2022北京陈经纶中学初二（下）期中

数　　学

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

1．（3 分）下列各式中最简二次根式为(　　)

A．$\sqrt{12}$　　B．$\sqrt{7}$　　C．$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　　D．$\sqrt{0.2}$

2．（3 分）下列几组数据能作为直角三角形的三边长的是(　　)

A．2，3，4　　B．$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{4}$　　C．4，6，9　　D．3，4，5

3．（3 分）下列计算正确的是(　　)

A．$\sqrt{3}+\sqrt{6}=3$　　B．$\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}+\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}$

4．（3 分）已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论中不正确的是(　　)

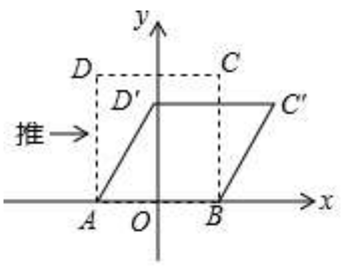
A．当 $AC=BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是正方形

B．当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形

C．当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形

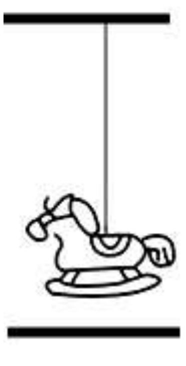
D．当 $\angle ABC=90^\circ$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形

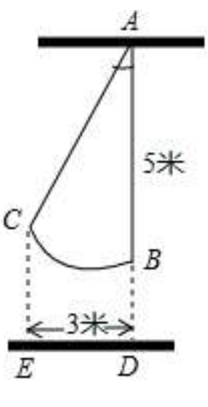
5．（3 分）我们知道：四边形具有不稳定性．如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，AB 的中点是坐标原点 O，固定点 A，B，把正方形沿箭头方向推，使点 D 落在 y 轴正半轴上点 D' 处，则点 C 的对应点 C' 的坐标为(　　)



A．$(\sqrt{3}，1)$　　B．$(2,1)$　　C．$(1,\sqrt{3})$　　D．$(2,\sqrt{3})$

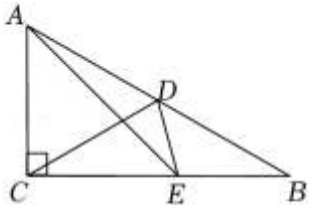
6．（3 分）如图，有一个绳索拉直的木马秋千，绳索 AB 的长度为 5 米，若将它往水平方向向前推进 3 米（即 $DE=3$ 米），且绳索保持拉直的状态，则此时木马上升的高度为(　　)





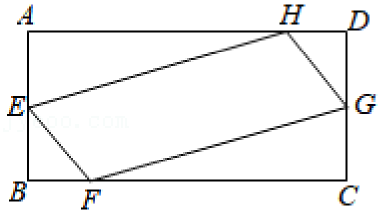
A．1 米　　　　B．$\sqrt{2}$ 米　　　　C．2 米　　　　D．4 米

7.（3 分）如图，在 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，D 为 AB 的中点，点 E 在 BC 上，且 $CE=AC$，$\angle BAE=15^{\circ}$，则 $\angle CDE$ 的大小为(　　)



A．70°　　　　B．75°　　　　C．80°　　　　D．85°

8.（3 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，动点 F 从点 B 出发，沿 BC 运动到点 C 时停止，以 EF 为边作 $\square EFGH$，且点 G、H 分别在 CD、AD 上．在动点 F 运动的过程中，$\square EFGH$ 的面积(　　)



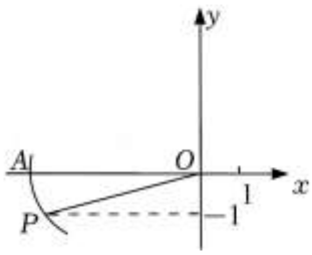
A．逐渐增大　　　　B．逐渐减小

C．不变　　　　D．先增大，再减小

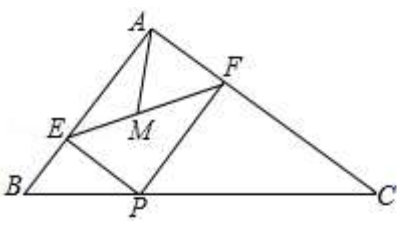
二、填空题：本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分.

9.（3 分）如果 $\sqrt{3-x}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是 ____.

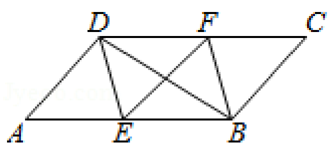
10.（3 分）如图，在平面直角坐标系中，以 O 为圆心，以 OP 的长为半径画弧，交 x 轴的负半轴于点 A，则点 A 的坐标为 $(-\sqrt{26}$，$0)$，点 P 的纵坐标为 -1，则 P 点的坐标为 ____.



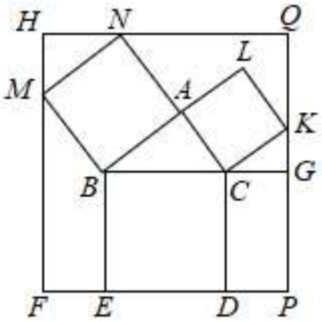
11.（3 分）如图，在 ΔABC 中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，P 为边 BC 上一动点，$PE\perp AB$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F，M 为 EF 中点，则 AM 的最小值为____.



12.（3 分）如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，CD 边上的点，且 $\angle ADE=\angle CBF$，连接 BD，EF．补充一个条件，可使四边形 $EBFD$ 是菱形，这个条件是____.

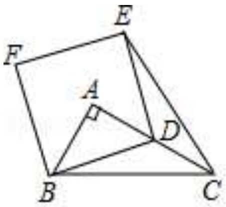


13．（3 分）勾股定理有着悠久的历史，它曾引起很多人的兴趣．1955 年希腊发行了以勾股定理为背景的邮票．如图，在 RtΔABC 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AC=3$，$AB=4$．分别以 AB，AC，BC 为边向外作正方形 $ABMN$，正方形 $ACKL$，正方形 $BCDE$，并按如图所示作长方形 $HFPQ$，延长 BC 交 PQ 于 G．则长方形 $CDPG$ 的面积为____．

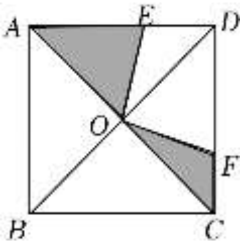


14．（3 分）如图，ΔABC 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=\frac{1}{2}BC=a$，点 D 在边 AC 上运动（不与点 A，C 重合），以 BD 为边作正方形 $BDEF$，使点 A 在正方形 $BDEF$ 内，连接 EC，则下列结论：

