2022 北京北大附中初二（下）期中

数　　学

一、选择题（每小题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的．）

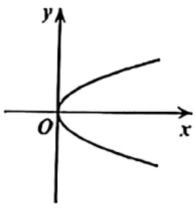
1. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是（　）

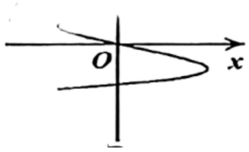
A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{8}$　　C. $\sqrt{4}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

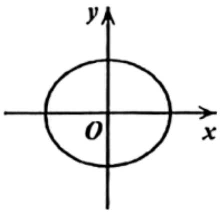
2. 下列四组线段中，可以构成直角三角形的是（　）

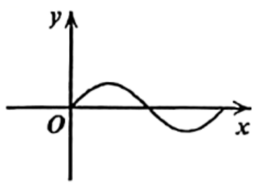
A. 1，1，1　　B. 2，3，4　　C. 1，2，3　　D. 5，12，13

3. 下列曲线中，表示 y 是 x 的函数的是（　）

A. 

B. 

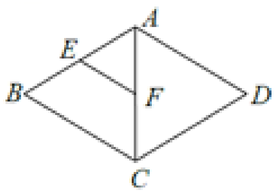
C. 

D. 

4. 下列各式中，运算正确的是（　　）

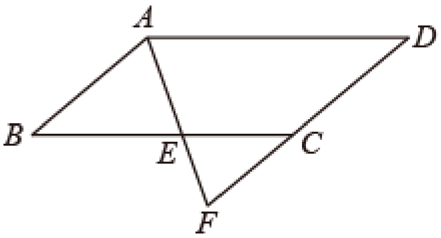
A. $\sqrt{(-2)^2}=-2$　　B. $3\sqrt{3}-\sqrt{3}=3$　　C. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

5. 如图，在菱形 *ABCD* 中，*E*、*F* 分别是 *AB*、*AC*　中点，若 *EF*=2，则菱形 *ABCD* 的周长为(　　)



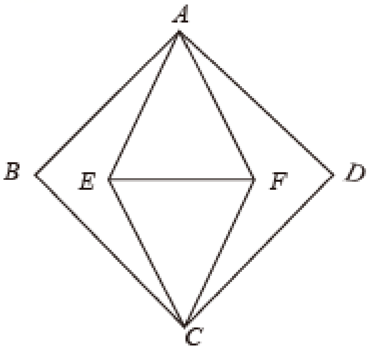
A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 20

6. 如图，E 是平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点，且 $AB=BE$，连接 AE，并延长 AE 与 DC 的延长线交于点 F，如果 $\angle F=70°$，那么 $\angle B$ 的度数是（ ）



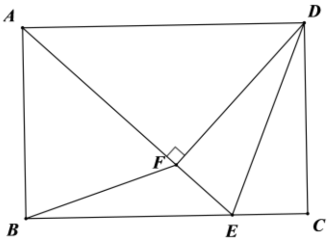
A. 30°C　　B. 40°C　　C. 50°C　　D. 70°C

7. 如图，正方形 *ABCD*　面积为 8，菱形 *AECF* 的面积为 4，则 *EF* 的长是（　）



A. 4　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. 1

8. 如图，点 E 为矩形 $ABCD$ 的边 BC 长上的一点，作 $DF\perp AE$ 于点 F，且满足 $DF=AB$．下面结论：①$\triangle DEF\cong\triangle DEC$；②$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}$；③$AF=AB$；④$BE=AF$．其中正确的结论是（　）



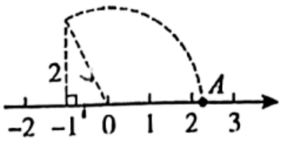
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

9. 函数 $y=\sqrt{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

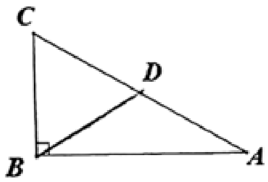
10. 已知▱$ABCD$ 中，$\angle A+\angle C=210^\circ$，则$\angle B$ 的度数是________.

11. 如图，数轴上点 A 所表示的数为 a．则 a 的值是______.

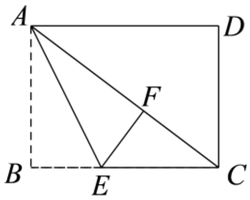


12. 已知直角三角形的两边长分别为 3、4．则第三边长为________.

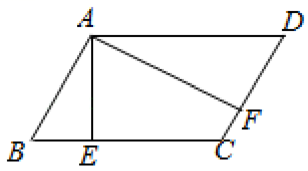
13. 如图，三角形花园的边界 AB，BC 互相垂直，若测得 $\angle A=30^\circ$，BC 的长度为 40m，则边界 AC 的中点 D 与点 B 的距离是______m.



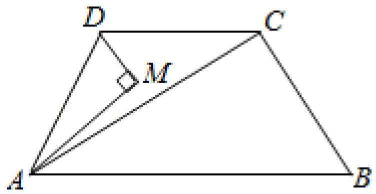
14. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，E 是 BC 边上一点，将$\triangle ABE$ 沿 AE 翻折，点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 F 处，则 BE 的长为________.



15. 如图，平行四边形　周长为20cm，$AE\perp BC$于E，$AF\perp CD$于F，$AE=2$cm，$AF=3$cm，平行四边形$ABCD$的面积为______cm^2.



16. 如图，四边形ABCD中，AB∥CD，∠ABC＝60°，AD＝BC＝CD＝4，点M是四边形ABCD内的一个动点，满足∠AMD＝90°，则点M到直线BC的距离的最小值为______.



三、解答题

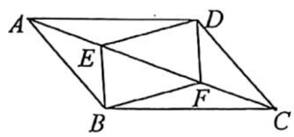
17. 计算：

（1）$\sqrt{12}+\sqrt{15}\div\sqrt{5}$

（2）$\left(2\sqrt{6}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\times\sqrt{3}-\sqrt{32}$

18. 如图，在▱$ABCD$中，E，F是对角线AC上的两点，且$AF=CE$.

求证：$DE\parallel BF$.

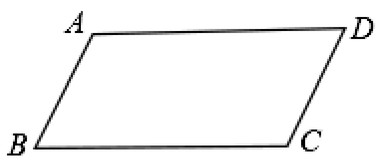


19. 阅读下面材料：

在数学课上，老师提出如下问题：

已知：如图，四边形$ABCD$是平行四边形.

