2023 北京昌平初二（上）期末

数　学

本试卷共 6 页，三道大题，28 个小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请交回答题卡。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）下列各题均有 4 个选项，其中只有一个是符合题意的

1. 36 的算术平方根是（　　）

A. ±6　　B. 6　　C. 36　　D. ±36

2. 如果分式 $\dfrac{3x}{x-2}$ 有意义，那么 x 的取值范围是（　　）

A. $x\neq3$　　B. $x\neq2$　　C. $x\neq-2$　　D. $x\neq0$

3. 北京故宫博物院建立于 1925 年 10 月 10 日，位于北京故宫紫禁城内，是一所综合性博物馆，也是中国最大的古代文化艺术博物馆．下面图片中展示的都是故宫中的藏品，其中不是轴对称图形的为（　　）


A. 白玉云纹环


B. 青玉高足杯


C. 越窑青釉双系执壶


D. 邢窑白釉瓶

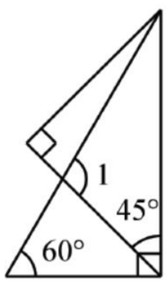
4. 一个三角形两边长分别为 4 cm 和 6 cm，第三边长可能为（　　）

A. 2 cm　　B. 4 cm　　C. 10 cm　　D. 12 cm

5. 下列根式是最简二次根式的是（　　）

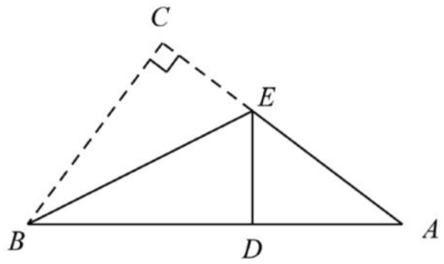
A. $\sqrt{4}$　　B. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{8}$

6. 如图，将一副三角板按如图方式摆放，那么 $\angle1$ 等于（　　）



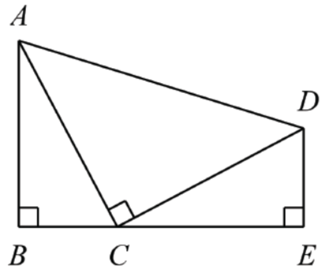
A. $45°$　　B. $75°$　　C. $105°$　　D. $120°$

7. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$．现将 $\triangle ABC$ 按如图那样折叠，使点 C 落在 AB 上的点 D 处，折痕为 BE，则 DE 的长为（　　）



A. 3　　　　B. 4　　　　C. 6　　　　D. $3\sqrt{5}$

8. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 为直角三角形，$\angle B=\angle E=90^\circ$，$AC=CD$ 且 $AC\perp CD$，则下列说法不正确的是（　　）



A. $\angle CAD=\angle CDA$　　　　B. $AD=AB+DE$

C. $\triangle ABC≌\triangle CED$　　　　D. $\angle BAC+\angle CDE=90^\circ$

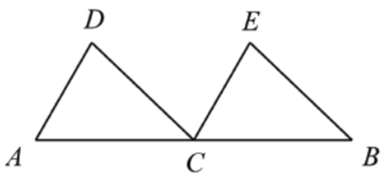
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是___.

10. 约分：（1）$\dfrac{3ab}{15a^2}=$____________；（2）$\dfrac{x-3}{x^2-9}=$____________.

11. 若等腰三角形的顶角是 80°，则它的一个底角是________°.

12. 如图，点 C 是线段 AB 的中点，$\angle DCA=\angle EBC$．请你添加一个条件，使 $\triangle DAC≌\triangle ECB$．你添加的条件是__________________．（要求：不再添加辅助线，只需填一个答案即可）



13. 若 a 和 b 为两个连续整数，且 $a<\sqrt{10}<b$，那么 $a=$___________，$b=$___________.

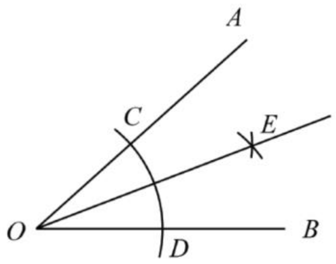
14. 为了宣传某学校初二年级学生中的优秀典型，学校团委组成了宣讲团，成员为初二年级六个班的宣传委员，包括 2 名男生和 4 名女生，利用每天的早广播时间随机抽取一名宣讲团成员作为广播员，开展主题宣传活动．

（1）“随机抽取 1 人，初二（1）班的宣传委员恰好被抽中”是________事件；

A．不可能　B．必然　C．随机

（2）广播员恰好是男生的可能性是___________.

