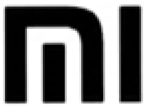
2023北京北师大二附中初三（上）第一次月考

数　　学

一、选择题（每题2分，共16分）

1．如图四个图形中，是中心对称图形的是（　　）

A. 　　B. 

C. 　　D. 

2．一元二次方程$2x^2+x-5=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（　　）

A．2，1，5　　B．2，1，－5　　C．2，0，－5　　D．2，0，5

3．把抛物线$y=x^2$向上平移3个单位，得到的抛物线是（　　）

A．$y=(x-3)^2$　　B．$y=(x+3)^2$　　C．$y=x^2-3$　　D．$y=x^2+3$

4．在平面直角坐标系xOy中，点A（2，3）关于原点对称的点的坐标是（　　）

A．（2，－3）　　B．（－2，3）　　C．（3，2）　　D．（－2，－3）

5．在平面直角坐标系xOy中，下列函数的图象经过点（0，0）的是（　　）

A．$y=x+1$　　B．$y=x^2$　　C．$y=(x-4)^2$　　D．$y=\frac{1}{x}$

6．用配方法解方程$x^2+4x=1$，变形后结果正确的是（　　）

A．$(x-2)^2=2$　　B．$(x+2)^2=2$　　C．$(x-2)^2=5$　　D．$(x+2)^2=5$

7．把长为$2m$的绳子分成两段，使较长一段的长的平方等于较短一段的长与原绳长的积．设较长一段的长为xm，依题意，可列方程为（　　）

A．$x^2=2(2-x)$　　B．$x^2=2(2+x)$　　C．$(2-x)^2=2x$　　D．$x^2=2-x$

8．如图，二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象经过点A，B，C．现有下面四个推断：

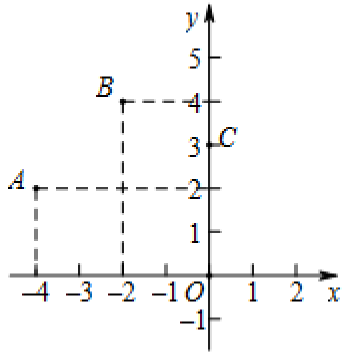
①抛物线开口向下；

②当$x=-2$时，y取最大值；

③当$m<4$时，关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=m$必有两个不相等的实数根；

④直线$y=kx+c$（$k\neq0$）经过点A，C，当$kx+c>ax^2+bx+c$时，x的取值范围是$-4<x<0$；

其中推断正确的是（　　）



A．①②　　B．①③　　C．①③④　　D．②③④

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

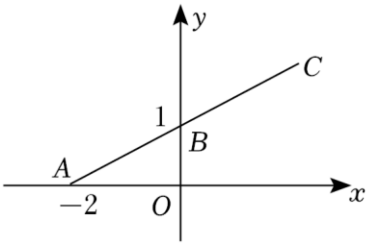
9．（3 分）抛物线 $y=-3(x-1)^2+2$ 的顶点坐标是 ________．

10．（3 分）请写出一个开口向上，并且与 y 轴交于点（0，－2）的抛物线解析式____________．

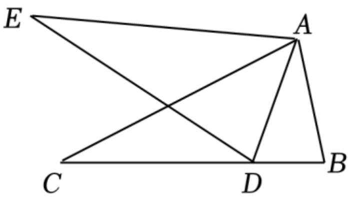
11．（3 分）若点 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$ 在抛物线．$y=2x^2$ 上，则 y_1，y_2 的大小关系为：y_1_____y_2．（选填“＞”“＜或“＝”）

12．（3 分）若关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围为_______．

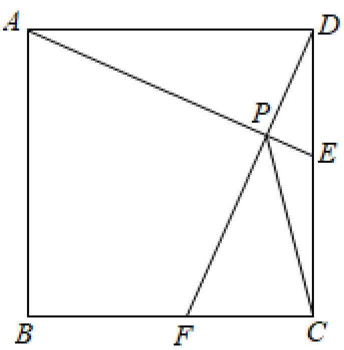
13．（3 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-2,0)$，点 $B(0,1)$．将线段 BA 绕点 B 旋转 180°得到线段 BC，则点 C 的坐标为 ________．



14．（3 分）如图，将△ABC 绕点 A 顺时针旋转 30° 得到△ADE，点 B 的对应点 D 恰好落在边 BC 上，则∠ADE=_______．



15．（3 分）如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 DC，CB 上的动点，且始终满足 $DE=CF$，AE，DF 交于点 P，则∠APD 的度数为 _______；连接 CP，线段 CP 的最小值为 ___________．



