > 0$,

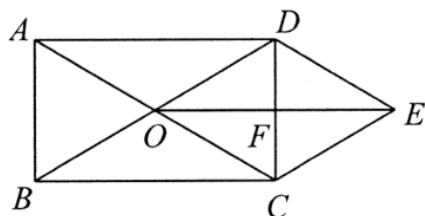
即 $k < 4$.

当 $k=0$ 时， $x^2+4x=0$,

解得 $x_1=0$, $x_2=-4$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的根的判别式，当 $b^2-4ac > 0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根.

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC , BD 交于点 O ，分别过点 C , D 作 BD , AC 的平行线交于点 E ，连接 OE 交 AD 于点 F .



(1) 求证：四边形 $OCED$ 是菱形；

(2) 若 $AC = 8$, $\angle DOC = 60^\circ$ ，求菱形 $OCED$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $8\sqrt{3}$

【解析】



【分析】(1) 先证四边形 $DECO$ 是平行四边形，再由矩形的性质得 $OD=OC$ ，即可得出结论；

(2) 利用矩形性质，得 $OD=OC=4$ ，再判定 $\triangle OCD$ 是等边三角形，得 $CD=4$ ，再由菱形的性质得 $CD \perp OE$, $CF = \frac{1}{2} CD = 2$ ，然后由勾股定理 OF 长，即可求得 OE 长，最后由菱形面积公式求解即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because CE \parallel BD, DE \parallel AC,$

\therefore 四边形 $DECO$ 是平行四边形，

\because 矩形 $ABCD,$

$\therefore OC = OD,$

\therefore 四边形 $OCED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解： \because 矩形 $ABCD,$

$\therefore OD = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$

$\because \angle DOC = 60^\circ,$

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形，

$\therefore CD = OC = 4,$

由 (1) 知：四边形 $OCED$ 是菱形，

$\therefore CF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \times 4 = 2, OE = 2OF, CD \perp OE,$

\therefore 在 $Rt\triangle OFC$ 中，由勾股定理，得

$OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$

$\therefore OE = 2OF = 4\sqrt{3},$

$\therefore S_{\text{菱形} OCED} = \frac{1}{2} CD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3},$

答：菱形 $OCED$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查矩形的性质，菱形的判定与性质，平行四边形的判定，勾股定理，熟练掌握矩形的性质、菱形的判定与性质、平行四边形的判定是解题的关键。

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与直线 $y = x$ 平行，且过点 $(2, 1)$ 。

(1) 求这个一次函数的解析式；

(2) 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 分别交 x, y 轴于点 A, B ，若点 C 为 x 轴上一点，且 $S_{\triangle ABC} = 2$ ，直接写出点 C 的坐标。

【答案】(1) $y = x - 1$

(2) $(5, 0)$ 或 $(-3, 0)$

【解析】

【分析】(1)首先根据直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与直线 $y = x$ 平行, 可求得 $k=1$, 再把点 $(2,1)$ 代入解析式, 即可求得 b , 据此即可求得解析式;

(2)首先可求得 A 、 B 的坐标, 设点 C 的坐标为 $(x,0)$, 可得 $AC=|1-x|$, 再根据三角形的面积公式列出方程, 解方程即可求得.

【小问 1 详解】

解: \because 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与直线 $y = x$ 平行

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore \text{直线为 } y = x + b$$

把点 $(2,1)$ 代入解析式, 得 $2 + b = 1$

解得 $b = -1$

故这个一次函数的解析式为 $y = x - 1$;

【小问 2 详解】

解: 在 $y = x - 1$ 中,

令 $y = 0$, 则 $x = 1$, 故 $A(1,0)$

令 $x = 0$, 则 $y = -1$, 故 $B(0,-1)$, $OB = 1$

设点 C 的坐标为 $(x,0)$, 则 $AC = |1-x|$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OB = 2$$

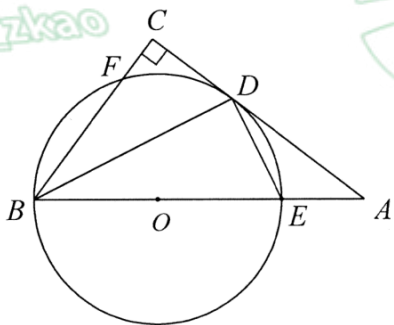
$$\therefore |1-x| = 4$$

解得 $x = 5$ 或 $x = -3$

故点 C 的坐标为 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$.