15. 如图是用直尺和圆规作 $\angle AOB$ 的平分线，具体作法：



①以点O为圆心，任意长为半径作弧，交OA于C，交OB于D；

②分别以点C、D为圆心，以大于$\frac{1}{2}CD$ 同样长为半径作弧，两弧交于点E；

③作射线OE．

所以射线OE就是$\angle AOB$的平分线．

这种作图方法之所以正确，那是因为我们可以证明$\triangle COE \cong \triangle DOE$，其证明依据是__________．

16．第十四届国际数学教育大会（*ICME*-14）于2021年7月在中国上海举行，本次大会会徽 主题图案有着丰富的数学元素，展现了我国古代数学的文化魅力，其右下方的“卦”是用我国古代的计数符号写出的八进制数3745．八进制是以8作为进位基数的数字系统，有0~7共8个基本数字．八进制数3745换算成十进制数是$3\times 8^3+7\times 8^2+4\times 8^1+5\times 8^0=2021$，表示*ICME*-14的举办年份．

（1）八进制数3746换算成十进制数是_______；

（2）小华设计了一个n进制数2004，换算成十进制数是690，则n的值为______________．

三、解答题（本题共68分，17-22题每小题5分，23-26题每小题6分，27、28题每小题7分）

17．计算：$\sqrt{8}\times\sqrt{2}-\sqrt{24}\div\sqrt{6}$．

18．计算：$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$．

19．某学生在化简$\left(\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)\div\frac{5}{x-3}$时出现了错误，其解答过程如下：

解：原式$=\left[\frac{x+2}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}\right]\div\frac{5}{x-3}$（第一步）

$=\frac{x+2-x+3}{(x+3)(x-3)}\div\frac{5}{x-3}$（第二步）

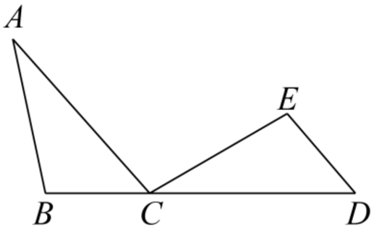
$=\frac{5}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{5}$（第三步）

$=\frac{1}{x+3}$（第四步）

（1）该生的解答过程是从第______步开始出现错误的；

（2）请你写出此题　正确解答过程.

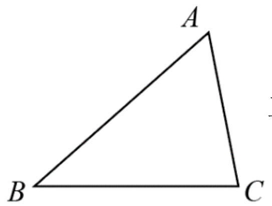
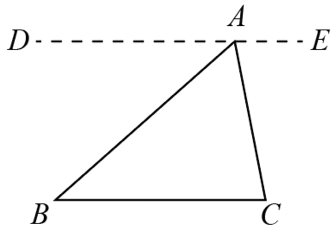
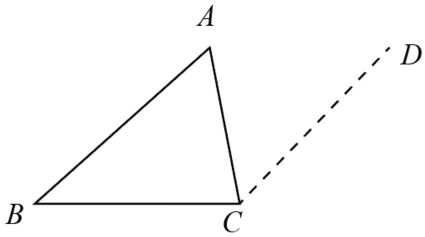
20. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，点D为BC延长线上一点，$CD=AC$，过点D作$DE // AC$，且$DE=BC$．求证：$\angle DCE=\angle A$．



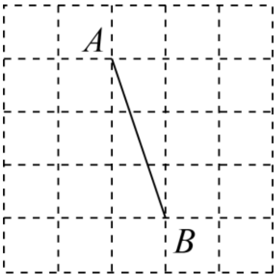
21. 解方程：$\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}=1$

22. 先化简，再求值：$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)-\dfrac{a}{a+4}\div\dfrac{a^2}{a^2+8a+16}$，其中$a=\sqrt{3}$．

23. 下面是证明三角形内角和定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明．

<table>
<tr><td colspan="2">
三角形内角和定理：三角形三个内角和等于 180°，
已知：如图，ΔABC，
求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.</td></tr>
<tr><td>方法一
证明：如图，过点A作$DE//BC$.
</td><td>方法二
证明：如图，过点C作$CD//AB$.
</td></tr>
</table>

24. 如图所示的正方形网格中（每个小正方形边长为 1），网格线的交点称为格点，已知点A、B在格点上．



（1） AB 的长为__________；

（2）在网格中找到一个格点 C，使 $\triangle ABC$ 是直角三角形，三边边长互不相等且都是无理数，在网格中画出 $\triangle ABC$ 并求出它的面积.

25. 2022 年北京中考体育考试进行改革，现初二、初一考生，中考体育分数 50 分，包含过程性考核．八年级第一学期体质健康测试以及八年级第二学期的体育与健康知识考核，共计 20 分．为了提高学生体育锻炼的意识和能力、丰富学生体育锻炼的内容，学校准备购买一批体育用品．在购买跳绳时，甲种跳绳比乙种跳绳的单价低 5 元，用 2250 元购买甲种跳绳与用 3000 元购买乙种跳绳的数量相同，求甲、乙两种跳绳的单价各是多少元？

26. 若两条线段将一个三角形分割成三个等腰三角形，则这两条线段称为这个三角形的三分线.