求作：菱形$AECF$，使点E，F分别在BC，AD上.



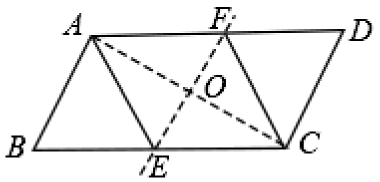
小军　作法如下：

（1）连接AC；

（2）作AC的垂直平分线EF分别交BC，AD于E，F；

（3）连接AE，CF，

所以四边形$AECF$是菱形.



老师说："小军的作法正确．"以下是一种证明思路，请结合作图过程补全填空由作图和已知可以得到：

$\triangle AOF \cong \triangle COE$

$\therefore AF = CE$

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AF \parallel CE$

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形

（依据：____）

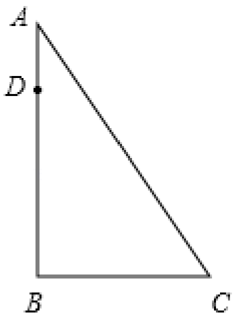
∵EF 垂直平分 AC

∴________________

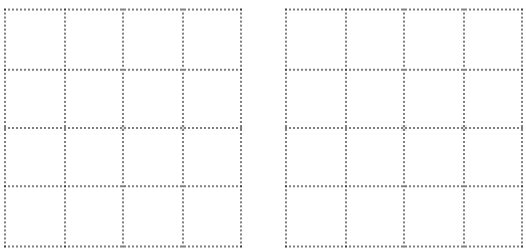
∴四边形 $AECF$ 是菱形（依据：____）

四、解答题

20. 如图，在树上距地面 10m 的 D 处有两只猴子，它们同时发现地面上 C 处有一筐水果，一只猴子从 D 处向上爬到树顶 A 处，然后利用拉在 A 处的滑绳 AC 滑到 C 处，另一只猴子从 D 处先滑到地面 B，再由 B 跑到 C，已知两猴子所经过的路程都是 15m，求树高 AB.



21. 如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小格的顶点叫做格点，边长为 1，以格点为顶点的三角形叫做格点三角形，分别按下列要求作图.



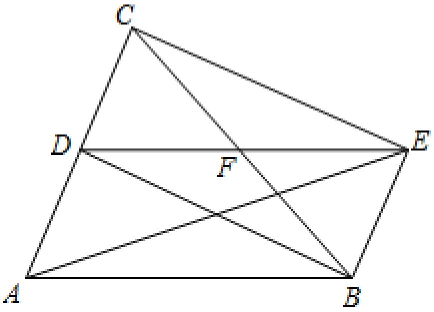
（1）在图①中，画一个格点三角形 ABC，使得 $AB=\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{5}$，$CA=5$；

（2）在（1）的条件下，直接写出 AC 边上的高；

（3）在图②中，画一个等腰直角三角形，使它的三边长都是无理数.

五、解答题

22. 如图，已知▱$ABED$，延长 AD 到 C 使 $CD=AD$．连接 BC，CE，BC 交 DE 于点 F．若 $AB=BC$．



（1）求证：四边形 $BECD$ 是矩形；

（2）连接 AE，若 $\angle BAC=60°$，$AB=4$，求 AE 的长．

23. 阅读下面材料：

我们已经学习了《二次根式》和《乘法公式》，聪明的你可以发现：

当 $a>0$，$b>0$ 时：

$\because \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$

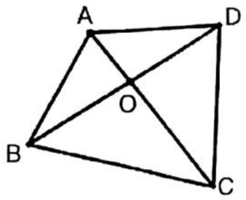
$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号．

请利用上述结论解决以下问题：

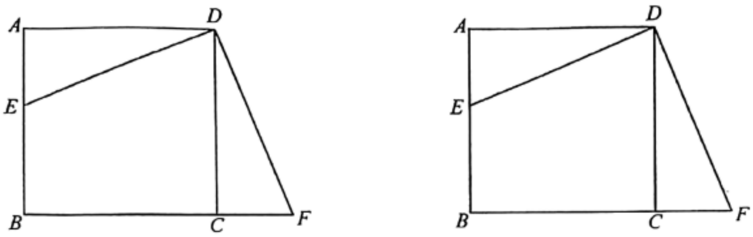
（1）请直接写出答案：当 $x>0$ 时，$x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为______．当 $x<0$ 时，$x+\dfrac{1}{x}$ 的最大值为______；

（2）若 $y=\dfrac{x^2+2x+10}{x+1}\left(x>-1\right)$，求 y 的最小值；

（3）如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$\triangle AOB$、$\triangle COD$ 的面积分别为 4 和 10，求四边形 $ABCD$ 面积的最小值．



24. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上　一动点，点 F 在边 BC 的延长线上，且 $CF=AE$，连接 DE，DF．



（1）求证：$DE\perp DF$；

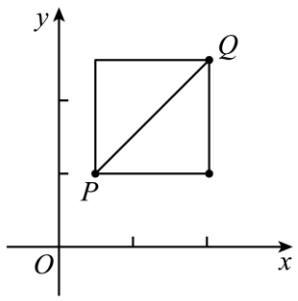
（2）连接 EF，取 EF 中点 G，连接 DG 并延长交 BC 于 H，连接 BG．

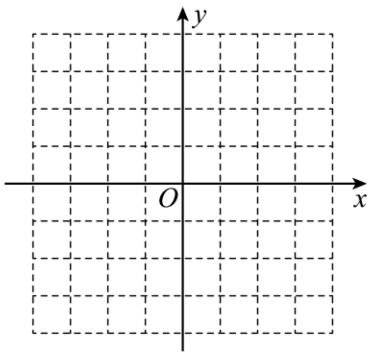
①依题意，补全图形；

②求证：$BG=DG$；

③若 $\angle EGB=45°$，用等式表示线段 BG，HG 与 AE 之间的数量关系，请直接写出结论．

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P，如果点 Q 满足条件：以线段 PQ 为对角线的正方形，且正方形的边分别与 x 轴，y 轴平行，那么称点 Q 为点 P 的“和谐点”，如图所示．已知点 $D(1,2)$，$E(-1,2)$，$F(-1,-2)$．