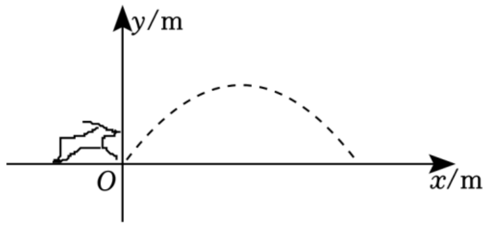
16.（3 分）野兔跳跃时的空中运动路线可以看作是抛物线的一部分．建立如图所示的平面直角坐标系，通过对某只野兔一次跳跃中水平距离 x（单位：m）与竖直高度 y（单位：m）进行的测量，得到以下数据：

水平距离 x/m	0	0.4	1	1.4	2	2.4	2.8
竖直高度 y/m	0	0.48	0.9	0.98	0.8	0.48	0

根据上述数据，回答下列问题：

①野兔本次跳跃的最远水平距离为 ________m，最大竖直高度为 ________m；

②已知野兔在高速奔跑时，某次跳跃最远水平距离为 $3m$，最大竖直高度为 $1m$．若在野兔起跳点前方 $2m$ 处有高为 $0.8m$ 的篱笆，则野兔此次跳跃 ______（填“能”或“不能”）跃过篱笆．



三、解答题（17 题 8 分，18-21 题每题 5 分，22-24 题每题 6 分，25-26 题 7 分）

17.（8 分）解方程：

（1）$x^2-2x-8=0$；

（2）$2x^2-4x+1=0$．

18.（5 分）已知 a 是方程 $2x^2-7x-1=0$ 的一个根，求代数式 $a(2a-7)+5$ 的值．

19.（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=a(x-3)^2-1$ 经过点（2，1）．

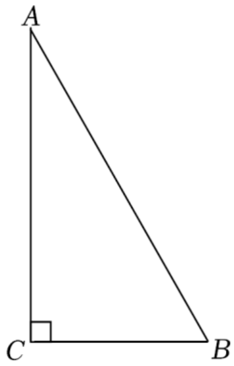
（1）求该抛物线的表达式；

（2）将该抛物线向上平移 ______个单位后，所得抛物线与 x 轴只有一个公共点．

20.（5 分）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，将线段 CA 绕点 C 逆时针旋转 60°，得到线段 CD，连接 AD，BD．

（1）依题意补全图形；

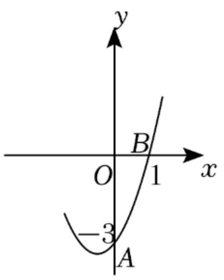
（2）若 $BC=1$，求线段 BD 的长．



21.（5 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的部分图象经过点 A（0，－3），B（1，0）．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）结合函数图象，直接写出 $y<0$ 时，x 的取值范围．



22．（6 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2-m)x+1-m=0$．

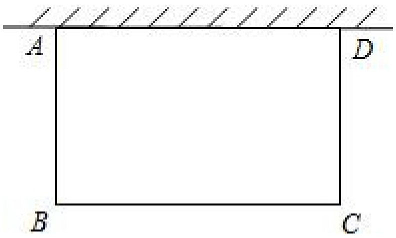
（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若 $m<0$，且此方程的两个实数根的差为 3，求 m 的值．

23．（6 分）为了改善小区环境，某小区决定在一块一边靠墙（墙长为 25m）的空地上修建一个矩形小花园 $ABCD$．小花园一边靠墙，另三边用总长 40m 的栅栏围住，如图所示．设矩形小花园 AB 边的长为 xm，面积为 ym^2．

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）当 x 为何值时，小花园的面积最大？最大面积是多少？



24．（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点（4，3）在抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a>0$）上．

（1）求该抛物线的对称轴；

（2）已知 $m>0$，当 $2-m\leqslant x\leqslant 2+2m$ 时，y 的取值范围是 $-1\leqslant y\leqslant 3$．求 a，m 的值；

（3）在（2）的条件下，是否存在实数 n，使得当 $n-2<x<n$ 时，y 的取值范围是 $3n-3<y<3n+5$．若存在，直接写出 n 的值；若不存在，请说明理由．

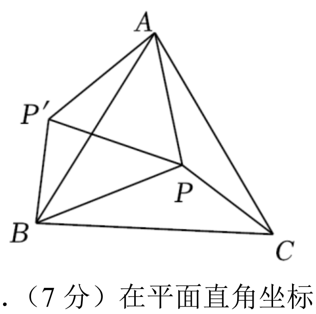
25．（7 分）如图，在等边三角形 ABC 中，点 P 为△ABC 内一点，连接 AP，BP，CP，将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 AP'，连接 PP'，BP'．