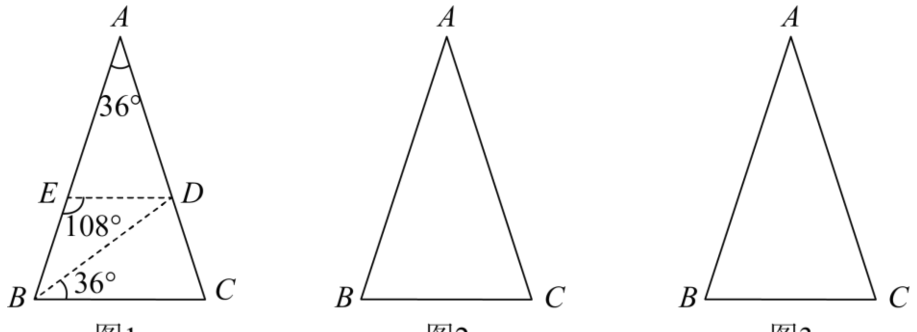
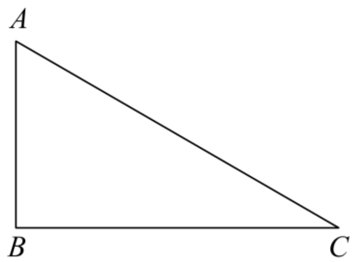


图1　　图2　　图3

（1）如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，图 1 中 BD，DE 将 $\triangle ABC$ 分成了三个等腰三角形，所以 BD，DE 是 $\triangle ABC$ 的三分线．请在图 2 和图 3 中分别画出两条三分线，并标出每个等腰三角形顶角的度数（画出两种不同的分法）.

（2）如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle A=60°$，请在图中画出两条三分线，并标出每个等腰三角形顶角的度数（画出一种分法即可）.



27. 在等边 $\triangle ABC$ 中，点 P, Q 是 BC 边上的两个动点（不与 B, C 重合），点 P 在点 Q 的左侧，且 $AP=AQ$.

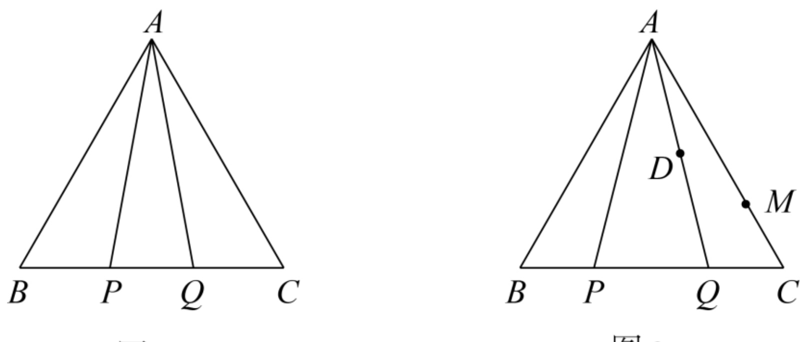


图 1　　图 2

（1）若 $\angle BAP=20°$，则 $\angle AQB=$___________°；

（2）在图 1 中，求证：$BP=CQ$；

（3）点 M 在边 AC 上，$CM=CQ$，点 D 为 AQ 的中点，连接 MD 并延长交 AB 于点 N，连接 PM，PN．

①依题意将图 2 补全；

②猜想 $\triangle PMN$ 的形状，并证明．

28. 【阅读学习】

如果平面内一点到三角形　三个顶点的距离中，最长距离的平方等于另两个距离的平方和，则称这个点为该三角形的勾股点，如图 1，平面内有一点 P 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离分别为 PA、PB、PC，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，可知 $PC^2=PA^2+PB^2$，所以点 P 就是 $\triangle ABC$ 的勾股点．

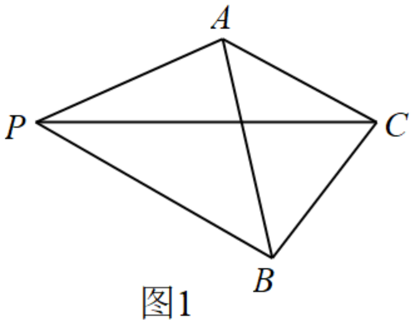


图1

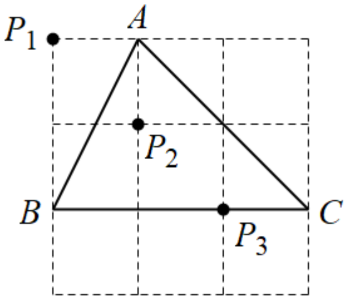


图2

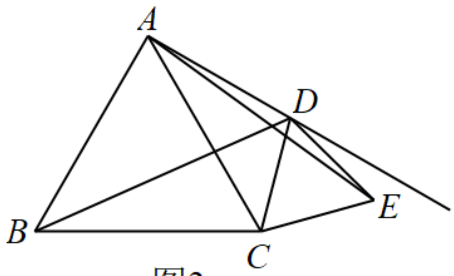


图3

（1）如图 2，在 3×3 的方格纸中，每个小正方形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 的顶点在格点（小正方形的顶点）上，P_1，P_2，P_3 三个点中，__________是 $\triangle ABC$ 的勾股点；

（2）如图 3，$\triangle ABC$ 为等边三角形，过点 A 作 AB 的垂线，点 D 在该垂线上，连接 CD，以 CD 为边在其右侧作等边 $\triangle CDE$，连接 AE，BD．

①求证：$\triangle ACE\cong\triangle BCD$；

②判断点 A 是否为 $\triangle CDE$ 的勾股点，并说明理由；

③若 $AD=\dfrac{5}{2}$，$AE=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$，直接写出等边 $\triangle CDE$ 的边长：__________．

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）下列各题均有 4 个选项，其中只有一个是符合题意的

1. 【答案】B

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义：一个非负数 x 的平方等于 a，则 x 叫做 a 的算术平方根，进行求解即可．

