

2022 - 2023 学年第一学期昌平区双城融合学区
初二年级数学学科期中质量抽测
数学试卷



2022. 10

本试卷共 6 页, 三道大题, 28 个小题, 满分 100 分. 考试时间 120 分钟. 考生务必将答案填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效. 考试结束后, 请交回答题卡.

一、选择题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 下列实数是无理数的是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 0 D. 9

2. 36 的平方根是

- A. 6 B. -6 C. 4 或 9 D. ± 6

3. 二次根式 $\sqrt{a-1}$ 中, 字母 a 的取值范围是

- A. $a < 1$ B. $a \leq 1$ C. $a \geq 1$ D. $a > 1$

4. 下列分式中, 是最简分式的是

- A. $\frac{x^2}{x}$ B. $\frac{2x}{4x-2y}$ C. $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ D. $\frac{2}{x-3}$

5. 下列各式从左到右的变形正确的是

- A. $\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$ B. $\frac{b}{a} = \frac{b+c}{a+c}$ C. $\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2}$ D. $\frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2}$

6. 若最简二次根式 $\sqrt{x+3}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2x}$ 是同类二次根式, 则 x 的值为

- A. $x=0$ B. $x=1$ C. $x=3$ D. $x=2$

7. 如果把分式 $\frac{2x}{3x-2y}$ 中的 x, y 都扩大 3 倍, 那么分式的值

- A. 扩大 3 倍 B. 不变 C. 缩小 3 倍 D. 扩大 2 倍

8. 张华在一次数学活动中, 利用“在面积一定的矩形中, 正方形的周长最短”的结论, 推导出

“式子 $x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值是 2”. 其推导方法如下: 在面积是 1 的矩形中设矩形的一边长为



x ，则另一边长是 $\frac{1}{x}$ ，矩形的周长是 $2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ；当矩形成为正方形时，就有 $x = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，

解得 $x = 1$ ，这时矩形的周长 $2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4$ 最小，因此 $x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值是 2。模仿张

华的推导，你求得式子 $\frac{x^2 + 4}{x} (x > 0)$ 的最小值是

- A. 2 B. 8 C. 6 D. 4

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若分式 $\frac{x-2}{x}$ 的值是零，则 x 的值是_____。

10. 比较大小： $3\sqrt{2}$ _____ $2\sqrt{3}$ 。

11. $\frac{1}{2a^2b}$ 与 $\frac{2}{3ab^3c}$ 的最简公分母是_____。

12. 在实数范围内分解因式 $x^3 - 5x =$ _____。

13. 若 $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ ，请写出一个符合条件的的值_____。

14. 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，则分式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值为_____。

15. 若 $\sqrt{14}$ 的小数部分为 a ，整数部分为 b ，则 $a \cdot (\sqrt{14} + b)$ 的值为_____。

16. 对于正数 x ，规定 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 。 $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$ ，则：

(1) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____；

(2) $f(2020) + f(2019) + \dots + f(2) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{1}{2020}\right) =$ _____。



三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）

17. 计算： $(\frac{b}{2a})^2 \div (-\frac{a}{3b}) \times \frac{4a}{b^3}$.

18. 计算： $\frac{a+2b}{a-b} - \frac{2a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$



19. 计算： $\sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}} \div \sqrt{ab}$

20. 计算： $(\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-2x+1}) \div \frac{1}{x}$

21. 计算： $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{27} + \sqrt[3]{-8}$

22. 解方程 $\frac{2x}{x+3} + 1 = \frac{7}{2x+6}$

23. 先化简分式 $(\frac{a^2+2a+1}{a^2-1} - \frac{1}{1-a}) \div \frac{a^2+2a}{a-1}$, 再从 $-2, -1, 1, \sqrt{2}$ 这 4 个数中选择一个合适的数作为 a 的值代入求值.



24. 列方程解应用题

2022 年北京市教育委员会印发《关于推进“互联网+基础教育”的工作方案》的通知.《方案》中指出:双师课堂是在空中课堂基础上的深化,将传统单师授课模式变革为名师团队支持下新型教学场景.某校为响应国家号召,利用暑期在各班安装能够进行双师教学的电脑.该校南楼安装的 48 台由甲队完成,北楼安装的 30 台由乙队完成.已知甲队比乙队每天多安装 3 台,且两队同时开工,恰好同时完成任务.甲、乙两队每天各安装能够进行双师教学多少台?

25. 我们之前学习有理数时, 知道两个数的乘积为 1 则这两个数互为倒数. 在学习二次根式的过程中, 小明研究发现有一些特殊的无理数之间具有互为倒数的关系. 例如: 由

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1, \text{ 可得 } \sqrt{2}+1 \text{ 与 } \sqrt{2}-1 \text{ 互为倒数, 即 } \frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$\text{类似地, } (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1, \text{ 可得 } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

根据小明发现的规律, 解决下列问题:

(1) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=$ _____, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$ _____ (n 为正整数)

(2) 若 $\frac{1}{2\sqrt{3}+a}=2\sqrt{3}-a$, 则 $a=$ _____

(3) 求 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ 的值.



26.现场学习：先阅读下面的材料，然后解答题：通过观察，发现方程：

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2} \text{ 的解为 } x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}; \quad x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3} \text{ 的解为 } x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3};$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4} \text{ 的解为 } x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{4};$$

(1) 猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{5}$ 的解是_____；

(2) 猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的解是_____；

(3) 用上述方法求关于 x 的方程 $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = a + \frac{1}{a + 1}$ 的解.



27. 小石根据学习“数与式”积累的经验,想通过“由特殊到一般”的方法探究下面二次根式的运算规律. 下面是小石的探究过程,请补充完整:

(1) 具体运算,发现规律.

特例 1: $\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$

特例 2: $\sqrt{2-\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 - 2}{5}} = \sqrt{\frac{2 \times (5-1)}{5}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}},$

特例 3: $\sqrt{3-\frac{3}{10}} = \sqrt{\frac{3 \times 10 - 3}{10}} = \sqrt{\frac{3 \times (10-1)}{10}} = 3\sqrt{\frac{3}{10}},$

特例 4: $\sqrt{4-\frac{4}{17}} = 4\sqrt{\frac{4}{17}},$

特例 5: $\sqrt{5-\frac{5}{26}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (填写运算结果);

(2) 观察、归纳,得出猜想.

如果 n 为正整数,用含 n 的式子表示上述的运算规律为: $\underline{\hspace{2cm}};$

(3) 证明你的猜想.

(4) 应用运算规律:

①化简: $\sqrt{9-\frac{9}{82}} \times \sqrt{\frac{164}{3}} = \underline{\hspace{2cm}};$

②若 $\sqrt{a-\frac{a}{65}} = 8\sqrt{\frac{8}{b}}$ (a, b 均为正整数), 则 $a-b$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

28. 定义：如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式，则称这个分式为“和谐分式”。如： $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ ，则 $\frac{x+1}{x-1}$ 是“和谐分式”。

(1) 下列分式中，属于“和谐分式”的是_____ (填序号)：

① $\frac{x+3}{3}$ ② $\frac{x-5}{x}$ ③ $\frac{x-1}{x+2}$ ④ $\frac{x+1}{x^2}$

(2) 请将“和谐分式” $\frac{x^2+6x+3}{x+3}$ 化为一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式，并写出化简过程：

(3) 应用：先化简 $\left(x - \frac{x}{x+1}\right) \div \frac{x^2-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x+1}{x^2+6x}$ ，并求 x 取什么整数时，该式的值为整数。