【点睛】本题考查了利用待定系数法求一次函数的解析式, 求直线与坐标轴的交点坐标, 三角形面积公式, 解绝对值方程, 根据三角形面积公式得到绝对值方程是解决本题的关键.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BC , AC 与 $\odot O$ 交于点 F , D , BE 为 $\odot O$ 直径, 点 E 在 AB 上, 连接 BD , DE , $\angle ADE = \angle DBE$.



(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\sin A = \frac{3}{5}$, $\odot O$ 的半径为 3, 求 BC 的长.

【答案】(1) 过程见详解



【分析】(1) 连接 OD , $OD=OB=OE$, 即有 $\angle OBD=\angle ODB$, $\angle ODE=\angle OED$, 再根据 BE 是直径, 得到 $\angle BDE=90^\circ=\angle DBE+\angle DEB=\angle ODB+\angle ODE$, 即有 $\angle DBE+\angle ODE=90^\circ$, 再根据 $\angle ADE=\angle DBE$, 有 $\angle ADE+\angle ODE=90^\circ$, 即有 $OD\perp AC$, 则结论得证;

(2) 先证 $OD\parallel BC$, 则有 $\frac{BC}{OD}=\frac{AB}{OA}$, 利用 $\sin A=\frac{OD}{OA}=\frac{3}{5}$ 可求出 OA , 即可求出 BC 的值.

【小问 1 详解】

连接 OD , 如图,

$\because OD=OB=OE$,

$\therefore \angle OBD=\angle ODB, \angle ODE=\angle OED$,

$\because BE$ 是直径,

$\therefore \angle BDE=90^\circ=\angle DBE+\angle DEB=\angle ODB+\angle ODE$,

$\therefore \angle DBE+\angle ODE=90^\circ$,

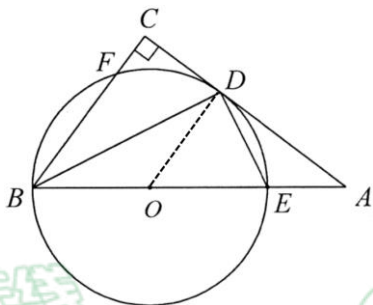
$\because \angle ADE=\angle DBE$,

$\therefore \angle ADE+\angle ODE=90^\circ$,

$\therefore OD\perp AC$,

$\because OD$ 为半径,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线;



【小问 2 详解】

根据(1)的结论, 有 $OD\perp AC$,

$\because \angle C=90^\circ$,

$\therefore BC\perp AC$,

$\therefore OD\parallel BC$,

$\therefore \frac{BC}{OD}=\frac{AB}{OA}$,

\because 在 $Rt\triangle ADO$ 中, $\sin A=\frac{OD}{OA}=\frac{3}{5}$,

又 $\because OD=OB=3$,

$\therefore OA=5$,

$\therefore AB=OA+OB=8$,

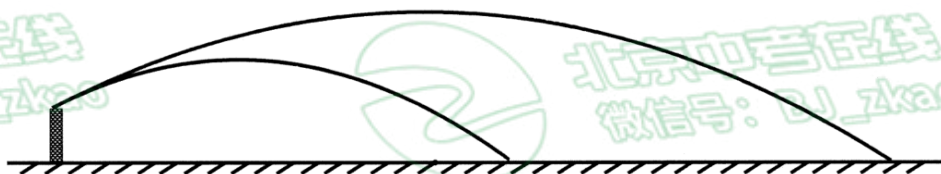
$$\frac{BC}{OD} = \frac{AB}{OA},$$

$$\therefore BC = \frac{AB}{OA} \times OD = \frac{8}{5} \times 3 = \frac{24}{5}.$$

即 BC 为 $\frac{24}{5}$.