（1）用等式表示 BP'与 CP 的数量关系，并证明；

（2）当∠BPC＝120° 时，

①直接写出∠$P'BP$ 的度数为 _______；

②若 M 为 BC 的中点，连接 PM，用等式表示 PM 与 AP 的数量关系，并证明．



26．（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，对于第一象限的 P，Q 两点，给出如下定义：若 y 轴正半轴上存在点 P'，x 轴正半轴上存在点 Q'，使 $PP'\parallel QQ'$，且∠1＝∠2＝α（如图 1），则称点 P 与点 Q 为α－关联点．

（1）在点 Q_1（3，1），Q_2（5，2）中，与（1，3）为45°﹣关联点的是 ______；

（2）如图2，M（6，4），N（8，4），P（m，8）（m>1）．若线段 MN 上存在点 Q，使点 P 与点 Q 为45°﹣关联点，结合图象，求 m 的取值范围；

（3）已知点 A（1，8），B（n，6）（n>1）．若线段 AB 上至少存在一对30°﹣关联点，直接写出 n 的取值范围．

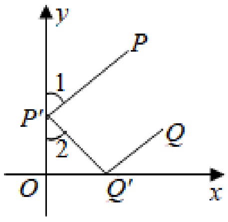


图1

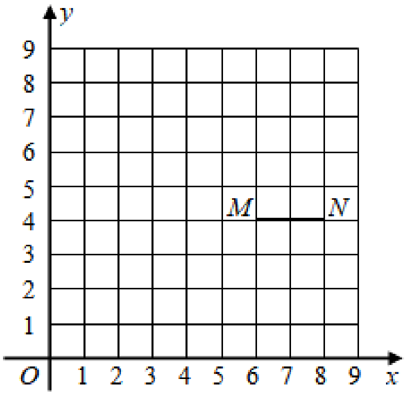
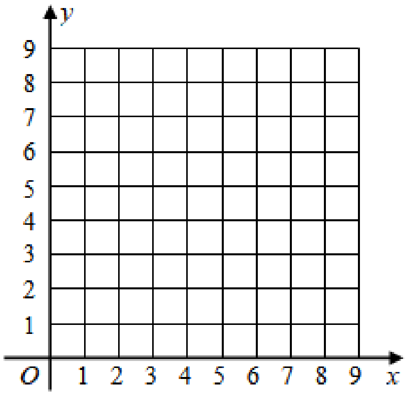


图2



备用图

参考答案

一、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1.【分析】根据中心对称图形的概念判断．把一个图形绕某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．

【解答】解：选项 A、B、D 都不能找到这样的一个点，使图形绕某一点旋转 180°后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形，

选项 C 能找到这样的一个点，使图形绕某一点旋转 180°后与原来的图形重合，所以是中心对称图形，

故选：C．

【点评】本题考查的是中心对称图形的概念，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．

2.【分析】根据多项式的项和单项式的系数定义得出答案即可．

【解答】解：一元二次方程 $2x^2+x-5=0$ 的二次项系数，一次项系数，常数项分别是 2，1，-5，

故选：B．

【点评】本题考查了单项式的系数定义，多项式的项的定义和一元二次方程的一般形式，注意：找多项式的各项系数时带着前面的符号．

3.【分析】根据“左加右减，上加下减”的法则进行解答即可．

【解答】解：把抛物线 $y=x^2$ 向上平移 3 个单位，得到的抛物线是 $y=x^2+3$．

故选：D．

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知二次函数图象平移的法则是解答此题的关键．

4.【分析】两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反．由此可求点 A 关于原点对称的点的坐标．

【解答】解：∵点 A（2，3），

∴A 点关于原点对称的点为（-2，-3），

故选：D．

【点评】本题考查关于原点对称的点的坐标，熟练掌握关于原点对称的点的坐标特点是解题的关键．

5.【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征，一次函数图象上点的坐标特征，二次函数函数图象上点的坐标特征判断即可．

【解答】解：A、直线 $y=x+1$ 不经过点（0，0），故不符合题意；

B、抛物线 $y=x^2$ 经过点（0，0），故符合题意；

C、抛物线 $y=(x-4)^2$ 不经过点（0，0），故不符合题意；

D、双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 不经过点（0，0），故不符合题意；

故选：B．

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，一次函数图象上点的坐标特征，二次函数函数图象上点的坐标特征，熟练掌握各函数图象上点的坐标特征是解题的关键．

6.【分析】两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后即可得出答案．

【解答】解：$x^2+4x=1$，

则 $x^2+4x+4=1+4$，即 $(x+2)^2=5$，

故选：D.

【点评】本题主要考查解一元二次方程的方法－－配方法，掌握配方法是解本题的关键.

7.【分析】由较长一段的长为 xm 可得出较短一段的长为（$2-x$）m，根据较长一段的长的平方等于较短一段的长与原绳长的积，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【解答】解：∵较长一段的长为 xm，

∴较短一段的长为（$2-x$）m.

依题意得：$x^2=2(2-x)$.