【详解】解：$\sqrt{36}=6$；

故选 B．

【点睛】本题考查算术平方根．熟练掌握算术平方根的定义是解题的关键．

2. 【答案】B

【解析】

【分析】分式有意义的条件是分母不为零，根据分式的分母不为 0 列出不等式，解不等式即可．

【详解】解：由题意得：$x-2\neq 0$，

解得：$x\neq 2$．

故选：B．

【点睛】本题考查的是分式有意义的条件，掌握分式的分母不为 0 是解题的关键．

3. 【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的意义：如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴；依次进行判断即可．

【详解】解：根据轴对称图形的意义可知：A、B、D 都是轴对称图形，而 C 不是轴对称图形．

故选：C．

【点睛】此题考查了轴对称图形的意义，判断轴对称图形的关键是寻找对称轴，看图形对折后两部分是否完全重合．

4. 【答案】B

【解析】

【分析】设第三边为 $x\text{cm}$，再根据三角形的三边关系求出 x 的取值范围，选出合适的 x 的值即可．

【详解】解：设第三边为 $x\text{cm}$，

∵三角形的两边长分别为 4cm 和 6cm，

∴$6-4<x<6+4$，即 $2<x<10$

∴4cm 符合题意，

故选：B．

【点睛】本题考查的是三角形的三边关系，熟知三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边是解答此题的关键．

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义以及二次根式的化简进行判断即可.

【详解】解：A、$\sqrt{4}=2$，所以$\sqrt{4}$不是最简二次根式，所以选项A不符合题意；

B、$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\sqrt{\frac{1}{3}}$不是最简二次根式，所以选项B不符合题意；

C、$\sqrt{5}$是最简二次根式，所以选项C符合题意；

D、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，所以$\sqrt{8}$不是最简二次根式，所以选项D不符合题意

故选：C.

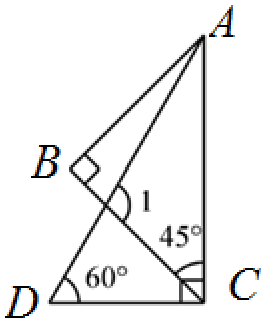
【点睛】本题考查最简二次根式，理解最简二次根式的定义是正确解答的前提.

6. 【答案】C

【解析】

【分析】由三角形的内角和为$180°$即可得出$\angle 1+\angle CAD+\angle ACB=180°$结合$\angle ACB=45°$，$\angle CAD=30°$，即可求出$\angle 1$的度数.

【详解】解：给图标上字母，如图所示，



$\because \angle 1+\angle CAD+\angle ACB=180°$，$\angle ACB=45°$，$\angle CAD=30°$，

$\therefore \angle 1=180°-\angle CAD-\angle ACB=180°-30°-45°=105°$，

故选：C.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，解题的关键是利用三角形的内角和为$180°$求出$\angle 1$的度数.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】首先利用勾股定理求出AB，进一步可得AD，设$DE=x$，则$CE=x$，$AE=8-x$，在$\text{Rt}\triangle ADE$中，由勾股定理得，$AD^2+DE^2=AE^2$，列出解方程求解即可得出答案.

【详解】解：在$\text{Rt}\triangle ABC$中，由勾股定理得，$AB=10$，

$\because$将$\triangle ABC$沿BE折叠，点C与点D重合，

$\therefore BC=BD=6$，$CE=DE$，

$\therefore AD=AB-BD=4$

设$DE=x$，

则 $CE=x$， $AE=8-x$，

在 $Rt\triangle ADE$ 中，由勾股定理得， $AD^2+DE^2=AE^2$，即 $4^2+x^2=(8-x)^2$

解得 $x=3$，

∴ $DE=3$，

故选：A．

【点睛】本题主要考查了翻折变换，勾股定理等知识，熟练掌握勾股定理是解题的关键．

8. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等边对等角可证得 $\angle CAD=\angle CDA$，在利用同角的余角相等，可得 $\angle BAC=\angle ECD$，进而证明 $\triangle ABC\cong\triangle CED$，便可判断其余选项．

【详解】解：∵ $AC=CD$

∴ $\angle CAD=\angle CDA$

故 A 正确，

∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 为直角三角形

∴ $\angle B=\angle E=90^\circ$，

∴ $\angle BAC+\angle ACB=90^\circ$，

又∵ $AC\perp CD$

∴ $\angle ACB+\angle ECD=90^\circ$

∴ $\angle BAC=\angle ECD$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle CED$ （AAS）