①$\Delta BCD\cong\Delta ECD$；②当 $CD=2AD$ 时，$\angle ADE=30^{\circ}$；③点 F 到直线 AB 的距离为 a；④ΔCDE 面积的最大值是 $\frac{3}{8}a^2$．其中正确的结论是____（填写所有正确结论的序号）



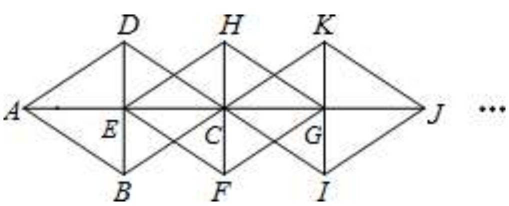
15．（3 分）如图，点 E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AD、CD 上的点，且 $OE\perp OF$，已知 $AD=6$，则图中阴影部分的面积是____．



16．（3 分）为庆祝建党 90 周年，美化社区环境，某小区要修建一块艺术草坪．如图，该草坪依次由部分互相重叠的一些全等的菱形组成，且所有菱形的较长的对角线在同一条直线上，前一个菱形对角线的交点是后一个菱形的一个顶点，如菱形 $ABCD$、$EFGH$、$CIJK$…，要求每个菱形的两条对角线长分别为 $4m$ 和 $6m$．

（1）若使这块草坪的总面积是 $39m^2$，则需要____个这样的菱形；

（2）若有 n 个这样的菱形（$n\geqslant 2$，且 n 为整数），则这块草坪的总面积是____ m^2．



三、解答题：本大题共 10 个小题，共 52 分．

17．计算：$\sqrt{24}\div\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{48}$．

18．已知求代数式：$x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$，求代数式$x^2+3xy+y^2$的值．

19．如面是小东设计的“作平行四边形一边中点”的尺规作图过程．

已知：平行四边形$ABCD$．

求作：点M，使点M为边AD的中点．

作法：如图，

①作射线BA；

②以点A为圆心，CD长为半径画弧，

交BA的延长线于点E；

③连接EC交AD于点M．

所以点M就是所求作的点．

根据小东设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：连接AC，ED．

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

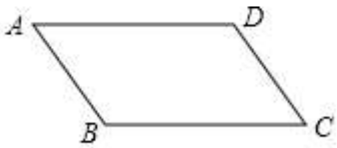
$\therefore AE//CD$．

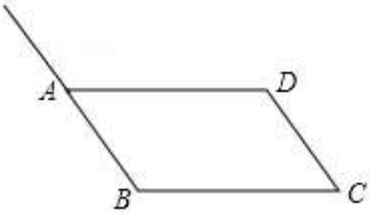
$\because AE=$____，

$\therefore$四边形$EACD$是平行四边形(____)（填推理的依据）．

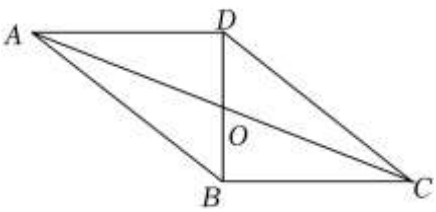
$\therefore AM=MD($____$)$（填推理的依据）．

$\therefore$点M为所求作的边AD的中点．



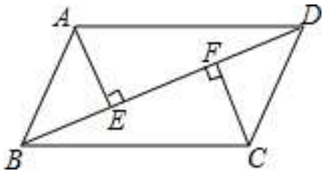


20．如图，在平行四边形$ABCD$中，对角线AC和BD相交于点O，$BD\perp AD$，$AB=10$，$AD=8$，求OB的长度及平行四边形$ABCD$的面积．



21．如图，已知在四边形$ABCD$中，$AE\perp BD$于E，$CF\perp BD$于F，$AE=CF$，$BF=DE$，求证：四边形$ABCD$

是平行四边形.



22．如图，在6×6的网格中，每个小正方形的边长为 1，请按要求画出格点四边形（四个顶点都在格点上的四边形叫格点四边形）.

（1）在图 1 中，画出一个三角形，使其三边长分别为 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$.

（2）在图 2 中，画出一个非正方形的特殊平行四边形，使其面积为 4，对角线的交点在格点上.

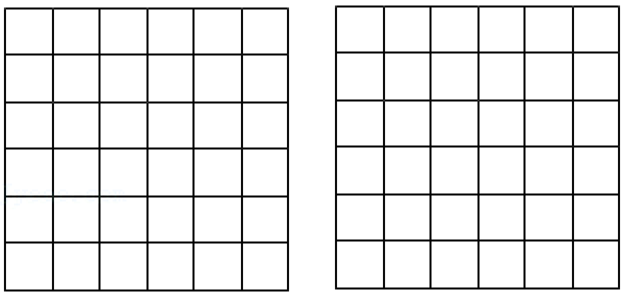
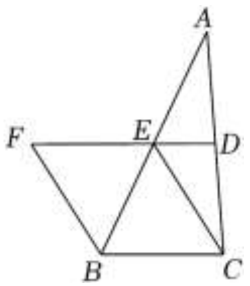


图1　　　　　　　图2

23．如图，ΔABC 中，D，E 分别是 AC，AB 的中点，$DE=\dfrac{1}{2}CE$，过点 B 作 $BF//CE$，交 DE 的延长线于点 F.

（1）求证：四边形 $BCEF$ 是菱形.

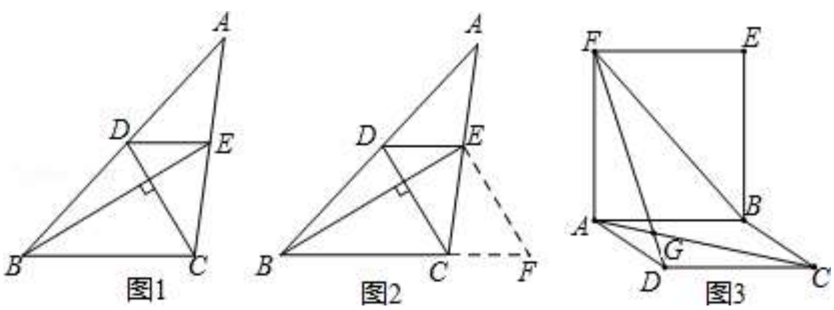
（2）若 $BC=2$，$\angle BCE=60^{\circ}$，求菱形 $BCEF$ 的面积.



24．阅读下面材料：

小明遇到这样一个问题：如图 1，在ΔABC 中，$DE//BC$ 分别交 AB 于 D，交 AC 于 E．已知 $CD\perp BE$，$CD=3$，$BE=5$，求 $BC+DE$ 的值.

小明发现，过点 E 作 $EF//DC$，交 BC 延长线于点 F，构造ΔBEF，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图 2）.



请回答：$BC+DE$ 的值为_____.