故选：A.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

8.【分析】结合函数图象，利用二次函数的对称性，恰当使用排除法，以及根据函数图象与不等式的关系可以得出正确答案.

【解答】解：①由图象可知，抛物线开口向下，所以①正确；

②若当 $x=-2$ 时，y 取最大值，则由于点 A 和点 C 到 $x=-2$ 的距离相等，这两点的纵坐标应该相等，但是图中点 A 和点 C 纵坐标显然不相等，所以②错误，从而排除掉 A 和 D；

剩下的选项中都有③，所以③是正确的；

易知直线 $y=kx+c$（$k\neq0$）经过点 A，C，当 $kx+c>ax^2+bx+c$ 时，x 的取值范围是 $x<-4$ 或 $x>0$，从而④错误.

故选：B.

【点评】本题考查二次函数的图象，二次函数的对称性，以及二次函数与一元二次方程，二次函数与不等式的关系，属于较复杂的二次函数综合选择题.

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

9.【分析】直接根据顶点式的特点求顶点坐标.

【解答】解：∵$y=-3(x-1)^2+2$ 是抛物线的顶点式，

∴顶点坐标为（1，2）.

故答案为（1，2）.

【点评】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，即在 $y=a(x-h)^2+k$ 中，对称轴为 $x=h$，顶点坐标为（h，k）.

10.【分析】根据二次函数的性质，开口向上，要求 a 值大于 0 即可.

【解答】解：抛物线 $y=x^2-2$ 开口向上，且与 y 轴的交点为（0，-2）.

故答案为：$y=x^2-2$（答案不唯一）.

【点评】本题考查了二次函数的性质，开放型题目，答案不唯一，所写抛物线的 a 值必须大于 0.

11.【分析】将点 A，B 坐标代入解析式求解.

【解答】解：将 A（﹣1，y_1），B（2，y_2）代入 $y=2x^2$ 得 $y_1=2$，$y_2=8$，

∴$y_1<y_2$．

故答案为：<．

【点评】本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系，掌握二次函数与方程的关系．

12．【分析】利用根的判别式进行计算，令△>0即可得到关于 k 的不等式，解答即可．

【解答】解：∵关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个不相等的实数根，

∴△>0，

即 $4-4k>0$，

$k<1$．

故答案为：$k<1$．

【点评】本题考查了根的判别式，要知道一元二次方程根的情况与判别式△的关系：

（1）△>0⇔方程有两个不相等的实数根；

（2）△=0⇔方程有两个相等的实数根；

（3）△<0⇔方程没有实数根．

13．【分析】设 C（m，n）．利用中点坐标公式构建方程组求解即可．

【解答】解：设 C（m，n）．

∵线段 BA 绕点 B 旋转180°得到线段 BC，

∴$AB=BC$，

∵点 A（﹣2，0），点 B（0，1），

∴$\frac{-2+m}{2}=0$，$\frac{0+n}{2}=1$，

∴$m=2$，$n=2$，

∴C（2，2）．

【点评】本题考查坐标与图形变化﹣旋转，中点坐标公式等知识，解题的关键是学会利用参数解决问题即可．

14．【分析】根据旋转的性质得到 $AD=AB$，$\angle ADE=\angle B$，根据等腰三角形的性质得到 $\angle ADB=\angle B$，求得 $\angle ADE=\angle ADB=70°$．

【解答】解：由旋转的性质可知，$AD=AB$，$\angle ADE=\angle B$，

∴$\angle ADB=\angle B$，

∵$\angle BAD=30°$，

∴$\angle ADE=\angle ADB=\angle B=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$，

故答案为：75°．

【点评】本题考查的是旋转变换的性质、等腰三角形的性质，掌握旋转的性质是解题的关键．

15．【分析】根据“边角边”证明△ADE 和△DCF 全等，根据全等三角形对应角相等可得 $\angle DAE=\angle CDF$，

然后求出$\angle APD=90^\circ$，取AD的中点O，连接OP，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得点P到AD的中点的距离不变，再根据两点之间线段最短可得C、P、O三点共线时线段CP的值最小，然后根据勾股定理列式求出CO，再求解即可．

【解答】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AD=CD$，$\angle ADE=\angle DCF=90^\circ$，

在$\triangle ADE$和$\triangle DCF$中，

$$\begin{cases}AD=CD\\ \angle ADE=\angle BCD,\\ DE=CF\end{cases}$$

∴$\triangle ADE\cong\triangle DCF$（$SAS$），

∴$\angle DAE=\angle CDF$，

∵$\angle CDF+\angle ADF=\angle ADC=90^\circ$，

∴$\angle ADF+\angle DAE=90^\circ$，

∴$\angle APD=90^\circ$，

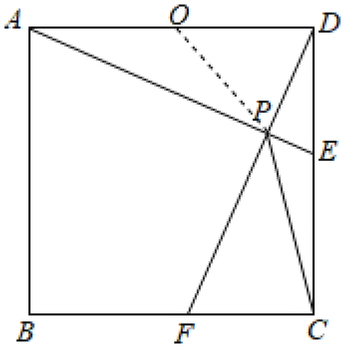
取AD的中点O，连接OP，则$OP=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 2=1$（不变），