∴ $AB=CE$， $BC=DE$

∴ $AB+DE=BC+CE=BE\neq AD$

故 B 错误，C 正确，

由 $\triangle ABC\cong\triangle CED$ 可知： $\angle ACB=\angle CDE$

∴ $\angle BAC+\angle CDE=90^\circ$，

故 D 正确，

故选：B．

【点睛】本题考查等腰三角形的性质及全等三角形的证明，熟练掌握证明三角形全等的条件是解题的关键．

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 【答案】$x\geq 2$

【解析】

【详解】解：根据题意，使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，即 $x-2\geq0$，

解得：$x\geq2$．

故答案为：$x≥2$．

【点睛】本题主要考查使二次根式有意义的条件，理解二次根式有意义的条件是解题关键．

10. 【答案】 ①. $\frac{b}{5a}$ ②. $\frac{1}{x+3}$

【解析】

【分析】（1）找到分子和分母的最大公因式，利用分式的基本性质进行约分即可；

（2）把分母进行因式分解后，利用分式的基本性质进行约分即可．

【详解】（1）解：$\frac{3ab}{15a^2}=\frac{3a•b}{3a•5a}=\frac{b}{5a}$，

故答案 ：$\frac{b}{5a}$

（2）$\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+3}$，

故答案为：$\frac{1}{x+3}$

【点睛】此题考查了约分，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键．

11. 【答案】50

【解析】

【分析】由已知顶角为80°，根据等腰三角形的两底角相等的性质及三角形内角和定理，即可求出它的一个底角的值．

【详解】解：∵等腰三角形的顶角为80°，

∴它的一个底角为(180°−80°)÷2=50°．

故填50．

【点睛】此题主要考查了等腰三角形的性质及三角形内角和定理．通过三角形内角和，列出方程求解是正确解答本题的关键．

12. 【答案】$DC=EB$（答案不唯一）

【解析】

【分析】由已知条件可知：$\angle DCA=\angle EBC$，$AC=CB$，再添加$DC=EB$，根据SAS判定$\triangle DAC\cong\triangle ECB$．

【详解】解：添加条件：$DC=EB$；

证明：∵点C是线段AB的中点，

∴$AC=CB$．

在$\triangle DAC$和$\triangle ECB$中，

$$\begin{cases}DC=EB\\ \angle DCA=\angle EBC\\ AC=CB\end{cases},$$

$\therefore \triangle DAC \cong \triangle ECB$（SAS）.

故答案为：$DC = EB$（答案不唯一）.

【点睛】本题是开放性题目，考查了全等三角形的判定；添加条件不唯一；熟练掌握全等三角形的判定方法是解题的关键.

13. 【答案】　①. 3　②. 4

【解析】

【分析】根据$3 < \sqrt{10} < 4$，可得：a，b的值，进而即可求解.

【详解】$\because 3 < \sqrt{10} < 4$，

又a，b为两个连续整数，$a < \sqrt{10} < b$，

$\therefore a=3$，$b = 4$

故答案为：3；4.

【点睛】本题主要考查算术平方根的估算，掌握算术平方根的意义，是解题的关键.

14. 【答案】　①. C　②. $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】(1）根据事件的分类进行解答即可；

（2）根据总共有 6 人，男生有 2 人，即可得到答案.

【详解】解：(1）“随机抽取 1 人，初二（1）班的宣传委员恰好被抽中”是随机事件，

故选：C

（2）总共有 6 人，男生有 2 人，

∴广播员恰好是男生的可能性是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$

【点睛】此题考查了随机事件和可能性大小的判断，熟练掌握事件的相关知识是解题的关键.

15. 【答案】SSS

【解析】

【分析】由作法可知：$OC = OD$，$CE = DE$，根据全等三角形的判定定理判断即可.

【详解】解：由作法可知：$OC = OD$，$CE = DE$，

又$\because OE = OE$，

∴根据 SSS 可推出$\triangle COE \cong \triangle DOE$全等，

故答案为：SSS

【点睛】本题考查了全等三角形的判定定理的应用，注意：全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS.

16. 【答案】　①. 2022　②. 7

【解析】

【分析】（1）根据题意，从个位数字起，将二进制的每一位数分别乘以8^0，8^1，8^2，8^3，再把所得的结果相加即可；

（2）根据n进制数和十进制数的计算方法得到关于n的方程，解方程即可．

【详解】解：（1）$3746=3\times8^3+7\times8^2+4\times8^1+6\times8^0$

$=1536+448+32+6$

$=2022$．

（2）依题意得：$2\times n^3+0\times n^2+0\times n^1+4\times n^0=690$

解得：$n=7$

故答案为：7．

【点睛】本题考查有理数的混合运算，解题关键是根据题意找到进制转化的方法．

三、解答题（本题共68分，17-22题每小题5分，23-26题每小题6分，27、28题每小题7分）

17．【答案】2

【解析】

【分析】根据二次根式混合运算顺序进行计算即可得到答案．

【详解】解：$\sqrt{8}\times\sqrt{2}-\sqrt{24}\div\sqrt{6}$

$=4-2\sqrt{6}\div\sqrt{6}$

$=4-2$

$=2$

【点睛】此题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键．

18．【答案】6

【解析】

【分析】直接利用二次根式的性质和平方差公式化简，进而得出答案．

【详解】解：$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$=5+2-1$

$=6$．

【点睛】此题主要考查了二次根式的混合运算，正确化简二次根式是解题关键．

19．【答案】（1）二　　（2）$-\dfrac{1}{5\left(x+3\right)}$

【解析】

【分析】（1）利用分式加减运算法则判断得出答案；

（2）直接利用分式的混合运算法则计算得出答案．

【小问1详解】

解：①该学生解答过程从第二步开始出错，其错误原因是分子相加减时是整体相加减，需要加括号．

故答案为：二；

【小问 2 详解】

解：$\left(\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)\div\frac{5}{x-3}$

$=\left[\frac{x+2}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}\right]\div\frac{5}{x-3}$

$=\frac{x+2-(x+3)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{5}{x-3}$

$=\frac{-1}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{5}$

$=-\frac{1}{5(x+3)}$.