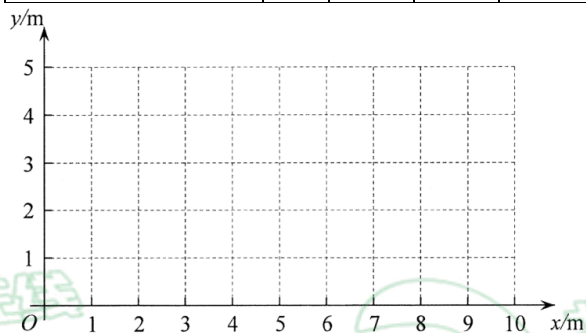
【点睛】本题考查了切线的判定与性质、直径作对圆周角为 90° 、平行的性质、勾股定理、三角函数等知识，证明切线是解答本题的关键。

24. 如图，在一次学校组织的社会实践活动中，小龙看到农田上安装了很多灌溉喷枪，喷枪喷出的水流轨迹是抛物线，他发现这种喷枪射程是可调节的，且喷射的水流越高射程越远，于是他从该农田的技术部门得到了这种喷枪的一个数据表，水流的最高点与喷枪的水平距离记为 x ，水流的最高点到地面的距离记为 y 。



y 与 x 的几组对应值如下表：

x (单位: m)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	...
y (单位: m)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	2	...



(1) 该喷枪的出水口到地面的距离为 _____ m；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点，并画出 y 与 x 的函数图像；

(3) 结合 (2) 中的图像，估算当水流的最高点与喷枪的水平距离为 8m 时，水流的最高点到地面的距离为 _____ m (精确到 1m)。根据估算结果，计算此时水流的射程约为 _____ m (精确到 1m)

【答案】(1) 1 (2) 见解析

(3) 3, 18

【解析】

【分析】(1) 令 $x=0$ 时，求得 y 值即可。

(2) 按照描点，连线的基本步骤画函数图像即可。

(3)先确定直线 $y=kx+b$ ，当 $x=8$ 时，求得 $y=3$ ，设抛物线解析式为 $y=a(x-8)^2+3$ ，把 $(0, 1)$ 代入解析式，确定 $a=$

得到抛物线解析式，令 $y=0$ ，求得 x 的值即可。

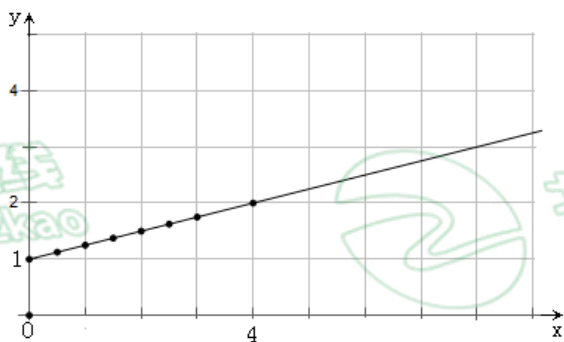
【小问 1 详解】

令 $x=0$ 时，得 $y=1$ ，

故答案为：1.

【小问 2 详解】

根据题意，画图如下：



【小问 3 详解】

设直线为 $y=kx+b$ ，根据题意，得

$$\begin{cases} b=1 \\ 4k+b=2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{4}, \\ b=1 \end{cases}$$

故直线的解析式为 $y=\frac{1}{4}x+1$ ，

当 $x=8$ 时，

$$\text{得 } y=\frac{1}{4}\times 8+1=3(m),$$

故抛物线的顶点坐标为 $(8, 3)$ ，

设抛物线解析式为 $y=a(x-8)^2+3$ ，

把 $(0, 1)$ 代入解析式，

$$\text{解得 } a=-\frac{1}{32},$$

$$\therefore y=-\frac{1}{32}(x-8)^2+3,$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } -\frac{1}{32}(x-8)^2+3=0,$$

$$\text{解得 } x=8+4\sqrt{6}, \text{ 或 } x=8-4\sqrt{6} \text{ (舍去),}$$

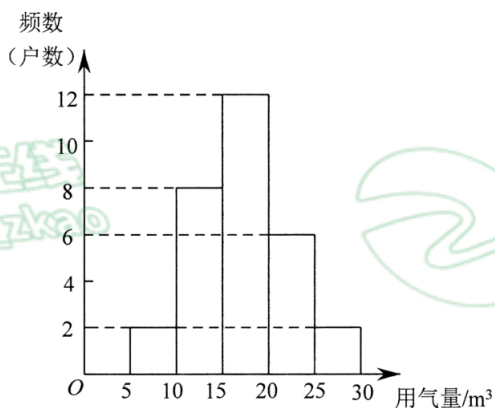
【解答】 $x = 8 + 4\sqrt{6} \approx 17.79 \approx 18(m)$,

故答案为：3，18.