备用图

（1）已知点 A 的坐标是 $(2,1)$．

①在 D，E，F 中，是点 A 的“和谐点”的是______；

②已知点 B 的坐标为 $(0,b)$，如果点 B 为点 A 的“和谐点”，求 b 的值；

（2）已知点 $C(m,0)$，如果线段 DE 上存在一个点 M，使得点 M 是点 C 的“和谐点”，直接写出 m 的取值范围．

参考答案

一、选择题（每小题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的．）

1. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是（　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{8}$　　C. $\sqrt{4}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据最简二次根式的概念：被开方数不含分母，且不含能开得尽方的因数或因式，逐一判断即可．

【详解】解：A、$\sqrt{5}$，被开方数不含分母，且不含能开得尽方的因数或因式，故此选项符合题意；

B、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故该选项不合题意；

C、$\sqrt{4}=2$，故该选项不合题意；

D、$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故该选项不合题意；

故选：A．

【点睛】本题主要考查了最简二次根式的概念，熟悉掌握最简二次根式的概念是解题的关键．

2. 下列四组线段中，可以构成直角三角形的是（　）

A. 1，1，1　　B. 2，3，4　　C. 1，2，3　　D. 5，12，13

【答案】D

【解析】

【分析】由勾股定理的逆定理，只要验证两小边的平方和等于最长边的平方即可．

【详解】解：A、$1^2+1^2\neq 1^2$，不能构成直角三角形，不符合题意；

B、$2^2+3^2\neq 4^2$，不能构成直角三角形，不符合题意；

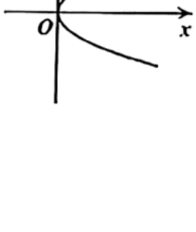
C、$1+2=3$，不能构成三角形，不符合题意；

D、$5^2+12^2=13^2$，能构成直角三角形，符合题意．

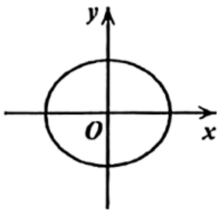
故选：D．

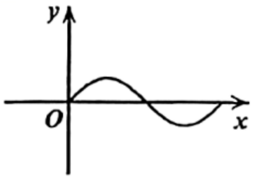
【点睛】本题考查勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．

3. 下列曲线中，表示 y 是 x 的函数的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的概念，对于自变量 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，即可判断.

【详解】A、B、C 对于自变量 x 的每一个值，y 不是都有唯一的值与它对应，所以不能表示 y 是 x 的函数，不符合题意；

C、对于自变量 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，所以能表示 y 是 x 的函数，故 D 符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了函数的概念，熟练掌握函数的概念是解题的关键.

4. 下列各式中，运算正确的是（　　）

A. $\sqrt{(-2)^2}=-2$　　B. $3\sqrt{3}-\sqrt{3}=3$　　C. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的性质以及化简运算法则求解即可.

【详解】解：∵ $\sqrt{(-2)^2}=2$，

∴选项 A 不符合题意；

∵$3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

∴选项 B 不符合题意；

∵$2+\sqrt{3}\neq 2\sqrt{3}$，

∴选项 C 不符合题意；

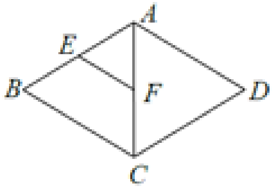
∵ $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

∴选项 D 符合题意.

故选：D.

【点睛】此题考查了二次根式的性质以及二次根式的化简和加减运算，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质以及二次根式的化简和加减运算法则.

5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AC 的中点，若 EF=2，则菱形 $ABCD$ 的周长为(　　)

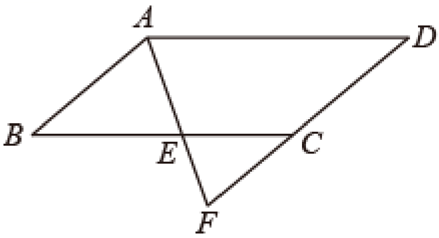


A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 20

【答案】C

【解析】
【分析】根据三角形的中位线定理求出 BC，再根据菱形的四条边都相等解答.
【详解】∵E、F 分别是 AB、AC 的中点，
∴EF 是△ABC 的中位线，
∴$BC=2EF=2\times2=4$，
∴菱形 $ABCD$ 的周长$=4\times4=16$.
故选：C.
【点睛】本题考查了菱形的性质，三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半的性质，熟记各性质是解题的关键.

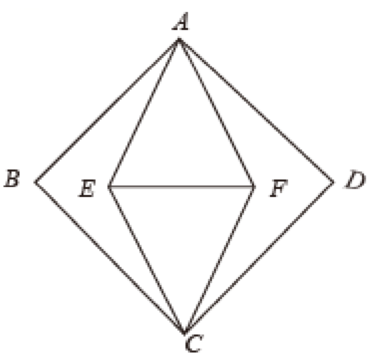
6. 如图，E 是平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点，且 $AB=BE$，连接 AE，并延长 AE 与 DC 的延长线交于点 F，如果 $\angle F=70°$，那么 $\angle B$ 的度数是（ ）



A 30°C　　B. 40°C　　C. 50°C　　D. 70°C

【答案】B
【解析】
【分析】根据平行四边形的性质即可得出 $\angle BAF=\angle F=70°$，再根据等边对等角，得出 $\angle BAE=\angle BEA=70°$，最后根据三角形内角和即可得出答案.
【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形
$\therefore AB // CD$
$\therefore \angle BAF=\angle F=70°$
$\because AB=BE$
$\therefore \angle BAE=\angle BEA=70°$
$\therefore \angle B=180°-\angle BAE-\angle BEA=180°-70°-70°=40°$
故选 B.
【点睛】本题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的性质以及三角形内角和，熟练掌握性质定理是解题的关键.

7. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为 8，菱形 $AECF$ 的面积为 4，则 EF 的长是（ ）



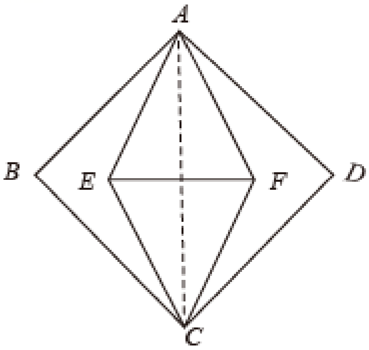
A. 4　　　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　　　C. 2　　　　　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】连接 AC，由正方形 $ABCD$ 的面积求出 AC 的长，再由菱形的面积等于对角线乘积的一半求出 EF 的长即可.