【点睛】本题考查的是分式的混合运算，掌握分式的运算法则是解题的关键.

20. 【答案】见解析

【解析】

【分析】由 $DE \parallel AC$ 得到 $\angle ACB=\angle CDE$，再由 $CD=AC$，$DE=BC$ 即可证明 $\triangle ABC\cong\triangle CED(\mathrm{SAS})$，即可得到结论.

【详解】证明：$\because DE \parallel AC$，

$\therefore \angle ACB=\angle CDE$，

$\because CD=AC$，$DE=BC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CED(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle DCE=\angle A$.

【点睛】此题考查了三角形全等的判定和性质，熟练掌握三角形全等的判定是解题的关键.

21. 【答案】$x=-3$

【解析】

【分析】先去分母，然后再进行求解即可.

【详解】解：$\frac{2x}{x-2}-\frac{1}{2-x}=1$

$2x+1=x-2$，

解得：$x=-3$，

经检验 $x=-3$ 是方程的解，

$\therefore$原方程的解为 $x=-3$.

【点睛】本题主要考查分式方程的解法，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键.

22. 【答案】$-\frac{3}{a}$，$-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先通分算括号内的，把除化为乘，然后进行加减，化简后将$a=\sqrt{3}$代入计算即可.

【详解】解：原式$=\frac{a+1}{a}-\frac{a}{a+4}\times\frac{(a+4)^2}{a^2}$

$=\frac{a+1}{a}-\frac{a+4}{a}$

$=\frac{a+1-(a+4)}{a}$

$=\frac{a+1-a-4}{a}$

$=-\frac{3}{a}$,

当$a=\sqrt{3}$时，原式$=-\frac{3}{a}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查分式化简求值，解题的关键是掌握分式的运算法则，将所求式子化简.

23. 【答案】答案见解析

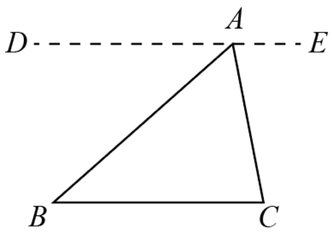
【解析】

【分析】方法一：依据平行线的性质，即可得到$\angle B=\angle BAD$，$\angle C=\angle EAC$，从而可求证三角形的内角和为$180°$.

方法二：由平行线的性质得：$\angle A=\angle ACD$，$\angle B+\angle BCD=180°$，从而可求证三角形的内角和为$180°$.

【详解】证明：

方法一：过点A作$DE // BC$，



则$\angle B=\angle BAD$，$\angle C=\angle EAC$.（ 两直线平行，内错角相等）

∵点D，A，E在同一条直线上，

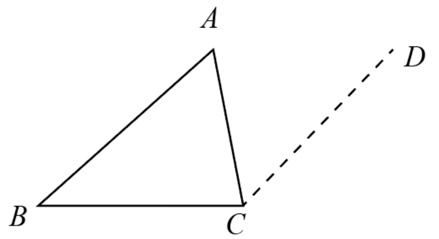
∴$\angle DAB+\angle BAC+\angle C=180°$.（平角的定义）

∴$\angle B+\angle BAC+\angle C=180°$.

即三角形的内角和为$180°$.

方法二：

如图，过点C作$CD//AB$.



∵$CD//AB$，

∴$\angle A=\angle ACD$，$\angle B+\angle BCD=180°$，

∴$\angle B+\angle ACB+\angle A=180°$.

即三角形的内角和为$180°$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及三角形内角和定理的运用，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

24. 【答案】(1) $\sqrt{10}$

（2）作图如图所示；2

【解析】

【分析】(1) 根据勾股定理即可求解；

（2）根据题意，三边互不相等，都为无理数，构成直角三角形，满足勾股定理即可求解；

【小问 1 详解】

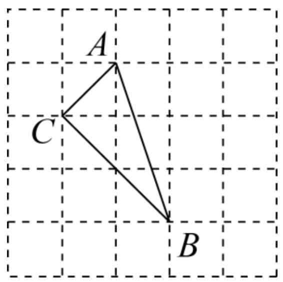
解：$\therefore AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

故答案为$\sqrt{10}$

【小问 2 详解】

解：因为直角三角形三边互不相等，三边都为无理数，所以三边分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{10}$，如图所示，

$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{8}, AB=\sqrt{10}$；



$\therefore S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{8}=2$

【点睛】本题考查了勾股定理、直角三角形、无理数，解题关键是熟练掌握勾股定理、无理数等知识。

25. 【答案】甲种跳绳的单价为 15 元，乙种跳绳的单价为 20 元.

【解析】

【分析】设甲种跳绳的单价为x元，则乙种跳绳的单价为$(x+5)$元元，由题意：用 2250 元购买甲种跳绳与用 3000 元购买乙种跳绳的数量相同，列出分式方程，解方程即可.

【详解】解：设甲种跳绳的单价是x元，则乙种跳绳的单价为$(x+5)$元，

根据题意可列方程：$\frac{2250}{x}=\frac{3000}{x+5}$

解得：$x=15$，

经检验，$x=15$是原方程的解，且符合题意，

则$x+5=20$，

答：甲种跳绳的单价为15元，乙种跳绳的单价为20元.