参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图 3，已知▱$ABCD$ 和矩形 $ABEF$，AC 与 DF 交于点 G，$AC=BF=DF$，求 $\angle AGF$ 的度数．

25．在平面直角坐标系 xOy 中，对于两个点 P，Q 和图形 W，如果在图形 W 上存在点 M，N（M，N 可以重合）使得 $PM=QN$，那么称点 P 与点 Q 是图形 W 的一对平衡点．

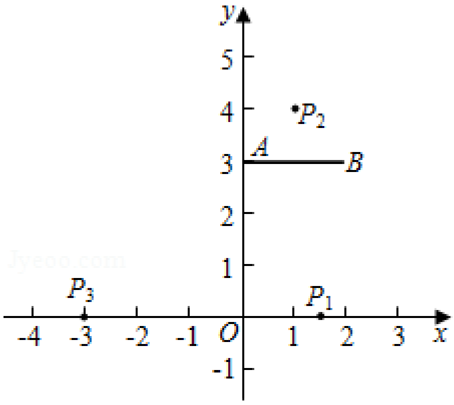


图 1

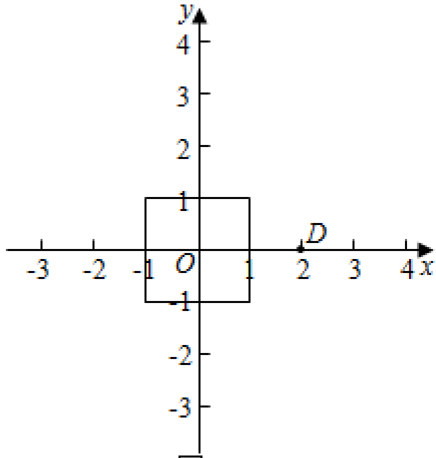


图 2

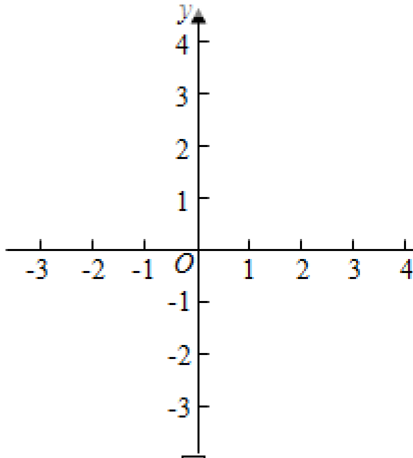


图 3

（1）如图 1，已知点 $A(0,3)$，$B(2,3)$．

①设点 O 与线段 AB 上一点的距离为 d，则 d 的最小值是____，最大值是____；

②在 $P_1(\frac{3}{2}，0)$，$P_2(1,4)$，$P_3(-3,0)$ 这三个点中，与点 O 是线段 AB 的一对平衡点的是____；

（2）如图 2，已知正方形的边长为 2，一边平行于 x 轴，对角线的交点为点 O，点 D 的坐标为 $(2,0)$．若点 $E(x,2)$ 在第一象限，且点 D 与点 E 是正方形的一对平衡点，求 x 的取值范围；

（3）已知点 $F(-2,0)$，$G(0,2)$，某正方形对角线的交点为坐标原点，边长为 $a(a\leqslant 2)$．若线段 FG 上的任意两个点都是此正方形的一对平衡点，直接写出 a 的取值范围．

26．新知学习：若一条线段把一个平面图形分成面积相等的两部分，我们把这条线段叫做该平面图形的二分线．

解决问题：

（1）①三角形的中线、高线、角平分线中，一定是三角形的二分线的是____；

②如图 1，已知 ΔABC 中，AD 是 BC 边上的中线，点 E，F 分别在 AB，DC 上，连接 EF，与 AD 交于点 G．若 $S_{\Delta AEG}=S_{\Delta DGF}$，则 EF ____（填“是”或“不是”）ΔABC 的一条二分线．

（2）如图 2，四边形 $ABCD$ 中，CD 平行于 AB，点 G 是 AD 的中点，射线 CG 交射线 BA 于点 E，取 EB 的中点 F，连接 CF．求证：CF 是四边形 $ABCD$ 的二分线．

（3）如图 3，在 ΔABC 中，$AB=CB=CE=7$，$\angle A=\angle C$，$\angle CBE=\angle CEB$，D，E 分别是线段 BC，AC 上的点，且 $\angle BED=\angle A$，EF 是四边形 $ABDE$ 的一条二分线，求 DF 的长．

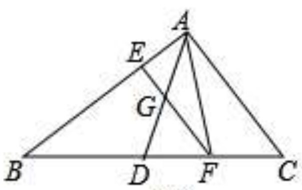


图1

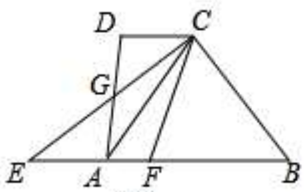


图2

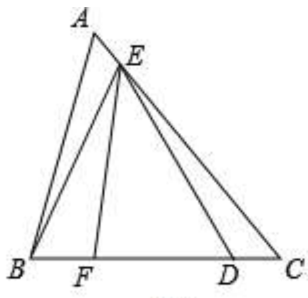


图3

参考答案

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

1．【分析】根据最简二次根式的概念判断即可.

【解答】解：A、$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$，被开方数中含能开得尽方的因数，不是最简二次根式，不符合题意；

B、$\sqrt{7}$ 是最简二次根式，符合题意；

C、$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，被开方数含分母，不是最简二次根式，不符合题意；

D、$\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，被开方数含分母，不是最简二次根式，不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查的是最简二次根式的概念，被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式，叫做最简二次根式.

2．【分析】分别计算较小两数的平方和，看是否等于最大数的平方即可.

【解答】解：A、$\because 2^2+3^2=13\neq 4^2$，$\therefore$不能构成直角三角形，故本选项不符合题意；

B、$\because (\sqrt{3})^2+(\sqrt{4})^2=7\neq(\sqrt{5})^2$，$\therefore$不能构成直角三角形，故本选项不符合题意；

C、$\because 4^2+6^2=52\neq 9^2$，$\therefore$不能构成直角三角形，故本选项不符合题意；

D、$\because 3^2+4^2=25=5^2$，$\therefore$能构成直角三角形，故本选项符合题意.

故选：D.

【点评】本题考查的是勾股定理的逆定理，熟知如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形是解答此题的关键.

3．【分析】根据二次根式加减法运算法则判断 A，B，D，根据二次根式乘法运算法则判断 C.

【解答】解：A、$\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$ 不是同类二次根式，不能合并计算，故此选项不符合题意；

B、$\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不能合并计算，故此选项不符合题意；

C、原式$=\sqrt{3\times 6}=3\sqrt{2}$，故此选项符合题意；

D、$\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$ 不是同类二次根式，不能合并计算，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查二次根式的混合运算，理解二次根式的性质，掌握二次根式加减法和乘法的运算法则是解题关键.