【详解】解：连接 AC，如下图所示：



∵正方形 $ABCD$ 的面积为 8，

∴$AD=2\sqrt{2}$，

∴在 Rt△ACD 中，由勾股定理知：

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4,$$

∵菱形 $AECF$ 的面积为 4，

∴$\frac{1}{2}\times EF\times AC=4$，

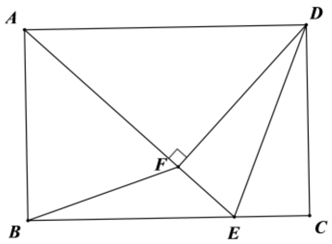
∴$EF=2$.

故答案选：C.

【点睛】此题考查了正方形的性质，熟练掌握正方形和菱形的面积计算公式是解决此题的关键.

8. 如图，点 E 为矩形 $ABCD$ 的边 BC 长上的一点，作 $DF\perp AE$ 于点 F，且满足 $DF=AB$．下面结论：

①△DEF≌△DEC；②$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}$；③$AF=AB$；④$BE=AF$．其中正确的结论是（　）



A 1个　　　　　　B. 2个　　　　　　C. 3个　　　　　　D. 4个

【答案】C

【解析】

【分析】证明 Rt△DEF≌Rt△DEC 得出①正确；在证明△ABE≌△DFA 得出 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}$；②正确；得出 BE＝AF，④正确，③不正确；即可得出结论.

【详解】解：∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠C＝∠ABE＝90°，AD∥BC，AB＝CD，

∵DF＝AB，

∴DF＝CD，

∵DF⊥AE，

∴∠DFA＝∠DFE＝90°，

在Rt△DEF和Rt△DEC中，$\begin{cases} DE=DE \\ DF=DC \end{cases}$，

∴Rt△DEF≌Rt△DEC（HL），①正确；

∵AD∥BC，

∴∠AEB＝∠DAF，

在△ABE和△DFA中，$\begin{cases} \angle ABE=\angle DFA \\ \angle AEB=\angle DAF \\ AB=DF \end{cases}$，

∴△ABE≌△DFA（AAS），

∴$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}$；②正确；

∴BE＝AF，④正确，③不正确；

正确的结论有3个，

故选C．

【点睛】本题考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质等知识；熟练掌握矩形的性质，证明三角形全等是解题的关键．

二、填空题

9. 函数$y=\sqrt{x-2}$中，自变量x的取值范围是_____．

【答案】$x\geq 2$

【解析】

【分析】根据被开方式是非负数列式求解即可．

【详解】解：依题意，得$x-2\geq 0$，

解得：$x\geq 2$，

故答案为$x\geq 2$．

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围，函数有意义时字母的取值范围一般从几个方面考虑：①当函数解析式是整式时，字母可取全体实数；②当函数解析式是分式时，考虑分式的分母不能为0；③当函数解析式是二次根式时，被开方数为非负数．④对于实际问题中的函数关系式，自变量的取值除必须使表达式有意义外，还要保证实际问题有意义．

10. 已知▱$ABCD$中，$\angle A+\angle C=210^\circ$，则$\angle B$的度数是________．

【答案】75°

【解析】

【分析】根据平行四边形对角相等求出∠A=105°，再根据邻角互补即可求出答案.

【详解】▱$ABCD$ 中，∠A=∠C，∠A+∠B=180°，

∵ $\angle A+\angle C=210^{\circ}$，

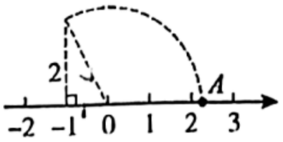
∴∠A=105°，

∴∠B=180°-∠A=75°，

故答案为：75°.

【点睛】此题考查平行四边形的性质：对角相等，邻角互补.

11. 如图，数轴上点 A 所表示的数为 a．则 a 的值是______.



【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据图示，可得：点 A 是以原点为圆心，以 $\sqrt{5}$ 为半径的圆与数轴的交点，再根据两点间的距离的求法，求出 a 的值为多少即可.

【详解】$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

∴点 A 是以原点为圆心，以 $\sqrt{5}$ 为半径的圆与数轴的交点，

∴a=$\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

【点睛】此题主要考查了实数与数轴，正确应用勾股定理是解题关键.

12. 已知直角三角形的两边长分别为 3、4．则第三边长为________.

【答案】5 或 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】已知直角三角形两边的长，但没有明确是直角边还是斜边，因此分两种情况讨论.

【详解】解：①长为 3 的边是直角边，长为 4 的边是斜边时，

第三边的长为：$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$；

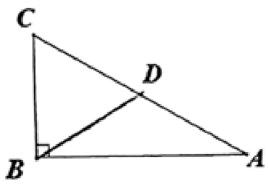
②长为 3、4 的边都是直角边时，

第三边的长为：$\sqrt{4^2+3^2}=5$；

∴第三边的长为：$\sqrt{7}$ 或 5，

故答案为：$\sqrt{7}$ 或 5.

13. 如图，三角形花园的边界 AB，BC 互相垂直，若测得 $\angle A=30^{\circ}$，BC 的长度为 40m，则边界 AC 的中点 D 与点 B 的距离是______m.



【答案】40

【解析】

【分析】由含30°角的直角三角形的性质可得 $AC=80m$，根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半可得结论.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$BC=40m$，

$\therefore AC=2BC=80m$，

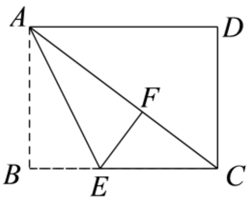
$\because D$ 是 AC 中点，

$\therefore BD=\frac{1}{2}AC=40m$，

故答案为：40.

【点睛】本题主要考查了直角三角形斜边中线的性质，熟练掌握直角三角形斜边中线等于斜边的一半是解题的关键.

14. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，E 是 BC 边上一点，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折，点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 F 处，则 BE 的长为________.



【答案】3

【解析】

【分析】利用矩形的性质得到 $BC=AD=8$，$\angle ABC=90°$，再根据勾股定理计算出 $AC=10$，接着利用折叠的性质得 $\angle AFE=\angle ABE=90°$，$AF=AB=6$，$BE=FE$，所以 $CF=4$，设 $BE=x$，则 $EF=x$，$CE=8-x$，利用勾股定理得到 $x^2+4^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，即可得出结论.