根据两点之间线段最短得C、P、O三点共线时线段CP的值最小，

在Rt$\triangle COD$中，根据勾股定理得，$CO=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以，$CP=CO-OP=\sqrt{5}-1$．

故答案为：90°，$\sqrt{5}-1$．



【点评】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，勾股定理，确定出点P到AD的中点的距离是定值是解题的关键．

16．【分析】①由表格中的数据可知，野兔本次跳跃的最远水平距离为$2.8m$，最大竖直高度为$0.98m$，于是得出问题的答案；

②设野兔某次跳跃的抛物线为$y=ax^2+bx$，则$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}\\ -\frac{b^2}{4a}=1\end{cases}$，可求得$y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x$，当$x=2$时，$y=\frac{8}{9}$，由$\frac{8}{9}m>0.8m$，可知野兔此次跳跃能跃过篱笆，于是得到问题的答案．

【解答】解：①∵当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=2.8$ 时，$y=0$，且 $\frac{1}{2}\times2.8=1.4$，

∴野兔本次跳跃的最远水平距离为 2.8m，抛物线的对称轴为直线 $x=1.4$，

∴当 $x=1.4$ 时，$y_{最大}=0.98$，

∴野兔本次跳跃的最大竖直高度为 0.98m，

故答案为：2.8，0.98．

②设野兔某次跳跃的抛物线为 $y=ax^2+bx$，

∵$y=ax^2+bx=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}$，且抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，最大值为 1，

∴$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}\\-\frac{b^2}{4a}=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-\frac{4}{9}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$，

∴$y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x$，

当 $x=2$ 时，$y=-\frac{4}{9}\times4+\frac{4}{3}\times2=\frac{8}{9}$，

∵$\frac{8}{9}m>0.8m$，

∴野兔此次跳跃能跃过篱笆，

故答案为：能．

【点评】此题重点考查二次函数的图象与性质、二次函数的应用等知识，正确地求出二次函数的解析式是解题的关键．

三、解答题（17 题 8 分，18-21 题每题 5 分，22-24 题每题 6 分，25-26 题 7 分）

17.【分析】（1）将方程左边分解因式，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可；

（2）移项，系数化成 1，平分，开方，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可．

【解答】解：（1）$x^2-2x-8=0$，

$(x-4)(x+2)=0$，

$x-4=0$ 或 $x+2=0$，

解得：$x_1=4$，$x_2=-2$；

（2）$2x^2-4x+1=0$，

$2x^2-4x=-1$，

$x^2-2x=-\frac{1}{2}$，

配方得：$x^2-2x+1=-\frac{1}{2}+1$，

$(x-1)^2=\frac{1}{2}$，

开方得：$x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$，

解得：$x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查了解一元二次方程，能选择适当的方法解方程是解此题的关键.

18.【分析】根据一元二次方程的解的定义得到 $2a^2-7a-1=0$，则 $2a^2-7a=1$，再把 $a(2a-7)+5$ 变形为 $2a^2-7a+5$，然后利用整体代入的方法计算.

【解答】解：∵a 是方程 $2x^2-7x-1=0$ 的一个根，

∴$2a^2-7a-1=0$，

∴$2a^2-7a=1$，

∴$a(2a-7)+5=2a^2-7a+5=1+5=6$.

【点评】本题考查一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根，所以，一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

19.【分析】(1) 把点（2，1）代入抛物线的解析式即可得出答案；

(2) 求出抛物线的顶点坐标，根据纵坐标即可得出答案.

【解答】解：(1) 把点（2，1）代入 $y=a(x-3)^2-1$ 中，

得：$1=a(2-3)^2-1$，

解得 $a=2$，

∴$y=2(x-3)^2-1$；

(2) 由 (1) 知抛物线的顶点坐标为（3，－1），

∴把该抛物线向上平移 1 个单位后，与 x 轴的交点个数位 1，

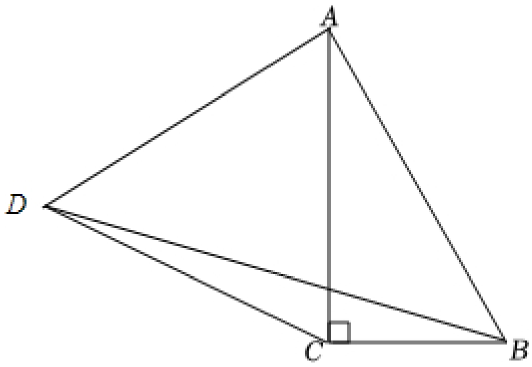
故答案为：1.