4．【分析】根据矩形、菱形、正方形的判定逐个判断即可.

【解答】解：A．当 $AC=BD$ 时，由对角线相等的平行四边形是矩形，故该选项不符合题意；

B．当 $AC\perp BD$ 时，由对角线互相垂直的平行四边形是菱形可得四边形 $ABCD$ 是菱形，故该选项不符合题意；

C．当 $AB=BC$ 时，由一组邻边相等的平行四边形是菱形可得四边形 $ABCD$ 是菱形，故该选项不符合题意；

D．当 $\angle ABC=90^\circ$ 时，由有一个角为直角的平行四边形是矩形可得四边形 $ABCD$ 是矩形，故该选项不符合题意；

故选：A.

【点评】本题考查了对矩形的判定、菱形的判定，正方形的判定的应用，能正确运用判定定理进行判断是解此题的

关键.

5．【分析】由已知条件得到 $AD'=AD=2$， $AO=\frac{1}{2}AB=1$，根据勾股定理得到 $OD'=\sqrt{AD'^2-OA^2}=\sqrt{3}$，于是得到结论.

【解答】解：$\because AD'=AD=2$，

$AO=\frac{1}{2}AB=1$，

$\therefore OD'=\sqrt{AD'^2-OA^2}=\sqrt{3}$，

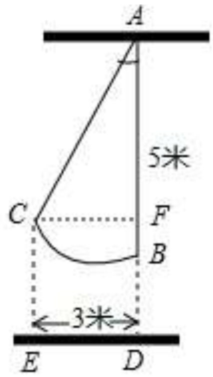
$\because C'D'=2$， $C'D'//AB$，

$\therefore C'(2,\sqrt{3})$，

故选： D .

【点评】本题考查了正方形的性质，坐标与图形的性质，勾股定理，正确的识别图形是解题的关键.

6．【分析】作 $CF\perp AB$，根据勾股定理求得 AF 的长，可得 BF 的长度.



【解答】解：过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F，

根据题意得： $AB=AC=5$， $CF=DE=3$，

由勾股定理可得 $AF^2+CF^2=AC^2$，

$\therefore AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore BF=AB-AF=5-4=1$，

$\therefore$ 此时木马上升的高度为 1 米，

故选： A .

【点评】本题主要考查勾股定理的应用，添加辅助线构建直角三角形是解题的关键.

7．【分析】根据等腰直角三角形的性质得到 $\angle CAE=\angle AEC=45^\circ$， 求得 $\angle CAB=60^\circ$， 得到 $\angle B=30^\circ$， 根据直角三角形的性质得到 $CD=BD=AD=\frac{1}{2}AB$， 得到 ΔACD 是等边三角形， $\angle DCB=\angle B=30^\circ$， 于是得到结论.

【解答】解：$\because \angle ACB=90^\circ$， $CE=AC$，

$\therefore \angle CAE=\angle AEC=45^\circ$，

$\because \angle BAE=15^\circ$，

$\therefore \angle CAB=60^\circ$，

$\therefore \angle B=30^\circ$，

$\because \angle ACB=90^\circ$， D 为 AB 的中点，

$\therefore CD=BD=AD=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore \Delta ACD$ 是等边三角形，$\angle DCB=\angle B=30^{\circ}$，

$\therefore AC=DC=CE$，

$\therefore \angle CDE=\angle CED=\frac{1}{2}\times(180^{\circ}-30^{\circ})=75^{\circ}$．

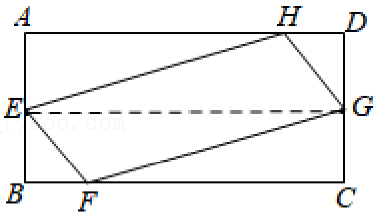
故选：B．

【点评】本题考查了直角三角形斜边上的中线，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质，正确的识别图形是解题的关键．

8．【分析】设 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，$BF=x$，根据 $S_{平行四边形EFGH}=S_{矩形ABCD}-2\left(S_{\Delta BEF}+S_{\Delta AEH}\right)=\left(a-2c\right)x+bc$，由 E 是 AB 的中点可得 $a-2c=0$，进而判断．

【解答】解：设 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，$BF=x$，

连接 EG，



$\because$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形，

$\therefore EF=HG$，$EF//HG$，

$\therefore \angle FEG=\angle HGE$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AB//CD$，

$\therefore \angle BEG=\angle DGE$，

$\therefore \angle BEG-\angle FEG=\angle DGE-\angle EGH$，

$\therefore \angle BEF=\angle HGD$

$\because EF=HG$，$\angle B=\angle D$，

$\therefore \mathrm{Rt\Delta BEF}\cong\mathrm{Rt\Delta DGH(AAS)}$，

同理 $\mathrm{Rt\Delta AEH}\cong\mathrm{Rt\Delta CGF}$，

$\therefore S_{平行四边形EFGH}=S_{矩形ABCD}-2\left(S_{\Delta BEF}+S_{\Delta AEH}\right)$

$=ab-2[\frac{1}{2}cx+\frac{1}{2}(a-c)(b-x)]$

$=ab-(cx+ab-ax-bc+cx)$

$=ab-cx-ab+ax+bc-cx$

$=(a-2c)x+bc$，

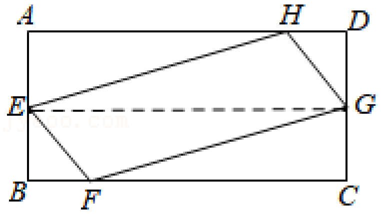
$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore a=2c$，

$\therefore a-2c=0$，

$\therefore S_{平行四边形EFGH}=bc=\frac{1}{2}ab$，

方法二：连接 EG，



$\because$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形，

$\therefore EF=HG$， $EF//HG$，

$\therefore \angle FEG=\angle HGE$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AB//CD$，

$\therefore \angle BEG=\angle DGE$，

$\therefore \angle BEG-\angle FEG=\angle DGE-\angle EGH$，

$\therefore \angle BEF=\angle HGD$

$\because EF=HG$， $\angle B=\angle D$，

$\therefore \text{Rt}\Delta\text{BEF}\cong\text{Rt}\Delta\text{DGH(AAS)}$，

$\therefore DG=BE=\frac{1}{2}CD=AE$，

$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 为平行四边形，

$\because \angle A=90^{\circ}$，

$\therefore \square AEGD$ 为矩形，

同理四边形 $EBCG$ 为矩形，

$\therefore S_{平行四边形EFGH}=S_{\Delta EHG}+S_{\Delta EFG}=\frac{1}{2}EG\cdot DG+\frac{1}{2}EG\cdot GC=EG\cdot DG=\frac{1}{2}EG\cdot CD=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$.