【详解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore BC=AD=8$，$\angle ABC=90°$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\because \triangle ABE$ 沿 AE 翻折，点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 F 处，

$\therefore \angle AFE=\angle ABE=90°$，$AF=AB=6$，$BE=FE$，

$\therefore CF=10-6=4$，

设 $BE=x$，则 $EF=x$，$CE=8-x$，

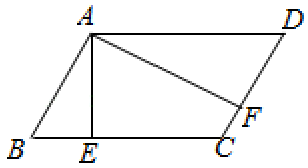
在 $Rt\triangle CEF$ 中，$x^2+4^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，

$\therefore BE=3$，

故答案为 3.

【点睛】本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．也考查了矩形的性质．

15. 如图，平行四边形的周长为 20cm，$AE\perp BC$ 于 E，$AF\perp CD$ 于 F，$AE=2$cm，$AF=3$cm，平行四边形 $ABCD$ 的面积为_____cm^2．



【答案】12

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得 $BC+CD=10$，根据面积公式可得 $2BC=3CD$，然后联立组成方程组可得 CD 和 BC 的长，进而可得面积．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB=CD$，$BC=AD$，

∵周长为 20cm，

∴$BC+CD=10$①，

∵$AE\perp BC$ 于 E，$AF\perp CD$ 于 F，$AE=2$cm，$AF=3$cm，

∴$2BC=3CD$②，

联立①②得 $\begin{cases} BC+CD=10 \\ 2CB=3CD \end{cases}$，

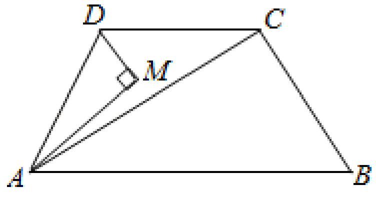
解得：$\begin{cases} CD=4 \\ CB=6 \end{cases}$，

∴平行四边形 $ABCD$ 的面积为：$AE\times CB=2BC=2\times6=12$，

故答案为：12．

【点睛】此题主要考查了平行四边形的性质，解题的关键是掌握平行四边形的对边相等，平行四边形的面积等于它的底和这个底上的高的积．

16. 如图，四边形 ABCD 中，AB∥CD，∠ABC＝60°，AD＝BC＝CD＝4，点 M 是四边形 ABCD 内的一个动点，满足∠AMD＝90°，则点 M 到直线 BC 的距离的最小值为_____．

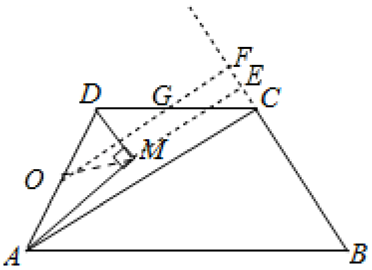


【答案】$3\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】取 AD 的中点 O，连接 OM，过点 M 作 ME⊥BC 交 BC 的延长线于 E，点点 O 作 OF⊥BC 于 F，交 CD 于 G，则 OM+ME≥OF．求出 OM，OF 即可解决问题．

【详解】解：取 AD 的中点 O，连接 OM，过点 M 作 ME⊥BC 交 BC 的延长线于 E，点点 O 作 OF⊥BC 于 F，交 CD 于 G，则 OM+ME≥OF.



∵∠AMD＝90°，AD＝4，OA＝OD，

∴OM＝$\frac{1}{2}$AD＝2，

∵AB∥CD，

∴∠GCF＝∠B＝60°，

∴∠DGO＝∠CGE＝30°，

∵AD＝BC，

∴∠DAB＝∠B＝60°，

∴∠ADC＝∠BCD＝120°，

∴∠DOG＝30°＝∠DGO，

∴DG＝DO＝2，

∵CD＝4，

∴CG＝2，

∴OG＝2$\sqrt{3}$，GF＝$\sqrt{3}$，OF＝3$\sqrt{3}$，

∴ME≥OF－OM＝3$\sqrt{3}$－2，

∴当 O，M，E 共线时，ME 的值最小，最小值为 3$\sqrt{3}$－2.

【点睛】本题考查解直角三角形，垂线段最短，直角三角形斜边中线的性质等知识，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，属于中考常考题型.

三、解答题

17. 计算：

（1）$\sqrt{12}+\sqrt{15}\div\sqrt{5}$

（2）$\left(2\sqrt{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times\sqrt{3}-\sqrt{32}$

【答案】（1）$3\sqrt{3}$

（2）$3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）先化简二次根式并计算二次根式的除法，然后进行二次根式的加法运算即可；

（2）先计算二次根式的乘法并化简二次根式，然后进行二次根式的加减运算即可.

【小问 1 详解】

解：原式＝$2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$；

【小问 2 详解】

解：原式＝$2\sqrt{18}+\sqrt{2}-\sqrt{32}$

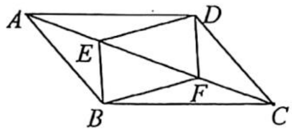
$=6\sqrt{2}+\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查二次根式的混合运算，熟练掌握运算法则是解题的关键．

18. 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 是对角线 AC 上的两点，且 $AF=CE$．

求证：$DE \parallel BF$．



【答案】见解析

【解析】

【分析】连接 BD，交 AC 于点 O，利用平行四边形的性质得出 $OA=OC$，$OB=OD$，进而得出四边形 $EBFD$ 是平行四边形即可．

【详解】证明：连接 BD，交 AC 于点 O，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

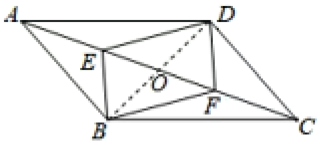
∴$OA=OC$，$OB=OD$，

∵$AF=CE$，

∴$OF=OE$，

∴四边形 $EBFD$ 是平行四边形，

∴$DE\parallel BF$．



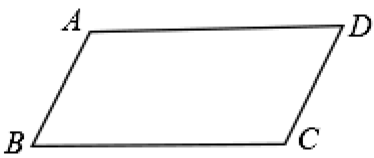
【点睛】此题主要考查了平行四边形的判定与性质，正确得出四边形 $EBFD$ 是平行四边形是解题关键．

19. 阅读下面材料：

在数学课上，老师提出如下问题：

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

求作：菱形 $AECF$，使点 E，F 分别在 BC，AD 上．



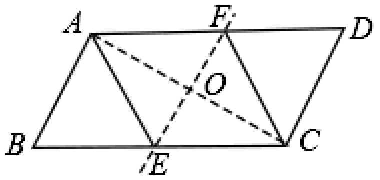
小军的作法如下：

（1）连接 AC；

（2）作 AC 的垂直平分线 EF 分别交 BC，AD 于 E，F；

（3）连接 AE，CF，

所以四边形 $AECF$ 是菱形．



老师说："小军的作法正确．"以下是一种证明思路，请结合作图过程补全填空由作图和已知可以得到：

$\triangle AOF \cong \triangle COE$

$\therefore AF = CE$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AF \parallel CE$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形

