



大峪中学 2023—2024 第一学期高一年级  
数学学科期中考试试卷

(满分: 150 分; 时间: 120 分钟; 命题人: 高一集备组; 审核人 )

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每题 4 分, 共 40 分)

1. 已知命题  $p: \forall x > 0, x^2 + 1 \geq 1$ , 则  $\neg p$  为 ( )

- A.  $\exists x \leq 0, x^2 + 1 < 1$                       B.  $\exists x > 0, x^2 + 1 < 1$   
C.  $\exists x \leq 0, x^2 + 1 \geq 1$                       D.  $\exists x < 0, x^2 + 1 \leq 1$

2. 已知集合  $A = \{x | 1 < x < 5\}$ ,  $B = \{y | 0 < y < 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\emptyset$                       B.  $\{x | 1 < x < 3\}$                       C.  $\{x | 0 < x < 5\}$                       D.  $\{x | 1 < x < 5\}$

3. 若  $a > b, c > d > 0$ , 则一定有 ( )

- A.  $ac > bd$                       B.  $ac < bd$                       C.  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$                       D. 以上均不对

4. 下列函数中, 在定义域上既是奇函数又是减函数的为 ( )

- A.  $y = x + 1$                       B.  $y = \frac{1}{x}$                       C.  $y = -3x (x \in [-1, 2])$                       D.  $y = -x|x|$

5. 在以下区间中, 存在函数  $f(x) = x^3 + 3x - 3$  的零点是 ( )

- A.  $[-1, 0]$                       B.  $[1, 2]$                       C.  $[0, 1]$                       D.  $[2, 3]$

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ x + 1, & 1 \leq x < 2, \\ -x^2 + 5, & x \geq 2, \end{cases}$  若  $f(a) = 1$ , 则  $a =$  ( )

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1

7. 若函数  $f(x) = \begin{cases} (2-3a)x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & x > 1 \end{cases}$  是  $\mathbb{R}$  上的减函数, 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$                       B.  $(\frac{2}{3}, +\infty)$                       C.  $(\frac{2}{3}, 1]$                       D.  $[\frac{2}{3}, 1]$



8. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $f(3)=0$ , 若  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $x_1 \neq x_2$  满足  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ , 则  $xf(x) > 0$  的解集为 ( )

- A.  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$       B.  $(-3, 0) \cup (0, 3)$   
 C.  $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$       D.  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$



9. 在一次调查中, A, B, C, D 四名同学的阅读量有如下关系: A、C 阅读量之和与 B、D 的阅读量之和相同; A、B 的阅读量之和大于 C、D 的阅读量之和; D 的阅读量大于 B、C 的阅读量之和。那么 A、B、C、D 阅读量大小排列为 ( )

- A.  $A > D > B > C$     B.  $D > A > B > C$     C.  $D > B > C > A$     D.  $B > A > D > C$

10. 对  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数. 十八世纪,  $y = [x]$  被“数学王子”高斯采用, 因此得名为高斯取整函数, 则下列命题中的假命题是 ( )

- A.  $\exists x \in \mathbf{R}, x \leq [x] + 1$   
 B.  $\forall x, y \in \mathbf{R}, [x] + [y] \leq [x + y]$   
 C. 函数  $y = x - [x] (x \in \mathbf{R})$  的值域为  $[0, 1]$   
 D. 若  $\exists t \in \mathbf{R}$ , 使得  $[t^3] = 1, [t^4] = 2, [t^5] = 3, \dots, [t^n] = n - 2$  同时成立, 则正整数  $n$  的最大值是 5

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每题 5 分, 共 25 分)

11. 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$  的值域为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $f(x-2) = -9x + 13$ , 则  $f(0) =$ \_\_\_\_\_,  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

13. 已知方程  $\frac{1}{4}x^2 + (m-2)x + m = 0$  有两个不相等的正根, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$  的定义域为\_\_\_\_\_，单调递减区间为\_\_\_\_\_。

15. 对实数  $a$  和  $b$ ，定义运算“ $\otimes$ ”： $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1, \\ b, & a - b > 1. \end{cases}$  设函数

$f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = f(x) - c$  恰有两个零点，则实数  $c$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16. (15 分) 求下列不等式的解集.