故选： C.

【点评】本题考查了矩形的性质，平行四边形的性质，解决本题的关键是掌握矩形的性质.

二、填空题：本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分.

9.【分析】根据二次根式有意义的条件列出不等式，解不等式得到答案.

【解答】解：由题意得： $3-x\geqslant 0$，

解得： $x\leqslant 3$，

故答案为： $x\leqslant 3$.

【点评】本题考查的是二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

10.【分析】利用勾股定理计算即可.

【解答】解：设点 $P\perp y$ 轴的交点为点 B，则 $\angle OBP=90^{\circ}$，

由题意可得： $OP=OA=\sqrt{26}$， $OB=1$，

在 $\text{Rt}\Delta\text{OBP}$ 中， $BP=\sqrt{(\sqrt{26})^{2}-1^{2}}=5$，

$\because$ 点 P 为第三象限，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-5,-1)$.

故答案为：$(-5,-1)$.

【点评】本题主要考查勾股定理，解题关键是利用勾股定理求出 BP 长.

11.【分析】先根据矩形的判定得出 $AEPF$ 是矩形，再根据矩形的性质得出 EF ，AP 互相平分，且 $EF=AP$ ，再根据垂线段最短的性质就可以得出 $AP\perp BC$ 时，AP 的值最小，即 AM 的值最小，根据面积关系建立等式求出其解即可.

【解答】解：如图，连接 AP ，

$\because AB=3$，$AC=4$ ，$BC=5$ ，

$\therefore \angle EAF=90^{\circ}$ ，

$\because PE\perp AB$ 于 E ，$PF\perp AC$ 于 F ，

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，

$\therefore EF$ ，AP 互相平分．且 $EF=AP$ ，

$\therefore EF$ ，AP 的交点就是 M 点.

$\because$ 当 AP 的值最小时，AM 的值就最小，

$\therefore$ 当 $AP\perp BC$ 时，AP 的值最小，即 AM 的值最小.

$\because \frac{1}{2}AP\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot AC$ ，

$\therefore AP\cdot BC=AB\cdot AC$ ，

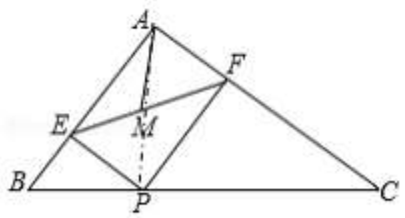
$\because AB=3$，$AC=4$ ，$BC=5$ ，

$\therefore 5AP=3\times 4$ ，

$\therefore AP=\frac{12}{5}$ ，

$\therefore AM=\frac{6}{5}$;

故答案为：$\frac{6}{5}$.



【点评】本题考查了矩形的性质的运用，勾股定理的运用，三角形的面积公式的运用，垂线段最短的性质的运用，解答时求出 AP 的最小值是关键.

12.【分析】证 $\Delta ADE\cong\Delta CBF(ASA)$ ，得出 $AE=CF$ ，则 $BE=DF$ ，证出四边形 $EBFD$ 是平行四边形，由 $BD\perp EF$ ，即可得出四边形 $EBFD$ 是菱形.

【解答】解：添加 $BD\perp EF$ ，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = CB$， $\angle A = \angle C$， $AB//CD$， $AB = CD$，

在 ΔADE 和 ΔCBF 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ AD = CB \\ \angle ADE = \angle CBF \end{cases}，$$

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta CBF(ASA)$，

$\therefore AE = CF$，

$\therefore AB - AE = CD - CF$，

即 $BE = DF$，

又$\because BE//DF$，

$\therefore$四边形 $EBFD$ 是平行四边形，

$\because BD \perp EF$，

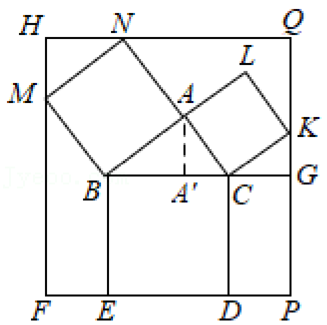
$\therefore$四边形 $EBFD$ 是菱形．

故答案为： $BD \perp EF$．

【点评】本题考查了菱形的判定、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质；熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键．

13．【分析】如图，过点 A 作 $AA' \perp BC$ 于 A'，先根据面积法可得 AA' 的长，证明$\triangle AA'C \cong \Delta CGK(AAS)$，可得 $CG = AA' = \dfrac{12}{5}$，最后根据长方形的面积公式可计算其答案．

【解答】解：如图，过点 A 作 $AA' \perp BC$ 于 A'，



$\because \angle BAC = 90°$， $AC = 3$， $AB = 4$，

$\therefore BC = 5$，

$\because S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}BC \cdot AA'$，

$\therefore \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = \dfrac{1}{2} \times 5 \times AA'$，

$\therefore AA' = \dfrac{12}{5}$，

$\because$四边形 $ACKL$ 是正方形，

$\therefore AC = CK$， $\angle ACK = 90°$，

$\therefore \angle ACA' + \angle KCG = \angle ACA' + \angle CAA' = 90°$，

$\therefore \angle KCG = \angle CAA'$，

在$\triangle AA'C$和ΔCGK中，

$$\begin{cases}\angle AA'C=\angle CGK=90^{\circ}\\ \angle CAA'=\angle KCG\\ AC=CK\end{cases},$$

$\therefore \triangle AA'C\cong \Delta CGK(AAS)$，

$\therefore CG=AA'=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore$长方形$CDPG$的面积$=CD\cdot CG=5\times\dfrac{12}{5}=12$.

故答案为：12.

【点评】本题考查了勾股定理和三角形全等的性质和判定，正确作辅助线构建三角形全等是本题的关键.

14.【分析】①根据“两边对应相等，而夹角不一定相等，这样的两个三角形不一定全等”进行判断；

②由勾股定理求得AC，进而解$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABD}$得$\angle ADB$，便可得$\angle ADE$的度数；

③过F作$FG\perp AB$于点G，证明$\Delta ABD\cong\Delta GFB$得$AB=GF=a$便可；

④过点E作$EH\perp AC$于点H，证明$\Delta ABD\cong\Delta HDE$，得$AD=EH$，进而解直角三角形，用$a$表示$AD$、$CD$，再根据三角形的面积公式求得$\Delta CDE$面积关于$a$的解析式，利用完全平方式求得其最小值.