【点睛】本题考查了一次函数图像的画法，待定系数法确定一次函数的解析式，顶点式确定抛物线的解析式，一元二次方程的解法，熟练掌握待定系数法，选择顶点式确定二次函数的解析式是解题的关键.

25. 甲、乙两个小区各有 300 户居民，为了解两个小区 3 月份用户使用燃气量情况，小明和小丽分别从中随机抽取 30 户进行调查，并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 甲小区用气量频数分布直方图如下（数据分成 5 组： $5 \leq x < 10$ ， $10 \leq x < 15$ ， $15 \leq x < 20$ ， $20 \leq x < 25$ ， $25 \leq x < 30$ ）



b. 甲小区用气量的数据在 $15 \leq x < 20$ 这一组的是：

15 15 16 16 16 16 16 18 18 18 18 18 18 19

c. 甲、乙两小区用气量的平均数、中位数、众数如下：

小区	平均数	中位数	众数
甲	17.2	m	18
乙	17.7	19	15

根据以上信息，回答下列问题：

- 写出表中 m 的值；
- 在甲小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_1 . 在乙小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_2 . 比较 p_1 ， p_2 的大小，并说明理由；
- 估计甲小区中用气量超过 15 立方米的户数.

【答案】（1）16； （2） $p_1 < p_2$ ；

（3）200 户.

【解析】

【分析】（1）利用求中位数的方法求解即可；

（2）利用中位数和平均数的意义求解即可；

（3）根据抽取的 30 户中用气量超过 15 立方米的户数所占的比例估算出整体户数.