【点睛】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

26.【答案】（1）见解析　　（2）见解析

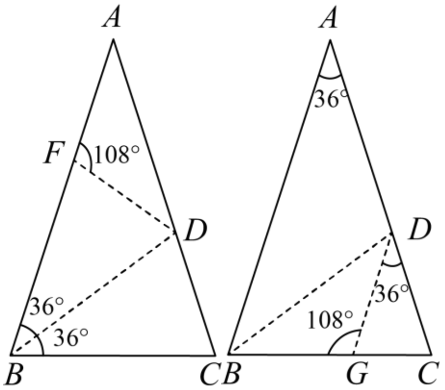
【解析】

【分析】（1）36°自然想到72°和108°等腰三角形，过底角一顶点作角平分线，发现形成两个等腰三角形顶角分别为36°和108°．根据题目中示例可以很容易看到顶角108°可以分成36°和72°，反之，将其分成72°和36°，则易得一种情况.第二种情形可以考虑下面这个顶角为36°的等腰三角形按照第一步的操作分，易得其中作为顶角为36°和108°的两个等腰三角三角形．即又一三分线作法.

（2）90°自然想到等腰直角三角形，可以将60°分成45°和15°，发现形成一个等腰直角三角形和一个含有15°和30°的钝角三角形，其钝角为135°．将135°分成15°和120°，可形成一个顶角为150°的等腰三角形和一个顶角为120°的等腰三角形，即三分线作法.

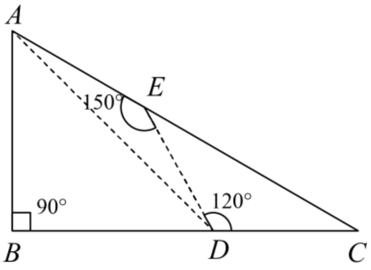
【小问1详解】

如图所示：



【小问2详解】

如图所示：



【点睛】本题考查了学生学习的理解能力及动手创新能力，知识方面重点考查三角形内角、外角间的关系及等腰三角形知识，是一道很锻炼学生能力的题目.

27. 【答案】（1）80　　（2）见解析

（3）①见解析，②$\triangle PMN$ 是等边三角形，证明见解析

【解析】

【分析】（1）由 $\triangle ABC$ 是等边三角形，得到 $\angle B=60°$，由外角的性质得到 $\angle APQ=80°$，由 $AP=AQ$，得到 $\triangle APQ$ 是等腰三角形，即可得到结论；

（2）证明 $\triangle ABQ\cong\triangle ACP\left(\mathrm{AAS}\right)$，则 $BQ=CP$， $BQ-PQ=CP-PQ$，即可得到结论；

（3）①按要求补全图形即可；②连接 MQ，先证明 $\triangle CMQ$ 是等边三角形，再证明 $\triangle AND\cong\triangle QMD\left(\mathrm{AAS}\right)$，最后证明 $\triangle AMN\cong\triangle CPM\left(\mathrm{SAS}\right)$，则 $\angle CPM+\angle CMP=180°-\angle C=120°$，得到 $\angle CMP+\angle AMN=120°$，则 $\angle PMN=180°-120°=60°$，即可得到结论．$MN=PM$

【小问 1 详解】

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=60°$，

∵ $\angle BAP=20°$，

∴ $\angle APQ=\angle B+\angle BAP=80°$，

∵ $AP=AQ$，

∴ $\triangle APQ$ 是等腰三角形，

∴ $\angle AQB=\angle APQ=80°$，

故答案为：80

【小问 2 详解】

证明：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=60°$， $AB=AC$

∵ $AP=AQ$，

∴ $\triangle APQ$ 是等腰三角形，

∴ $\angle AQB=\angle APQ$，

∴ $\triangle ABQ\cong\triangle ACP\left(\mathrm{AAS}\right)$，

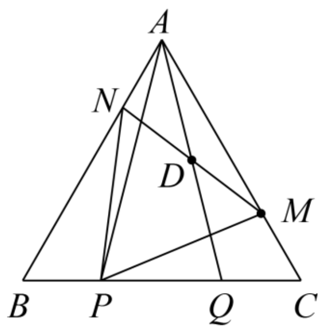
∴ $BQ=CP$，

∴ $BQ-PQ=CP-PQ$，

∴ $BP=CQ$；

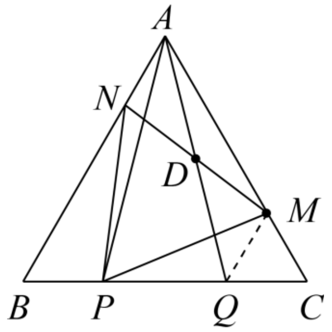
【小问 3 详解】

①将图 2 补全如图所示，



②$\triangle PMN$ 是等边三角形，

证明：连接 MQ，



$\because CM=CQ$，

$\therefore \triangle CMQ$ 是等腰三角形，

$\because \angle C=60^\circ$，

$\therefore \triangle CMQ$ 是等边三角形，

$\therefore \angle CMQ=\angle CAB=60^\circ$，

$\therefore MQ /\!/ AB$，

$\therefore \angle DQM=\angle DAN$，$\angle AND=\angle QMD$，

$\because$ 点 D 为 AQ 的中点，

$\therefore AD=QD$，

$\therefore \triangle AND \cong \triangle QMD\left(\mathrm{AAS}\right)$，

$\therefore AN=QM$，

$\because CM=QM=CQ=BP$，

$\therefore CM=AN$，

$\because AC=BC$，

$\therefore AC-CM=BC-BP$，

$\therefore AM=CP$，

$\because \angle MAN=\angle C=60^\circ$，

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle CPM\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore \angle AMN=\angle CPM$，$MN=PM$，