【解答】解：①$\because$四边形$BDEF$是正方形，

$\therefore BD=ED$，$\angle BDE=90^{\circ}$，

$\because CD=CD$，

当$\angle ADB\neq 45^{\circ}$时，$\angle ADB\neq\angle ADE$，

此时$\angle BDC\neq\angle EDC$，

则ΔBCD不全等于ΔECD，

故①错误；

②$\because \Delta ABC$中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=\dfrac{1}{2}BC=a$，

$\therefore AC=\sqrt{3}a$，

$\because CD=2AD$，

$\therefore AD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

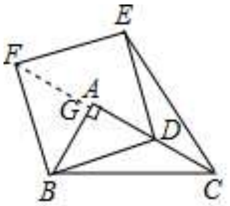
$\therefore \tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle ADB=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ADE=\angle BDE-\angle ADB=30^{\circ}$，

故②正确；

③过F作$FG\perp AB$于点G，



$\because$ 四边形 $BDEF$ 是正方形，

$\therefore BD=FB$， $\angle DBF=\angle BAD=\angle FGB=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD+\angle ABF=\angle ABF+\angle GFB=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle GFB$，

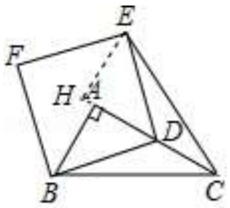
$\therefore \Delta ABD\cong \Delta GFB(AAS)$，

$\therefore AB=GF=a$，

$\therefore$ 点 F 到直线 AB 的距离为 a，

故③正确；

④过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H，



$\because$ 四边形 $BDEF$ 是正方形，

$\therefore BD=DE$， $\angle BDE=\angle BAD=\angle DHE=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD+\angle BDA=\angle BDA+\angle HDE=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle HDE$，

$\therefore \Delta ABD\cong \Delta HDE(AAS)$，

$\therefore AD=HE$，

$\because AD=AB\cdot\tan\angle ABD=a\cdot\tan\angle ABD$，

$AC=\sqrt{3}a$，

$\therefore CD=AC-AD=(\sqrt{3}-\tan\angle ABD)a$，

$\therefore S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{2}CD\cdot HE=\dfrac{1}{2}(-tan^2\angle ABD+\sqrt{3}\tan\angle ABD)a^2=[\dfrac{3}{8}-(\tan\angle ABD-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2]a^2\leqslant\dfrac{3}{8}a^2$，

$\therefore \Delta CDE$ 面积的最大值是 $\dfrac{3}{8}a^2$，

故④正确；

故答案为：②③④．

【点评】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，解直角三角形的知识，关键是证明全等三角形．

15．【分析】根据正方形的性质得到 $\angle EDO=\angle FCO$， $AC\perp BD$， $OD=\dfrac{1}{2}BD$， $OC=\dfrac{1}{2}AC$， $AC=BD$，根据全等三角形的判定定理得到 $\Delta ODE\cong\Delta OCF(ASA)$，根据正方形的面积公式即可得到结论．

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle EDO=\angle FCO$， $AC\perp BD$， $OD=\frac{1}{2}BD$， $OC=\frac{1}{2}AC$， $AC=BD$，

$\therefore \angle DOC=90^{\circ}$， $OD=OC$，

$\because OE\perp OF$，

$\therefore \angle EOF=90^{\circ}$，

$\therefore \angle DOE=\angle COF$，

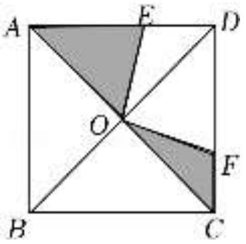
$\therefore \Delta ODE\cong \Delta OCF(ASA)$，

$\therefore$图中阴影部分的面积$=S_{\Delta AOD}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，

$\because AD=6$，

$\therefore$图中阴影部分的面积$=\frac{1}{4}\times 6^{2}=9$，

故答案为：9．



【点评】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，证得$\Delta ODE\cong \Delta OCF$是解题的关键．

16．【分析】(1) 利用菱形的对角线互相垂直平分，可分别作出四个满足条件的菱形，另外菱形重合的部分也是菱形，并且这些小菱形的对角线分别为 2，3，结合菱形的面积$=$对角线$\times$另一条对角线$\div 2$，即可求出图形的面积和需要的菱形个数；

(2) 由 (1) 可知若有n个这样的菱形$(n\geqslant 2$，且n为整数)，则这块草坪的总面积

【解答】解：(1) $\because$每个菱形的两条对角线长分别为$4m$和$6m$．

$\therefore$小菱形的对角线分别为 2，3，

$\because$菱形的面积$=$对角线$\times$另一条对角线$\div 2$，

$\therefore$占地面积为$4\times 6\div 2\times n-3\times 2\div 2\times n=39m^{2}$．

$\therefore$则需要 4 个这样的菱形，

故答案为 4；

(2) 当有一个这样的菱形，则草坪的面积为$4\times 6\div 2=12=9\times 1+3$，

当有 2 个这样的菱形，则草坪的面积为$4\times 6\times 2\div 2-2\times 3\div 2=21=9\times 2+3$，

…依此类推

若有n个这样的菱形$(n\geqslant 2$，且n为整数)，则这块草坪的总面积是$(9n+3)$，

故答案为：$(9n+3)$．

【点评】本题考查了菱形的性质和菱形的面积公式，题目设计比较新颖，考查了学生运用数学解决实际问题的能力．

三、解答题：本大题共 10 个小题，共 52 分．

17．【分析】先算乘除法，然后计算加减法即可．

【解答】解：$\sqrt{24}\div\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{48}$

$=\sqrt{12}-\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}-\sqrt{6}$．

【点评】本题考查二次根式的混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键．

18．【分析】先求出$x+y$，xy，再将代数式利用完全平方公式变形，代值即可求出．

【解答】解：$\because x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$，

$\therefore x+y=4$，$xy=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$，

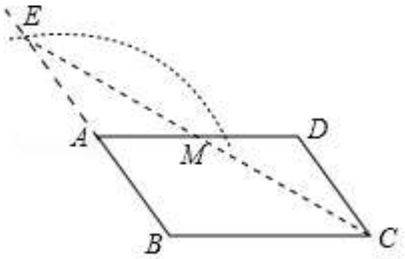
原式$=x^2+2xy+y^2+xy=(x+y)^2+xy=4^2+2=18$．

【点评】本题考查代数式求值，涉及到二次根式的运算，解题关键是熟悉完全平方公式进行巧算．

19．【分析】（1）根据要求作出点M即可．

（2）利用全等三角形的性质解决问题即可．

【解答】解：（1）点M如图所示．



（2）连接AC，ED．

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AE//CD$．

$\because AE=CD$，

$\therefore$四边形$EACD$是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）（填推理的依据）．

$\therefore AM=MD$（平行四边形的对角线互相平分）（填推理的依据）．

$\therefore$点M为所求作的边AD的中点．

故答案为：CD，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，平行四边形的对角线互相平分．

【点评】本题考查作图$-$复杂作图，平行四边形的性质，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确应用全等三角形性质解决问题．

20．【分析】直接利用勾股定理得出BD的长，再由平行四边形的性质即可得出答案．

【解答】解：在平行四边形$ABCD$中，$BC=AD=8$，$AD//BC$，$AD=8$，

$\because BD\perp AD$，$AB=10$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$．

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OB=\frac{1}{2}BD=3$， $S_{\square ABCD}=AD\cdot BD=8\times 6=48$.