【小问 1 详解】

解：由题意可知：

$$m = \frac{12+6}{2} = 16;$$

【小问 2 详解】

解：由表可知：

甲，乙两小区用气量的中位数分别是 16、19，平均数分别为：17.2、17.7，

$$\therefore p_1 < 15, p_2 > 15,$$

$$\therefore p_1 < p_2;$$

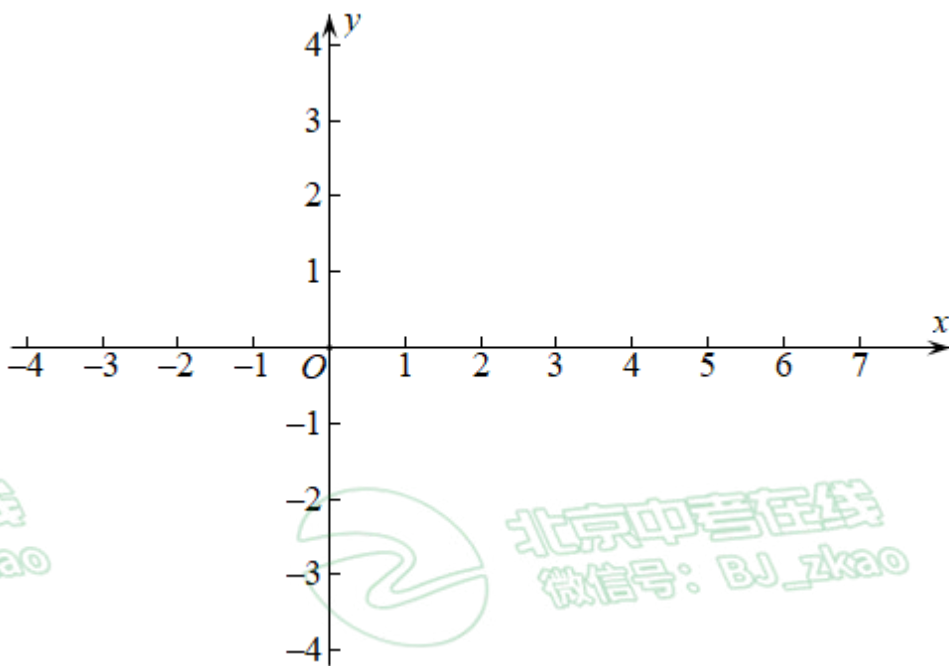
【小问 3 详解】

解：抽取的甲小区 30 户中用气量超过 15 立方米的户数所占的比例为： $\frac{12+6+2}{30} = \frac{2}{3}$

甲小区中用气量超过 15 立方米的户数为： $300 \times \frac{2}{3} = 200$ 户。

【点睛】本题考查求中位数及其意义，由样本估计总体，解题的关键是理解题意，从表格获取信息，掌握求中位数及其意义，由样本估计总体。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 1 (a > 0)$ 。



(1) 若抛物线过点 $(4, -1)$ 。

①求抛物线的对称轴；

②当 $-1 < x < 0$ 时，图像在 x 轴的下方，当 $5 < x < 6$ 时，图像在 x 轴的上方，在平面直角坐标系中画出符合条件的图像，求出这个抛物线的表达式；

(2) 若 $(-4, y_1)$ ， $(-2, y_2)$ ， $(1, y_3)$ 为抛物线上的三点且 $y_3 > y_1 > y_2$ ，设抛物线的对称轴为直线 $x = t$ ，直接写出 t 的取值范围。

【答案】 (1) ① $x=2$ ； ② $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$



$$-2 < t < -\frac{1}{2}$$

【分析】①把(4, -1)代入解析式，确定 $b=-4a$ ，代入直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 计算即可。

②根据对称轴为直线 $x=2$ ，且 $2-(-1)=5-2$ ，判定抛物线经过 $(-1,0)$ 和 $(5,0)$ ，代入解析式确定 a, b 的值即可。

(2) 根据 $x=-\frac{b}{2a}=t$ ，得到 $b=-2at$ ，从而解析式变形为 $y=ax^2-2atx-1(a>0)$ ，把 $(-4, y_1)$ ， $(-2, y_2)$ ，