【点评】本题主要考查二次函数的图象与性质，关键是要或用待定系数法求函数的解析式.

20.【分析】(1) 根据题意，利用旋转的性质即可补全图形；

(2) 根据含 30 度角的直角三角形和旋转的性质可得 $AD=AC=\sqrt{3}$，$\angle DAB=90°$，再利用勾股定理即可解决问题.

【解答】解：(1) 如图，即为补全的图形；



（2）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，

∵$\angle BAC=30°$，$BC=1$，

∴$AB=2BC=2$，

∴$AC=\sqrt{3}$，

由旋转可知：$\angle DAC=60°$，$AD=AC=\sqrt{3}$，

∴$\angle DAB=\angle DAC+\angle\angle AC=90°$，

∴$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

【点评】本题考查了作图－旋转变换，含 30 度角的直角三角形的性质，勾股定理，掌握旋转的性质是解决本题的关键.

21.【分析】（1）通过待定系数法求解.

（2）求出抛物线与 x 轴交点坐标，通过抛物线开口向上求解.

【解答】解：（1）将 A（0，－3），B（1，0）代入 $y=ax^2+2x+c$ 得$\begin{cases}-3=c\\0=a+2+c\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\c=-3\end{cases}$，

∴$y=x^2+2x-3$.

（2）令 $x^2+2x-3=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

∴抛物线经过（－3，0），（1，0），

∵抛物线开口向上，

∴$y<0$ 时，$-3<x<1$.

【点评】本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握待定系数法求函数解析式，掌握二次函数与方程及不等式的关系.

22.【分析】（1）证明一元二次方程的判别式大于等于零即可；

（2）用 m 表示出方程的两个根，比较大小后，作差计算即可.

【解答】（1）证明：∵一元二次方程 $x^2+(2-m)x+1-m=0$，

∴$\Delta=(2-m)^2-4(1-m)$

$=m^2-4m+4-4+4m=m^2$.

∵$m^2\geqslant 0$，

∴ $\Delta\geqslant 0$.

∴该方程总有两个实数根.

（2）解：∵一元二次方程 $x^2+(2-m)x+1-m=0$，

解方程，得 $x_1=-1$，$x_2=m-1$.

∵$m<0$，

∴ $-1>m-1$.

∵该方程的两个实数根的差为 3，

∴ $-1-(m-1)=3$.

∴$m=-3$.

【点评】本题考查了一元二次方程根的判别式，方程的解法，熟练掌握判别式，并灵活运用实数的非负性是解题的关键.

23.【分析】(1) 根据矩形的面积公式写出函数解析即可；

（2）根据函数的性质求最值即可.

【解答】解：（1）由题意得：$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$，

∵$0<40-2x\leqslant 25$，

∴$\frac{15}{2}\leqslant x<20$，

∴y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x^2+40x$（$\frac{15}{2}\leqslant x<20$）；

（2）由（1）知，$y=-2x^2+40x=-2(x-10)^2+200$，

∵ $-2<0$，$\frac{15}{2}\leqslant x<20$，

∴当 $x=10$ 时，y 有最大值，最大值为 200，

答：当 $x=10$ 时，小花园的面积最大，最大面积是 $200m^2$.

【点评】本题考查的是二次函数的实际应用．关键是根据函数的性质求最值.

24.【分析】(1) 利用对称点与对称轴的关系：对称点的横坐标之和等于对称轴的 2 倍，即可求出该抛物线的对称轴.

（2）分别讨论 $2-m\leqslant x\leqslant 2+2m$ 的取值范围与对称轴的位置，分别求出不同情况下 y 取最大值与最小值时，对应的 x 的取值，进而求出 a，m 的值.

（3）由于 y 的取值范围是 $3n-3<y<3n+5$，取不到最大值和最小值，故不包含对称轴，分别讨论 $n-2<x<n$ 在对称轴的左右两侧即可.

【解答】解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+3$，

∴$x=0$ 时，$y=3$，

∴抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 过点（0，3），

∵抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 过点（4，3），

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

（2）∵抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 的对称轴为直线 $x=2$，

∴ $-\frac{b}{2a}=2$，即 $b=-4a$①.

∵ $m>0$，

∴ $2-m<2<2+2m$.

∵ $a>0$，抛物线开口向上，

∴当 $x=2$ 时，函数值在 $2-m<x<2+2m$ 上取得最小值 -1.

即 $4a+2b+3=-1$②.

联立①②，解得 $a=1$，$b=-4$.

∴抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$，即 $y=(x-2)^2-1$.