【点评】此题主要考查了平行四边形的性质以及勾股定理，正确得出 BD 的长是解题关键.

21．【分析】由 SAS 证得 $\Delta ADE\cong\Delta CBF$ ，得出 $AD=BC$ ， $\angle ADE=\angle CBF$ ，证得 $AD//BC$ ，利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【解答】证明： $\because AE\perp BD$ 于 E ， $CF\perp BD$ 于 F ，

$\therefore\angle AED=\angle CFB=90^{\circ}$，

在 ΔADE 和 ΔCBF 中，

$$\begin{cases}DE=BF\\ \angle AED=\angle CFB\\ AE=CF\end{cases}$$

$\therefore\Delta ADE\cong\Delta CBF(SAS)$，

$\therefore AD=BC$ ， $\angle ADE=\angle CBF$ ，

$\therefore AD//BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【点评】本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质、平行线的判定；熟练掌握平行四边形的判定方法，证明三角形全等是解决问题的关键.

22．【分析】(1) 利用数形结合的思想画出图形即可；

(2) 作一个对角线长分别为 4，2 的菱形即可.

【解答】解：(1) 如图 1 中， ΔABC 即为所求；

(2) 如图 2 中，四边形 $ABCD$ 即为所求；

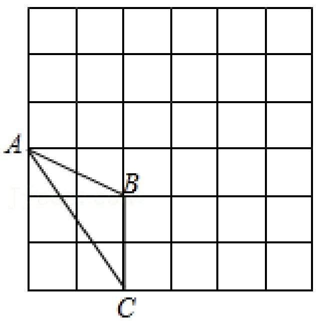


图1

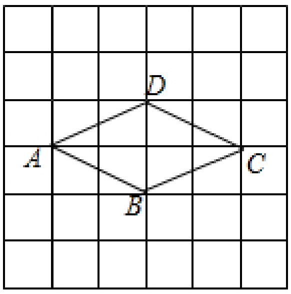


图2

【点评】本题考查作图－应用与设计作图，菱形的判定和性质等知识，解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考常考题型.

23．【分析】(1) 先证四边形 $BCFE$ 是平行四边形．再证 $BC=CE$ ，即可得出结论；

(2) 根据等边三角形的判定和性质以及菱形的性质解答即可.

【解答】(1) 证明： $\because D$ 、 E 分别是 AC 、 AB 的中点，

$\therefore DE$ 是 ΔABC 的中位线，

$\therefore DE//BC$ ， $DE=\frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore EF//BC$ ，

$\because BF//CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

$\because DE=\frac{1}{2}CE$，

$\therefore BC=CE$，

$\therefore$ 平行四边形 $BCEF$ 是菱形；

（2）解：如图，过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G，

由（1）知 $BC=CE$，

$\because \angle BCE=60°$，

$\therefore \Delta BCE$ 是等边三角形，

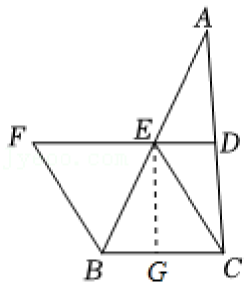
$\therefore BE=CE=BC=2$，

$\because EG\perp BC$，

$\therefore BG=\frac{1}{2}BC=1$，

在 RtΔBGE 中，由勾股定理得：$EG=\sqrt{BE^2-BG^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{菱形BCEF}=BC\cdot EG=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$．



【点评】此题主要考查菱形的判定与性质、三角形中位线定理、平行四边形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、勾股定理等知识，熟练掌握菱形的判定与性质是解题的关键．

24．【分析】由 $DE//BC$，$EF//DC$，可证得四边形 $DCFE$ 是平行四边形，即可得 $EF=CD=3$，$CF=DE$，即可得 $BC+DE=BF$，然后利用勾股定理，求得 $BC+DE$ 的值；

首先连接 AE，CE，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，四边形 $ABEF$ 是矩形，易证得四边形 $DCEF$ 是平行四边形，继而证得 ΔACE 是等边三角形，则可求得答案．

【解答】解：$\because DE//BC$，$EF//DC$，

$\therefore$ 四边形 $DCFE$ 是平行四边形，

$\therefore EF=CD=3$，$CF=DE$，

$\because CD\perp BE$，

$\therefore EF\perp BE$，

$\therefore BC+DE=BC+CF=BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$；

故答案为：$\sqrt{34}$；

解决问题：连接 AE，CE，如图．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB//DC$.

$\because$四边形$ABEF$是矩形，

$\therefore AB//FE$，$BF=AE$.

$\therefore DC//FE$.

$\therefore$四边形$DCEF$是平行四边形.

$\therefore CE//DF$.

$\because AC=BF=DF$，

$\therefore AC=AE=CE$.

$\therefore \Delta ACE$是等边三角形.

$\therefore \angle ACE=60^\circ$.

$\because CE//DF$，

$\therefore \angle AGF=\angle ACE=60^\circ$.

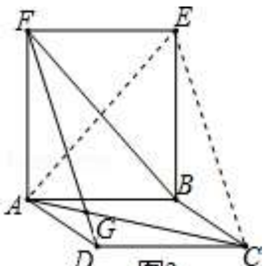


图3

【点评】此题考查了平行四边形的判定与性质、矩形的性质、等边三角形的判定与性质以及勾股定理．注意掌握辅助线的作法.

25.【分析】(1)①观察图象d的最小值是OA长，最大值是OB长，由勾股定理即可得出结果；

②过P_1作$P_1N\perp AB$于N，可得出$P_1N=OA=3$，根据平衡点的定义，即可得出点P_1与点O是线段AB的一对平衡点；

(2)如图2，可得$E_1B=DB$，$E_2B=D_1D$，由平衡点的定义可求出x的范围；

(3)如图2，正方形$ABCD$边长为2，F，G上任意两点关于AC是一对平衡点，且AC，BD的交点是O，根据平衡点的定义，可得$2-\frac{a}{2}\leqslant d(F)\leqslant 2+\frac{a}{2}$，$2-\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant d(G)\leqslant \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a$，即可求出$a$的范围.