$(1, y_3)$ 分别代入解析式，根据 $y_3 > y_1 > y_2$ ，列出不等式组，解不等式组即可。

【小问 1 详解】

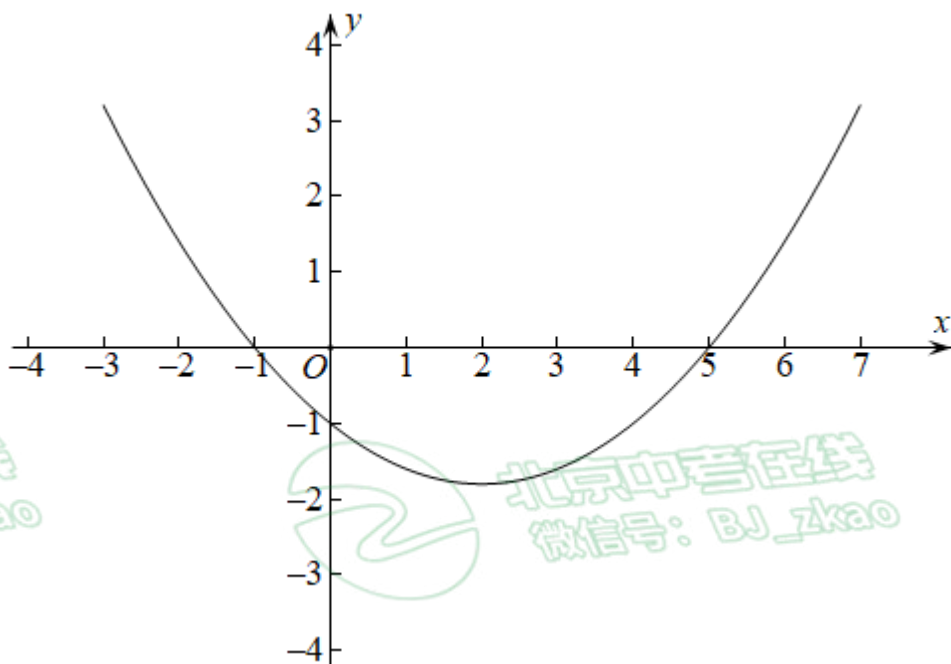
解：①把(4, -1)代入解析式 $y=ax^2+bx-1(a>0)$ ，得

$$-1=16a+4b-1,$$

解得 $b=-4a$ ，

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4a}{2a}=2.$$

②根据题意，画图像如下：




\therefore 当 $-1 < x < 0$ 时，图像在 x 轴 下方，

当 $5 < x < 6$ 时，图像在 x 轴的上方，

对称轴为直线 $x=2$ ，且 $2-(-1)=5-2$ ，

\therefore 抛物线经过 $(-1,0)$ 和 $(5,0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} a-b-1=0 \\ 25a+5b-1=0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = \frac{1}{5}, \\ b = -\frac{4}{5} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 1.$$

【小问2详解】

$$\because x = -\frac{b}{2a} = t,$$

$$\therefore b = -2at,$$

$$\therefore \text{解析式变形为 } y = ax^2 - 2atx - 1 (a > 0),$$

把 $(-4, y_1)$, $(-2, y_2)$, $(1, y_3)$ 分别代入解析式, 得 $y_3 = a - 2at - 1$, $y_1 = 16a + 8at - 1$, $y_2 = 4a + 4at - 1$,

$$\because y_3 > y_1 > y_2,$$

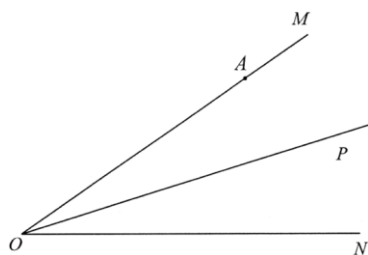
$$\therefore \begin{cases} a - 2at - 1 > 16a + 8at - 1 \\ a - 2at - 1 > 4a + 4at - 1 \\ 16a + 8at - 1 > 4a + 4at - 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} t < -\frac{3}{2} \\ t < -\frac{1}{2} \\ t > -3 \end{cases},$$

故 t 的取值范围是 $-3 < t < -\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了待定系数法, 抛物线的对称性, 二次函数与不等式的综合, 熟练掌握待定系数法, 对称性, 与不等式的关系是解题的关键.

27. 如图, 已知 $\angle MON = \alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, OP 是 $\angle MON$ 的平分线, 点 A 是射线 OM 上一点, 点 A 关于 OP 对称点 B 在射线 ON 上, 连接 AB 交 OP 于点 C , 过点 A 作 ON 的垂线, 分别交 OP , ON 于点 D , E , 作 $\angle OAE$ 的平分线 AQ , 射线 AQ 与 OP , ON 分别交于点 F , G .



(1) ①依题意补全图形;

②求 $\angle BAE$ 度数: (用含 α 的式子表示)

(2) 写出一个 α 的值, 使得对于射线 OM 上任意的点 A 总有 $OD = \sqrt{2}AF$ (点 A 不与点 O 重合), 并证明.



【答案】(1) 见解析, $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$;

(2) $\alpha = 45^\circ$, 证明见解析.

【解析】

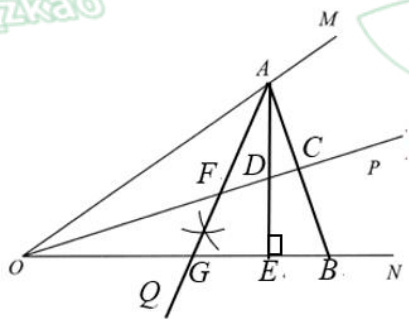
【分析】(1) ①在 ON 上取 $OB = OA$, 根据垂线, 角平分线的画法作图即可; ②求出 $\angle COB = \frac{\alpha}{2}$, 再证明

$\angle BAE = \angle COB = \frac{\alpha}{2}$ 即可;

(2) 证明 $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形, 再证明 $\triangle ODE \cong \triangle ABE (ASA)$, 得到 $OD = AB$, 进一步得到 $OD = AB = 2AC$, 证明 $\triangle FAC$ 为等腰直角三角形, 得到 $AF = \sqrt{2}AC$, 即可得到 $OD = \sqrt{2}AF$.