∵ $m>0$，

∴当 $2-m\leqslant x\leqslant 2$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=2-m$ 时取得最大值，

当 $2\leqslant x\leqslant 2+2m$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x=2+2m$ 时取得最大值，

∵对称轴为 $x=2$，

∴ $x=2-m$ 与 $x=2+m$ 时的函数值相等.

∵ $2<2+m<2+2m$，

∴当 $x=2+2m$ 时的函数值大于当 $x=2+m$ 时的函数值，即 $x=2-m$ 时的函数值.

∴当 $x=2+2m$ 时，函数值在 $2-m<2<2+2m$ 上取得最大值 3.

代入有 $4m^2-1=3$，舍去负解，得 $m=1$.

（3）存在，$n=1$.

∵当 $n-2<x<n$ 时，y 的取值范围是 $3n-3<y<3n+5$，y 无法取到最大值与最小值，

∴关于 x 的取值范围一定不包含对称轴，

①当 $n\leqslant 2$ 时，$n-2<x<n$ 在对称轴的左侧，

∵二次函数开口向上，

∴ $x=n-2$ 时，y 有最大值，$x=n$ 时，y 有最小值，

由题意可知：$\begin{cases}(n-2)^2-4(n-2)+3=3n+5\\ n^2-4n+3=3n-3\end{cases}$，解得：$n=1$，

故 $n=1$，

②当 $n-2\geqslant 2$ 时，$n-2<x<n$ 在对称轴的右侧，

∵二次函数开口向上，

∴ $x=n-2$ 时，y 有最小值，$x=n$ 时，y 有最大值，

由题意可知：$\begin{cases}(n-2)^2-4(n-2)+3=3n-3\\ n^2-4n+3=3n+5\end{cases}$，此时 n 无解，

故不符合题意，

∴$n=1$.

【点评】本题是二次函数综合题，考查了二次函数的性质，二次函数的最值，解方程组，待定系数法，正确进行分类讨论是解题的关键.

25.【分析】（1）利用 SAS 证明△ABP'≌△ACP，即可得出答案；

（2）①由三角形内角和定理知$\angle 8+\angle 6=180°-\angle BPC=60°$，再利用角度之间的转化对$\angle P'BP$ 进行转化，$\angle P'BP=\angle 4+\angle 7=\angle 5+60°-\angle 8=60°-\angle 6+60°-\angle 8$，从而解决问题；

②延长 PM 到 N，使 $PM=MN$，连接 BN，CN，得出四边形 $PBNC$ 为平行四边形，则 $BN/\!/CP$ 且 $BN=CP$，再利用 SAS 证明△$P'BP$≌△NBP，得 $PP'=PN=2PM$.

【解答】解：（1）$BP'=CP$，

证明：∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=AC$，$\angle BAC=60°$，

∴$\angle 2+\angle 3=60°$

∵将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 $60°$ 得到 AP'，

∴$AP=AP'$，$\angle PAP'=60°$，

∴$\angle 1+\angle 2=60°$，

∴$\angle 1=\angle 3$，

∴△ABP'≌△ACP（SAS），

∴$BP'=CP$；

（2）①当$\angle BPC=120°$时，

则$\angle 8+\angle 6=180°-\angle BPC=60°$，

∵△ABP'≌△ACP，

∴$\angle 4=\angle 5$，

∴$\angle P'BP=\angle 4+\angle 7$

$=\angle 5+60°-\angle 8$

$=60°-\angle 6+60°-\angle 8$

$=120°-（\angle 6+\angle 8）$

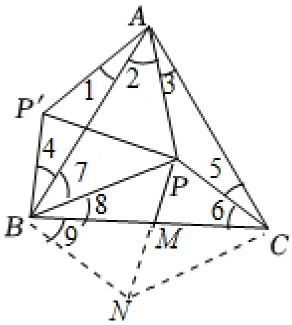
$=120°-60°$

$=60°$，

故答案为：$60°$；

②$AP=2PM$，理由如下：

延长 PM 到 N，使 $PM=MN$，连接 BN，CN，



∵M为BC的中点，

∴$BM=CM$，

∴四边形$PBNC$为平行四边形，

∴$BN\parallel CP$且$BN=CP$，

∴$BN=BP'$，$\angle 9=\angle 6$，

又∵$\angle 8+\angle 6=60^\circ$，

∴$\angle 8+\angle 9=60^\circ$，

∴$\angle PBN=60^\circ=\angle P'BP$，

又∵$BP=BP$，$P'B=BN$，

∴$\triangle P'BP\cong\triangle NBP$（$SAS$），

∴$PP'=PN=2PM$，

又∵$\triangle APP'$为正三角形，

∴$PP'=AP$，

∴$AP=2PM$.