（依据：________________________________）

$\because EF$ 垂直平分 AC

$\therefore$____________

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形（依据：________________________________）

【答案】有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；$AF=FC$；有一组邻边相等的平行四边形是菱形．

【解析】

【分析】首先证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，然后根据线段垂直平分线的性质和菱形的判定定理填空即可．

【详解】解：由作图和已知可以得到：$\triangle AOF\cong\triangle COE$，

$\therefore AF=CE$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AF\parallel CE$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，（依据：有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形），

$\because EF$ 垂直平分 AC，

$\therefore AF=FC$，

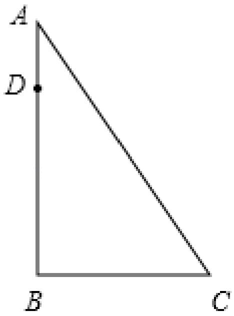
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形（依据：有一组邻边相等的平行四边形是菱形）

故答案为：有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；$AF=FC$；有一组邻边相等的平行四边形是菱形．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、线段垂直平分线的性质和菱形的判定，解决本题的关键是综合运用以上知识．

四、解答题

20. 如图，在树上距地面 10m　D 处有两只猴子，它们同时发现地面上 C 处有一筐水果，一只猴子从 D 处向上爬到树顶 A 处，然后利用拉在 A 处的滑绳 AC 滑到 C 处，另一只猴子从 D 处先滑到地面 B，再由 B 跑到 C，已知两猴子所经过的路程都是 15m，求树高 AB．



【答案】12 米

【解析】

【分析】$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，则满足 $AB^2+BC^2=AC^2$，$BC=a$（m），$AC=b$（m），$AD=x$（m），根据两只猴子经过的路程一样可得 $10+a=x+b=15$ 解方程组可以求 x 的值，即可计算树高 $=10+x$.

【详解】解：$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，

设 $BC=a$（m），$AC=b$（m），$AD=x$（m）

则 $10+a=x+b=15$（m）.

$\therefore a=5$（m），$b=15-x$（m）

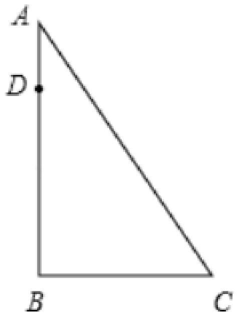
又在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得：$AB^2+BC^2=AC^2$，即 $(10+x)^2+a^2=b^2$，

$\therefore (10+x)^2+5^2=(15-x)^2$，

解得，$x=2$，即 $AD=2$（米）

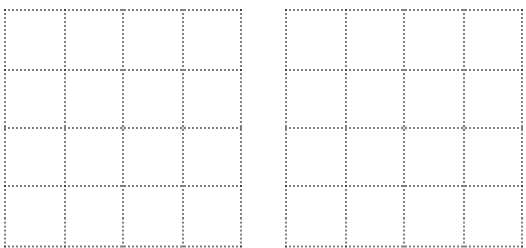
$\therefore AB=AD+DB=2+10=12$（米）

答：树高 AB 为 12 米.



【点睛】本题主要考查了勾股定理的应用，解题的关键在于能够熟练掌握勾股定理.

21. 如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小格的顶点叫做格点，边长为 1，以格点为顶点的三角形叫做格点三角形，分别按下列要求作图.



图①　　　　图②

（1）在图①中，画一个格点三角形 ABC，使得 $AB=\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{5}$，$CA=5$；

（2）在（1）的条件下，直接写出 AC 边上的高；

（3）在图②中，画一个等腰直角三角形，使它的三边长都是无理数.

【答案】（1）见解析　（2）2

（3）见解析

【解析】

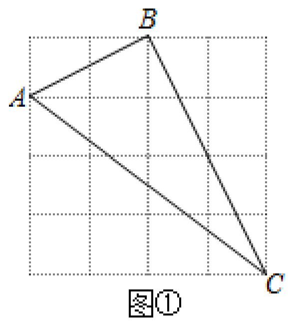
【分析】（1）根据网格特点结合勾股定理作图即可；

（2）由勾股定理的逆定理可得△ABC是以AC为斜边的直角三角形，然后利用面积法求解即可；

（3）可以作一个两条直角边是$\sqrt{5}$，斜边是$\sqrt{10}$的等腰直角三角形．

【小问1详解】

解：如图①，△ABC即为所求．



图①

【小问2详解】

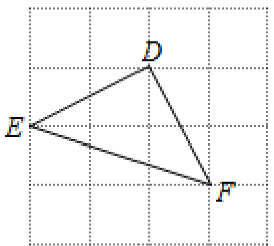
$\because \left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=5^2$，

∴图①中△ABC是以AC为斜边的直角三角形，

∴AC边上的高$=\dfrac{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5}=2$；

【小问3详解】

如图②，△DEF即为所求作．

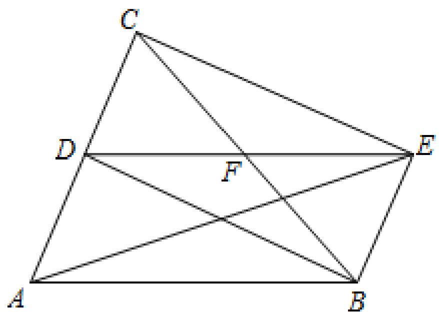


图②

【点睛】本题考查作图−应用与设计，勾股定理，勾股定理的逆定理，面积法求高等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．

五、解答题

22. 如图，已知▱$ABED$，延长AD到C使$CD=AD$．连接BC，CE，BC交DE于点F．若$AB=BC$．



（1）求证：四边形 $BECD$ 是矩形；

（2）连接 AE，若 $\angle BAC=60^{\circ}$，$AB=4$，求 AE 的长.

【答案】（1）见解析；

（2）$2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）先证明四边形 $BECD$ 为平行四边形，再根据 $AB=BC$ 得到 $BD\perp AC$，即可求证；

（2）由 $\angle BAC=60^{\circ}$ 得到 $\triangle ABC$ 为等边三角形，求得 AC、CE，再根据勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解：$\square ABED$ 中，$AD//BE$，$AD=BE$，

$\therefore CD//BE$.