【小问 1 详解】

解: ①作图如下:



② $\because \angle MON = \alpha$, OP 是 $\angle MON$ 的平分线,

$\therefore \angle COB = \frac{\alpha}{2}$,

\because 点 A, B 关于 OP 对称,

$\therefore OB = OA$,

$\therefore OC \perp AB$, 即 $\angle OCB = 90^\circ$,

$\because AE \perp OB$,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$\because \angle OBC = \angle ABE$,

$\therefore \angle BAE = \angle COB = \frac{\alpha}{2}$,

【小问 2 详解】

解: 当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 对任意的点 A 总有 $OD = \sqrt{2}AF$,

理由如下:

$\because A, B$ 关于 OP 对称, 且 OP 平分 $\angle MON$,

$\therefore OP$ 垂直平分 AB , 即 $OP \perp AB$, $AB = 2AC$,

$\because \angle MON = 45^\circ$, $AE \perp OB$,

$\therefore \triangle AOE$ 为等腰直角三角形,

$$AE = OE,$$

由已知: $\angle BAE = \angle COB = \frac{\alpha}{2} = 22.5^\circ$, 即 $\angle BAE = \angle DOE$,

$\therefore OP \perp AB, AE \perp OB$,

$\therefore \angle AEB = \angle OED$,

在 $\triangle ODE$ 和 $\triangle ABE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DOE \\ AE = OE \\ \angle AEB = \angle OED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle ABE (ASA)$,

$\therefore OD = AB$,

$\therefore AB = 2AC$,

$\therefore OD = AB = 2AC$,

$\therefore AQ$ 平分 $\angle OAE$, $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle FAD = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle FAC = 45^\circ$,

$\therefore OP \perp AB$,

$\therefore \triangle FAC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AF = \sqrt{2}AC$,

$\therefore OD = AB = 2AC$,

$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2}OD$,

即 $OD = \sqrt{2}AF$.

【点睛】 本题考查作图, 角平分线, 等腰直角三角形, 三角形全等的判定及性质, 解题的关键是掌握角平分线的作法及性质, 垂线的作法, 等腰直角三角形的判定, 三角形全等的判定及性质.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, 对于 $\triangle ABC$ 和直线 l 给出如下定义: 若 $\triangle ABC$ 的一条边关于直线 l 的对称线段 PQ 是 $\odot O$ 的弦, 则称 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关于直线 l 的“关联三角形”, 直线 l 是“关联轴”.

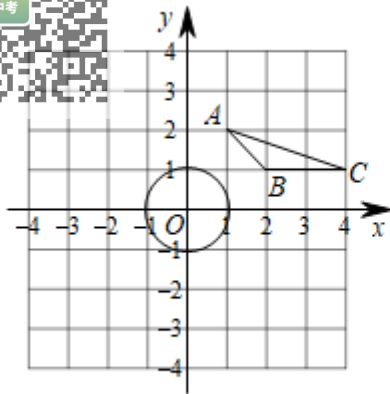
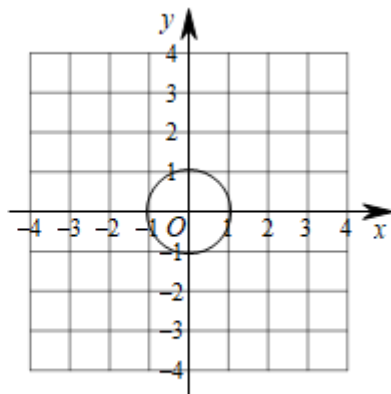


图1



备用图

(1) 如图1, 若 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关于直线 l 的“关联三角形”, 请画出 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的“关联轴”(至少画两条);

(2) 若 $\triangle ABC$ 中, 点A坐标为(2,3), 点B坐标为(4,1), 点C在直线 $y = -x + 3$ 的图像上, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形, 求点C横坐标的取值范围;

(3) 已知 $A(\sqrt{3}, 1)$, 将点A向上平移2个单位得到点M, 以M为圆心MA为半径画圆, B, C为 $\odot M$ 上的两点, 且 $AB = 2$ (点B在点A右侧), 若 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的关联轴至少有两, 直接写出OC的最小值和最大值, 以及OC最大时AC的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $0 \leq x_C \leq 4$

(3) $2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{7}, 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据A(1, 2), B(2, 1), C(4, 1), 计算 $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$,

确定圆O长为 $\sqrt{2}$ 的弦, 再确定其对称轴即可.