(1)  $-x^2 - 2x + 3 > -2$ ;      (2)  $|5x - 9| < 1$ .      (3)  $\frac{5x - 2}{2x + 1} \geq 3$



17. (13 分) 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(1) 判断并证明函数的奇偶性;

(2) 求  $f(x) + f(\frac{1}{x})$  的值，并计算  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{4})$ .

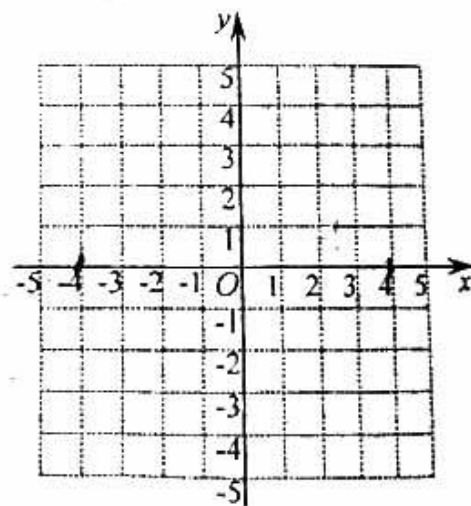
18. (14 分) 设  $f(x)$  为定义在  $(-4, 4)$  上的偶函数，当  $0 \leq x < 4$  时， $y = f(x)$  在  $x = 3$  时取得最小值  $y = -2$ ，且图象是过点  $A(1, 0)$  的抛物线的一部分。

(1) 写出函数  $f(x)$  在  $[0, 4)$  上的解析式;

(2) 求函数  $f(x)$  在  $(-4, 0)$  上的解析式;

(3) 在直角坐标系中画出函数  $f(x)$  在定义域上的

图象，并直接写出其单调增区间。



19. (13分) 小王大学毕业后, 决定利用所学专业进行自主创业. 经过市场调查, 生产某小型电子产品需投入年固定成本为2万元, 每生产 $x$ 万件, 需另投入流动成本为 $W(x)$ 万元, 在年产量不足8万件时,  $W(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$  (万元), 在年产量不小于8万件时,  $W(x) = 6x + \frac{100}{x} - 38$  (万元), 每件产品售价为5元. 通过市场分析, 小王生产的商品能当年全部售完.

(1) 写出年利润 $L(x)$  (万元) 关于年产量 $x$  (万件) 的函数解析式;

(注: 年利润=年销售收入-固定成本-流动成本)

(2) 年产量为多少万件时, 小王所获利润最大? 最大利润是多少?



20. (15分) 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{x-a}$  ( $x \neq a$ ).

(1) 若 $2f(1) = -f(-1)$ , 求 $a$ 的值;

(2) 若 $a=2$ , 用函数单调性定义证明 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减;

(3) 设 $g(x) = xf(x) - 3$ , 若方程 $g(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有唯一实数解, 求实数 $a$ 的取值范围.

21. (15分) 已知, 集合  $S_n = \{X | X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 2$ ), 对

于  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n, B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$ , 定义 A 与 B 之间的距离为:

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$

(1) 对任意的  $A \in S_2, B \in S_2$ , 请写出  $d(A, B)$  可能的值 (不必证明);

(2) 设  $P \subseteq S_4$ , 且 P 中有 4 个元素, 记 P 中所有元素间的距离的平均值为  $\bar{d}(P)$ , 求  $\bar{d}(P)$  的最大值;

(3) 对  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n, B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$ , 定义:

$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|)$ . 求证: 对任意的  $A, B, C \in S_n$ , 有以下结论成立:

①  $d(A - C, B - C) = d(A, B)$ .

②  $d(A, B)$ 、 $d(B, C)$ 、 $d(A, C)$  三个数中至少有一个是偶数.