又$\because CD=AD$，

$\therefore BE=CD$，点 D 为线段 AC 的中点，

$\therefore$四边形 $BECD$ 为平行四边形.

$\because AB=BC$，

$\therefore BD\perp AC$，即 $\angle BDC=90^{\circ}$，

$\therefore$平行四边形 $BECD$ 为矩形.

【小问 2 详解】

解：$\because \angle BAC=60^{\circ}$，$AB=BC$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

$\therefore AC=AB=4$，$AD=\frac{1}{2}AC=2$.

在 $Rt\triangle ADB$ 中，$AD=2, AB=4$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{3}$，

由（1）得 $BD=EC=2\sqrt{3}$，$\angle DCE=90^{\circ}$，

$\therefore AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，矩形的判定，等边三角形的判定与性质，勾股定理，熟练掌握相关性质是解题的关键.

23. 阅读下面材料：

我们已经学习了《二次根式》和《乘法公式》，聪明的你可以发现：

当 $a>0$，$b>0$ 时：

$\because \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$

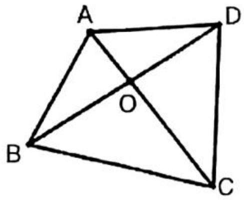
$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

请利用上述结论解决以下问题：

（1）请直接写出答案：当$x>0$时，$x+\frac{1}{x}$的最小值为______．当$x<0$时，$x+\frac{1}{x}$的最大值为______；

（2）若$y=\frac{x^2+2x+10}{x+1}(x>-1)$，求$y$的最小值；

（3）如图，四边形$ABCD$的对角线AC、BD相交于点O，$\triangle AOB$、$\triangle COD$的面积分别为4和10，求四边形$ABCD$面积的最小值．



【答案】（1）2；-2；

（2）最小值为6　（3）$14+4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】（1）根据公式计算即可；

（2）先配方，化简，运用公式计算即可；

（3）设ΔBOC的面积为x，根据ΔAOB与AOD，ΔBOC与ΔCOD为等高的三角形，且ΔAOB与ΔBOC，ΔAOD与ΔCOD为同底的三角形，得到$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COD}=S_{\Delta AOB}:S_{\Delta AOD}$，求出$S_{\Delta AOD}=\frac{40}{x}$，利用公式求面积的最小值即可．

【小问1详解】

当$x>0$时，$\frac{1}{x}>0$，

$\therefore x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，

$\therefore x+\frac{1}{x}$的最小值是2；

当$x<0$时，$-x>0$，$-\frac{1}{x}>0$，

$\therefore x+\frac{1}{x}=-(-x-\frac{1}{x})$，

$\because -x-\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot(-\frac{1}{x})}=2$，

$\therefore -(-x-\frac{1}{x})\leqslant -2$，

$\therefore x+\frac{1}{x}$的最大值为-2；

故答案为：2；-2；

【小问2详解】

$y=\frac{(x+1)^2+9}{x+1}$

$=x+1+\frac{9}{x+1}$，

$\because x>-1$，

$\therefore x+1>0$，

$\therefore y\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}=2\times 3=6$，

$\therefore y$ 的最小值为 6；

【小问 3 详解】

设 ΔBOC 的面积为 x，

$\because \Delta AOB$ 与�AOD，ΔBOC 与 ΔCOD 为等高的三角形，且 ΔAOB 与 ΔBOC，ΔAOD 与 ΔCOD 为同底的三角形，

$\therefore S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COD}=S_{\Delta AOB}:S_{\Delta AOD}$，

$\therefore x:10=4:S_{\Delta AOD}$，

$\therefore S_{\Delta AOD}=\frac{40}{x}$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $=4+10+x+\frac{40}{x}$

$\geqslant 14+2\sqrt{x\cdot\frac{40}{x}}$

$=14+2\times 2\sqrt{10}$

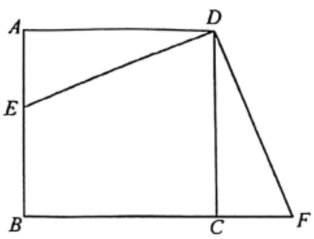
$=14+4\sqrt{10}$．

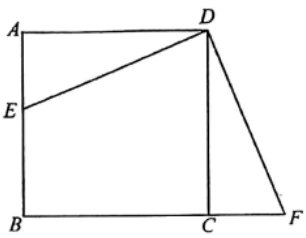
当且仅当 $x=\frac{40}{x}$，即 $x=2\sqrt{10}$ 时，取等号．

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $14+4\sqrt{10}$．

【点睛】本题考查了配方法的应用，列出四边形 $ABCD$ 面积的表达式解题的关键．

24. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上的一动点，点 F 在边 BC 的延长线上，且 $CF=AE$，连接 DE，DF．





（1）求证：$DE\perp DF$；

（2）连接 EF，取 EF 中点 G，连接 DG 并延长交 BC 于 H，连接 BG．

①依题意，补全图形；

②求证：$BG=DG$；

③若$\angle EGB=45^\circ$，用等式表示线段 BG，HG 与 AE 之间的数量关系，请直接写出结论．

【答案】（1）见解析 （2）①见解析；②见解析；③$BG^2+HG^2=4AE^2$．

【解析】

【分析】（1）证△ADE≌△CDF（SAS），得∠ADE＝∠CDF，再证∠EDF＝90°，即可得出结论；

（2）①依题意，补全图形即可；

②由直角三角形斜边上的中线性质得 $DG=\frac{1}{2}EF$，$BG=\frac{1}{2}EF$，即可得出结论；

③先证△DEF 是等腰直角三角形，得∠DEG＝45°，再证 $DG\perp EF$，$DG=\frac{1}{2}EF=EG$，$BG=\frac{1}{2}EF=EG=FG$，得∠GDF＝45°，∠EDG＝∠DEG＝45°，∠GBF＝∠GFB，然后证△CDH≌△CDF（ASA），得 CH＝CF，再由勾股定理即可求解．