【点评】本题是几何变换综合题，主要考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质等知识，利用倍长中线构造平行四边形是解题的关键.

26.【分析】（1）过点P作$PA\perp y$轴于点A，过点Q作$QB\perp x$轴于点B，由P点的坐标得出$\triangle APP'$和$\triangle P'Q'O$都是等腰直角三角形，得出$\triangle Q'BQ$是等腰直角三角形，则可得出答案；

（2）由点P与点Q为45°－关联可知点P'为（0，$8-m$），Q'为（$8-m$，0），求出关联点所在直线表达式，将$y=4$代入求出横坐标，根据点Q在线段MN上可表示出横坐标的取值范围，即可得出答案；

（3）由题意画出图形，由直角三角形的性质可得出答案.

【解答】解：（1）过点P作$PA\perp y$轴于点A，过点Q作$QB\perp x$轴于点B，

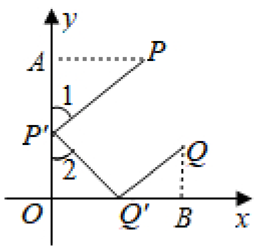


图1

∵P（1，3），$\alpha=45^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=45^\circ$，

$\therefore \angle PP'Q'=90^\circ$，$\angle P'Q'O=45^\circ$，

$\therefore \triangle APP'$和$\triangle P'Q'O$都是等腰直角三角形，

$\therefore AP'=AP=1$，

$\therefore OQ'=OP'=AO-AP'=3-1=2$，

$\because PP'\parallel QQ'$，

$\therefore \angle P'Q'Q=90^\circ$，

$\therefore \angle QQ'B=45^\circ$，

$\therefore \triangle Q'BQ$是等腰直角三角形，

$\therefore$当$Q'B=BQ=1$时，点Q的坐标为（3，1），

$\therefore$与（1，3）为45°－关联点的是Q_1（3，1）.

故答案为Q_1；

（2）如图所示，

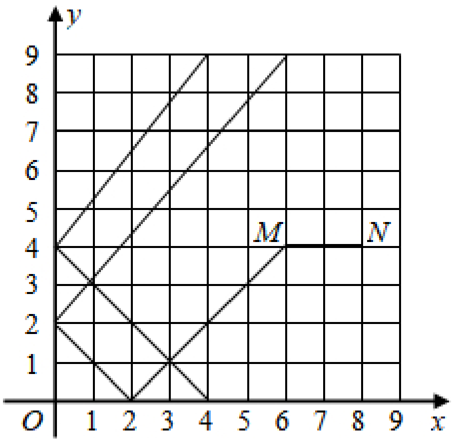


图2

对点P（m，8）（$m>1$）而言，依定义，要使$\angle 1=\angle 2=\alpha=45^\circ$，

则有：P'为（0，$8-m$），Q'为（$8-m$，0），

于是函数$y=x-(8-m)$（$x>8-m$）上的点Q即为点P的45°－关联点.

若当点Q在线段MN上时，$y_Q=4$，则有$x_Q=12-m$.

由$6\leqslant x_Q\leqslant 8$，得$6\leqslant 12-m\leqslant 8$，

解得$4\leqslant m\leqslant 6$.

（3）$n>2\sqrt{3}$.

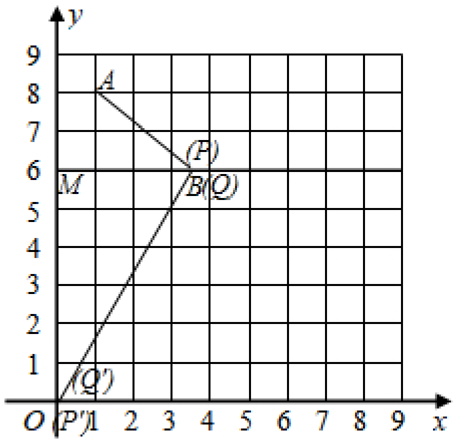


图3

∵点 Q 和点 P 在线段 AB 上，

当点 P 离 B 越近时，点 Q 的横坐标越小，

∴当点 P，Q，B 三点重合时，点 P'，点 Q'和点 O 重合，

过点 P 作 $PM\perp y$ 轴于点 M，

∵$\alpha=30°$，

∴$\angle BOM=30°$，

∵B（n，6），

∴$OM=6$，

∴$n=BM=OM\cdot\tan30°=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$，

∴当线段 AB 上至少存在一对 30°﹣关联点时，$n>2\sqrt{3}$.

∴n 的取值范围是 $n>2\sqrt{3}$.

【点评】本题考查一次函数综合题，考查了等腰直角三角形的性质，点 P 与点 Q 为 α﹣关联点的新定义等知识，解题的关键是理解题意，学会利用特殊位置解决问题，属于中考压轴题.