$\because \angle CPM + \angle CMP = 180^\circ - \angle C = 120^\circ$，

$\therefore \angle CMP + \angle AMN = 120^\circ$，

$\therefore \angle PMN = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$，

$\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形.

【点睛】此题考查了等边三角形的性质和判定、全等三角形的判定和性质等知识，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题的关键.

28. 【答案】（1） P_3；

（2）①证明见解析；② A 是 $\triangle CDE$ 勾股点，理由见解析；③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{133}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）利用勾股定理求出 P_1A^2，P_1B^2，P_1C^2，即可判断是否为 $\triangle ABC$ 的勾股点，P_2，P_3 同理；

（2）①根据等边三角形性质，利用 SAS 证明 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$；

②由 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ 得 $AE = BD$，再利用勾股定理得 $AB^2 + AD^2 = BD^2$，等量代换即可证明结论；

③ $DF \perp AD$ 于 F，利用含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理可得答案.

【小问 1 详解】

解：$\because P_1A^2 = 1$，$P_1B^2 = 4$，$P_1C^2 = 2^2 + 3^2 = 13$，

$\therefore P_1A^2 + P_1B^2 \ne P_1C^2$

故 P_1 不是 $\triangle ABC$ 的勾股点；

$\because P_2A^2 = 1$，$P_2B^2 = 2$，$P_2C^2 = 1^2 + 2^2 = 5$，

$\therefore P_2A^2 + P_2B^2 \ne P_2C^2$

故 P_2 不是 $\triangle ABC$ 的勾股点；

$\because P_3A^2 = 1^2 + 2^2 = 5$，$P_3B^2 = 4$，$P_3C^2 = 1$，

$\therefore P_3A^2 = P_3B^2 + P_3C^2$

故 P_3 不是 $\triangle ABC$ 的勾股点；

故答案为：P_3 .

【小问 2 详解】

①证明：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形

$\therefore AB = AC = BC$，$CD = CE = DE$，$\angle B = \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$

$\therefore \angle BCD = \angle ACE$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$（SAS）.

② A 是 $\triangle CDE$ 的勾股点，理由如下

$\because \triangle ACE \cong \triangle BCD$

$\therefore AE=BD$

又$\because AD\perp AB$

$\therefore AB^2+AD^2=BD^2$

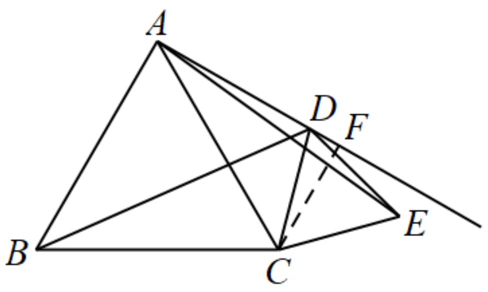
由 $AE=BD$， $AB=AC$ 得： $AC^2+AD^2=AE^2$

$\therefore$ A 是$\triangle CDE$的勾股点.

③$\because AD=\dfrac{5}{2}$， $AE=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$，且 A 为$\triangle CDE$的勾股点

$\therefore AC=\sqrt{AE^2-AD^2}=2\sqrt{3}$

①当 D 在 A 下方时，作 $DF\perp AD$ 于 F



$\because \angle BAD=90^\circ$， $\angle BAC=60^\circ$

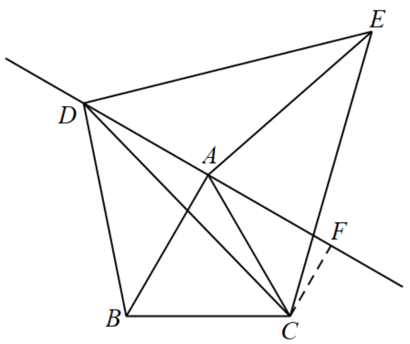
$\therefore \angle DAC=30^\circ$

$\therefore CF=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{3}$， $AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC=3$

$\therefore DF=\dfrac{1}{2}$

$\therefore CD=\sqrt{DF^2+CF^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

②当 D 在 A 上方时，作 $DF\perp AD$ 于 F



同理： $CF=\sqrt{3}$， $DF=\dfrac{11}{2}$，

$\therefore CD=\sqrt{DF^2+CF^2}=\frac{\sqrt{133}}{2}$

故等边$\triangle CDE$的边长为：$\frac{\sqrt{13}}{2}$或$\frac{\sqrt{133}}{2}$

【点睛】本题是三角形综合题，主要考查了勾股定理，等边三角形的性质，含$30°$角的直角三角形的性质等知识，解题的关键是对新定义概念的理解，以及利用勾股定理求各线段的长.