【小问 1 详解】

证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=CD$，∠A＝∠B＝∠BCD＝∠ADC＝90°，

∴∠DCF＝90°，即∠A＝∠DCF，

又∵$AE=CF$，

∴△ADE≌△CDF（SAS），

∴∠ADE＝∠CDF，

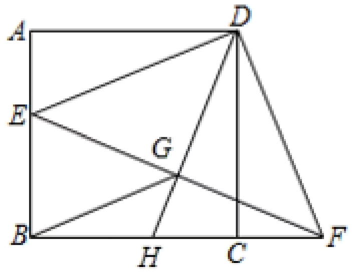
∵∠ADE＋∠CDE＝90°，

∴∠CDF＋∠CDE＝90°，即∠EDF＝90°，

∴$DE\perp DF$；

【小问 2 详解】

①解：依题意，补全图形如图所示：



②证明：由（1）可知，△DEF 和△BEF 都是直角三角形，

∵G 是 EF 的中点，

∴$DG=\frac{1}{2}EF$，$BG=\frac{1}{2}EF$，

∴$BG=DG$；

③$BG^2+HG^2=4AE^2$，

证明：由（1）可知，△ADE≌△CDF，$DE\perp DF$，

∴$DE=DF$，

∴△DEF是等腰直角三角形，

∴$\angle DEG=45°$，

∵G为EF的中点，

∴$DG\perp EF$，$DG=\frac{1}{2}EF=EG$，$BG=\frac{1}{2}EF=EG=FG$，

∴$\angle EGD=\angle HGF=\angle DGF=90°$，$\angle GDF=45°$，$\angle EDG=\angle DEG=45°$，$\angle GBF=\angle GFB$，

∵$\angle EGB=45°$，

∴$\angle GBF=\angle GFB=22.5°$，

∵$\angle DHF+\angle HFG=\angle DHF+\angle CDH=90°$，

∴$\angle HFG=\angle CDH=22\ 5°$，

∴$\angle CDF=\angle GDF-\angle HDC=22.5°=\angle CDH$，

又∵$\angle DCH=\angle DCF=90°$，$CD=CD$，

∴$\triangle CDH\cong\triangle CDF$（ASA），

∴$CH=CF$，

在$Rt\triangle GHF$中，由勾股定理得：$GF^2+HG^2=HF^2$，

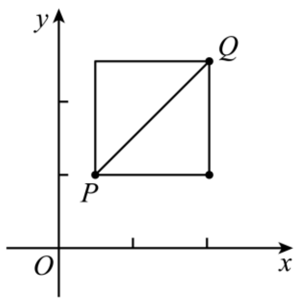
∵$HF=2CF=2AE$，$GF=BG$，

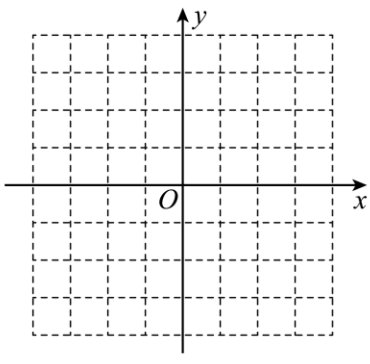
∴$BG^2+HG^2=(2AE)^2$，

∴$BG^2+HG^2=4AE^2$.

【点睛】本题是四边形综合题，考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质、等腰三角形的性质等知识；熟练掌握正方形的性质和等腰直角三角形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键，属于中考常考题型.

25. 在平面直角坐标系xOy中，对于点P，如果点Q满足条件：以线段PQ为对角线的正方形，且正方形的边分别与x轴，y轴平行，那么称点Q为点P的“和谐点”，如图所示．已知点$D(1,2)$，$E(-1,2)$，$F(-1,-2)$.





备用图

（1）已知点A的坐标是$(2,1)$.

①在D，E，F中，是点A的“和谐点”的是______；

②已知点B的坐标为$(0,b)$，如果点B为点A的“和谐点”，求b的值；

（2）已知点$C(m,0)$，如果线段DE上存在一个点M，使得点M是点C的“和谐点”，直接写出m的取值范围.

【答案】（1）①D，F；②$b=3$或-1；

（2）$-3\le m\le -1$ 或 $1\le m\le 3$．

【解析】

【分析】（1）①画出图形根据“和谐点”的定义判断即可；

②画出图形根据“和谐点”的定义确定出点 B 坐标即可；

（2）分别作出临界情况下的“和谐点”，确定出点 C（m，0）在线段 HM，NG 上，进而可得 m 的取值范围．

【小问 1 详解】

解：①如图 1 中，在 D，E，F 中，是点 A 的“和谐点”的是点 D，点 F．

故答案为：D，F；

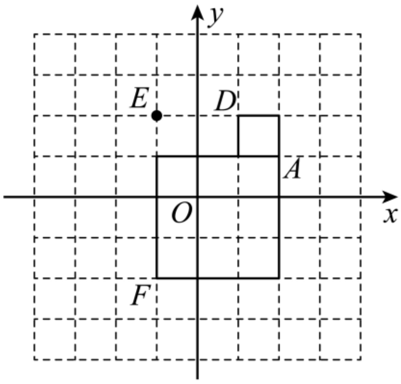


图1

②如图 2 中，∵点 B 的坐标为（0，b），点 B 为点 A 的“和谐点”，观察图形可知 B（0，3）或 B'（0，−1），

∴$b=3$ 或−1；

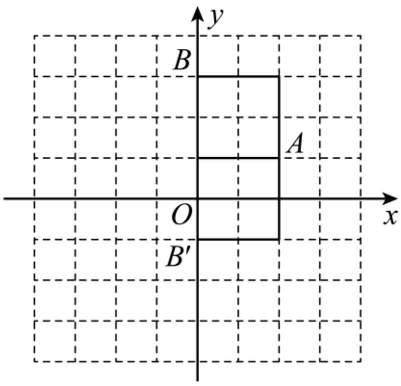


图2

【小问 2 详解】

∵点 M 在线段 DE 上，点 M 是点 $C\left(m,0\right)$ 的“和谐点”，

如图 3 中，由图可知点 C（m，0）在线段 HM，NG 上，

∴$-3\le m\le -1$ 或 $1\le m\le 3$．

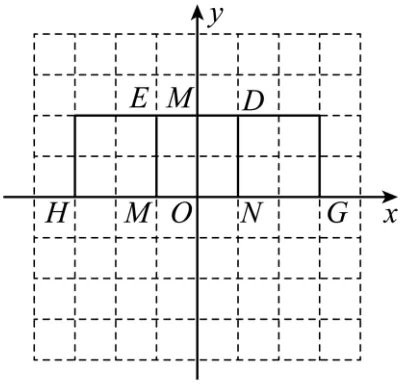


图3

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，“和谐点”的定义等知识，解题的关键是学会利用图象法解决问题，属于中考常考题型.