(2) 根据A(2, 3), B(4, 1), 计算 $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2} > 2$, 故AB不能落在圆的内部; 过点A作 $AN \perp y$ 轴, 垂足为N, 则 $AN = 2$, 等于圆的直径, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形, 此时 $x_C = 0$; 作点B关于x轴的对称点P, 此时 $BP = 2$, 等于圆的直径, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形, 此时 $x_C = 4$, 综上所述, 点C横坐标的范围是 $0 \leq x_C \leq 4$.

(3) 如图, 连接OM, 交圆M于点C, 此时OC最小, 根据勾股定理, 得 $OM = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$, 圆M的半径为2, 计算OC的最小值; $OC = \sqrt{(3+2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$, 此时 $AC = 4$.

【小问1详解】

如图1, 作 $BM \perp x$ 轴, 垂足为M, 根据题意 $AB = AE = EF = BF = \sqrt{2}$, 且 $\angle EFO = \angle BFM = 45^\circ$,

$\therefore \angle EFB = 90^\circ$,

\therefore 四边形ABFE是正方形,

\therefore 边AE, BF的中点所在直线就是 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的一条“关联轴”;

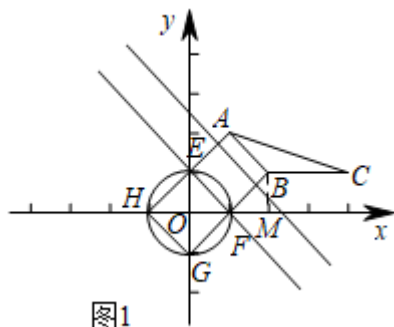
$\because \odot O$ 的半径为1,

$\therefore EH = GH = FG = EF = \sqrt{2}$, 且 $\angle EFG = 90^\circ$,



∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$$\angle AFC + \angle EFB = 180^\circ,$$



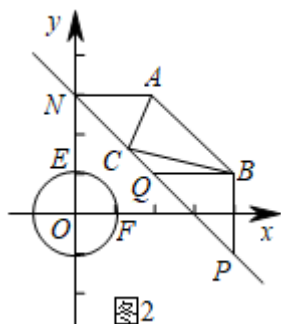
∴ B, F, G 三点共线,

∴ 直线 EF 是 $\triangle ABC$ 与 $\odot O$ 的一条“关联轴”.

【小问 2 详解】

如图 2, 根据 $A(2, 3), B(4, 1), C(4, 1)$, 计算 $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2} > 2$, 故 AB 不能落在圆的内部;

过点 A 作 $AN \perp y$ 轴, 垂足为 N , 则 $AN=2$, 等于圆的直径, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形,



此时 $x_C = 0$;

作点 B 关于 x 轴的对称点 P , 此时 $BP=2$, 等于圆的直径, 存在“关联轴 l ”使 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关联三角形, 此时 $x_C = 4$, 综上所述, 点 C 横坐标的范围是 $0 \leq x_C \leq 4$.

【小问 3 详解】

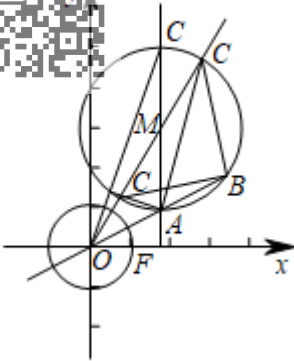
如图, 连接 OM , 交圆 M 于点 C , 此时 OC 最小,

根据勾股定理, 得 $OM = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$, 圆 M 的半径为 2,

故 OC 的最小值为 $2\sqrt{3} - 2$;

当点 C 是直径 AC 的一个端点时, OC 最大, 根据勾股定理, 得

$$OC = \sqrt{(3+2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}, \text{ 此时 } AC=4.$$



【点睛】本题考查了新定义问题，轴对称的性质，圆的基本性质，勾股定理，熟练掌握圆的性质，正确理解新定义是解题的关键.

北京中考
BJ_zkao



北京中考
微信号: BJ_zkao



北京
中考

北京中考
BJ_zkao



北京中考
微信号: BJ_zkao



北京
中考