【解答】解：(1)①由题意知：$OA=3$，$OB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，则$d$的最小值是3，最大值是$\sqrt{13}$；

②如图1，过P_1作$P_1N\perp AB$于N，

$\because P_1N=OA=3$，

$\therefore$根据平衡点的定义，点P_1与点O是线段AB的一对平衡点；

故答案为：3，$\sqrt{13}$，P_1；

(2)如图2中，$E_1B=DB$，$E_2B=D_1D$，

且M，N均在正方形上，符合平衡点的定义，

$\therefore 0<x\leqslant 4$；

(3)如图2，正方形$ABCD_1$边长为2，

F，G上任意两点关于AC是一对平衡点，且AC，BD的交点是O，

则 $2-\frac{a}{2}\leqslant d(F)\leqslant 2+\frac{a}{2}$， $2-\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant d(G)\leqslant\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore 2-\frac{a}{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore a\geqslant 6\sqrt{2}-8$，

$\therefore 6\sqrt{2}-8\leqslant a\leqslant 2$.

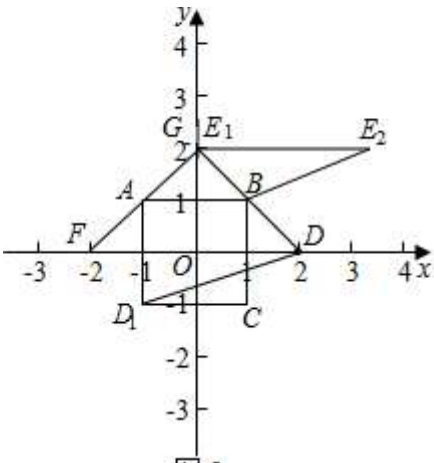


图 2

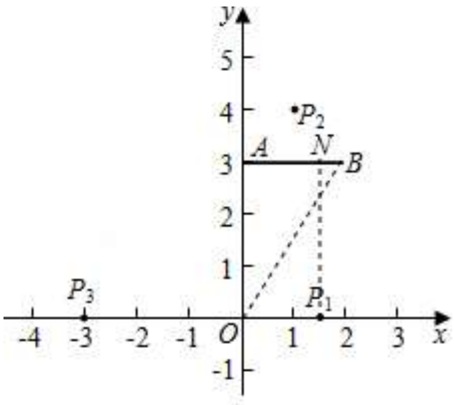


图 1

【点评】本题属于四边形综合题，考查了点 P 与点 Q 是图形 W 的一对平衡点、正方形性质、点与点的距离等知识，解题的关键是理解题意，学会取特殊点特殊位置解决问题，属于中考压轴题.

26.【分析】(1) ①由平面图形的二分线定义可求解；

②由面积的和差关系可得 $S_{\Delta BEF}=S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$，可得 EF 是 ΔABC 的一条二分线；

(2) 根据 EB 的中点 F，所以 $S_{\Delta CBF}=S_{\Delta CEF}$，由 $AB//DC$，G 是 AD 的中点，证明 $\Delta CDG\cong\Delta EAG$，所以 $S_{四边形AFCD}=S_{\Delta CEF}$，所以 $S_{四边形AFCD}=S_{\Delta CBF}$，可得 CF 是四边形 $ABCD$ 的二分线；

(3) 延长 CB 使 $BH=CD$，连接 EH，通过全等三角形的判定可得 $S_{\Delta BEH}=S_{\Delta DEC}=S_{\Delta ABE}$，可得 $S_{\Delta HED}=S_{四边形ABDE}$，即可得 $DF=\frac{1}{2}DH=\frac{7}{2}$.

【解答】解：(1) $\because$ 三角形的中线把三角形分成面积相等的两部分；

$\therefore$ 三角形的中线是三角形的二分线，

故答案为三角形的中线

②$\because AD$是BC边上的中线

$\therefore S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$，

$\because S_{\Delta AEG}=S_{\Delta DGF}$，

$\therefore S_{四边形BDGE}+S_{\Delta AEG}=S_{四边形BDGE}+S_{\Delta DGF}$，

$\therefore S_{\Delta BEF}=S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$，

$\therefore EF$是ΔABC的一条二分线

故答案为：是

（2）$\because EB$的中点F，

$\therefore S_{\Delta CBF}=S_{\Delta CEF}$，

$\because AB//DC$，

$\therefore \angle E=\angle DCG$，

$\because G$是AD的中点，

$\therefore DG=AG$，

在ΔCDG和ΔEAG中，

$$\begin{cases}\angle E=\angle DCG\\ \angle EGA=\angle CGD\\ AG=DG\end{cases}$$

$\therefore \Delta CDG\cong\Delta EAG(AAS)$，

$\therefore S_{\Delta AEG}=S_{\Delta DCG}$，

$\therefore S_{四边形AFCD}=S_{\Delta CEF}$，

$\therefore S_{四边形AFCD}=S_{\Delta CBF}$，

$\therefore CF$ 是四边形$ABCD$的二分线.

（3）如图，延长CB使$BH=CD$，连接EH，

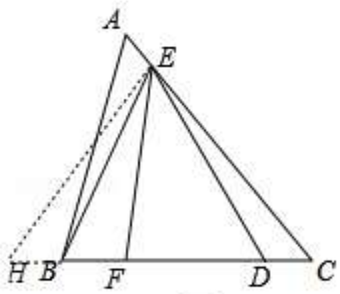


图3

$AB=CB=CE=7$，$\angle A=\angle C$，$\angle CBE=\angle CEB$，D，E分别是线段BC，AC上的点，且$\angle BED=\angle A$，

$\because BC=7$

$\therefore BD+CD=7$

$\therefore BD+BH=7=HD$

$\because \angle BED=\angle A$，$\angle BED+\angle DEC=\angle A+\angle ABE$

$\therefore \angle ABE=\angle CED$，且 $AB=CE=7$， $\angle A=\angle C$

$\therefore \Delta ABE\cong\Delta CED(ASA)$

$\therefore AE=CD$， $BE=DE$， $\angle AEB=\angle EDC$， $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta EDC}$，

$\therefore AE=BH$，

$\because \angle CBE=\angle CEB$

$\therefore \angle AEB=\angle EBH$

$\therefore \angle EBH=\angle EDC$，且 $BE=DE$， $BH=CD$

$\therefore \Delta BEH\cong\Delta DEC(SAS)$、

$\therefore S_{\Delta BEH}=S_{\Delta DEC}$，

$\therefore S_{\Delta BEH}=S_{\Delta DEC}=S_{\Delta ABE}$，

$\therefore S_{\Delta HED}=S_{四边形ABDE}$，

$\because EF$ 是四边形 $ABDE$ 的一条二分线，

$\therefore S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}S_{四边形ABDE}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta HED}$，

$\therefore DF=\dfrac{1}{2}DH=\dfrac{7}{2}$

【点评】本题是三角形综合题，考查了全等三角形的判定和性质，三角形中线的性质，平行线的性质，理解新定义是本题的关键.