

2022 北京四中初二 10 月月考

数 学

一、选择题（本题共 10 小题，共 30 分）

1. 下列式子中，是分式的是（ ）

- A. $\frac{1}{2-a}$ B. $\frac{x}{\pi-3}$ C. $-\frac{x}{3}$ D. $\frac{x}{2}+y$

2. 若分式 $\frac{x}{x+1}$ 有意义时，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq -1$ B. $x \neq 0$ C. $x \neq 1$ D. $x > 1$

3. 若把 x, y 的值同时扩大为原来的 2 倍，则下列分式的值保持不变的是（ ）

- A. $\frac{xy}{x+y}$ B. $\frac{(x+y)^2}{x^2}$ C. $\frac{y+2}{x+2}$ D. $\frac{2x}{y^2-x^2}$

4. 不改变分式 $\frac{0.5x-1}{0.3x+2}$ 的值，把它的分子和分母中的各项的系数都化为整数，则所得结果为（ ）

- A. $\frac{5x-10}{3x+20}$ B. $\frac{5x-1}{3x+2}$ C. $\frac{2x-1}{3x+2}$ D. $\frac{x-2}{3x+20}$

5. 下列各分式化简后与 $\frac{m+n}{m-n}$ 相等的是（ ）

- A. $\frac{2m+n}{2m-n}$ B. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ C. $\frac{m+n+2}{m-n+2}$ D. $\frac{m^2+mn}{m^2-mn}$

6. 下列属于最简分式的是（ ）

- A. $\frac{(x-1)^2}{x-1}$ B. $\frac{x+1}{1-x^2}$ C. $\frac{3x}{x^2+3}$ D. $\frac{3}{12x}$

7. 式子 $(x-1)^0 - (x-2)^{-1}$ 中，字母 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 2$ B. $1 < x < 2$ C. $x > 1$ 且 $x \neq 2$ D. $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$

8. 下列各等式中成立的有个。（ ）

① $\frac{-(a-b)}{c} = -\frac{a-b}{-c}$;

② $\frac{-a-b}{c} = \frac{a-b}{c}$;

③ $\frac{-a+b}{c} = -\frac{a+b}{c}$;

④ $\frac{-a+b}{-c} = \frac{a-b}{c}$.

- A 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 已知 $a + \frac{1}{a} = 3$, 则 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 值是 ().

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

10. 粗心的小倩在放学回家后, 发现把数学练习册忘在教室了, 担心教室关门, 于是她跑步到学校取了练习册, 再步行回家 (取书时间忽略不计). 已知跑步速度为 x , 步行速度为 y , 则她往返一趟的平均速度是 ().

- A. x B. y C. $\frac{x+y}{2}$ D. $\frac{2xy}{x+y}$

二、填空题 (本题共 6 小题, 共 18 分)

11. 新型冠状病毒是一种形状为冠状的病毒, 其直径大约为 $0.000000102m$, 将 0.000000102 用科学记数法表示为_____.

12. 化简: $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} =$ _____.

13. 分式 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x^2-x}$ 的最简公分母是_____.

14. 若分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为 0, 则 x 的值为_____.

15. 已知 a, b 为实数, 且 $ab=1$, 设 $M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}, N = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, 则 M, N 大小关系是 M _____ N (填 =、>、<、 \geq 、 \leq).

16. 当 x 分别取 $2022, 2021, 2020, \dots, 2, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2020}, \frac{1}{2021}, \frac{1}{2022}$ 时, 计算分式 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值, 再将所得结果相加, 其和等于_____.

三、解答题 (本题共 8 小题, 共 72 分)

17. 计算: $\sqrt{9} + (\pi-2)^0 - (\frac{1}{2})^{-1}$.

18. 请你先化简, 再选取一个你喜欢的数代入并求值: $2a + (1-a) + \frac{a^2-1}{a-1}$.

19. 计算:

(1) $(\frac{x}{2y})^2 \cdot \frac{xy}{x^2} - \frac{xy}{2xy^2} \div \frac{2}{x}$

(2) $a^2b^3 \cdot (a^2b^{-2})^{-2}$

20. 先化简, 再求值: $\frac{x-3}{x^2-1} \div \frac{x-3}{x^2+2x+1} - \left(\frac{1}{x-1} + 1\right)$, 其中 $x=6$.

21. 符号 “ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ” 称为二阶行列式, 规定它的运算法则为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 例如 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$.

请按上述提供的方法化简 $\frac{a^2-1}{a+1} \cdot \frac{1}{1}$.

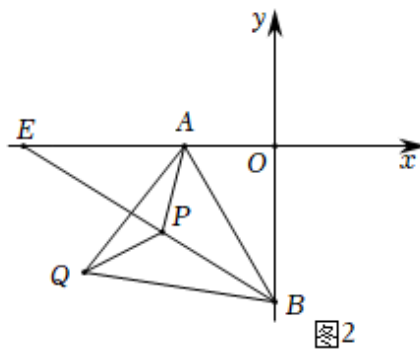
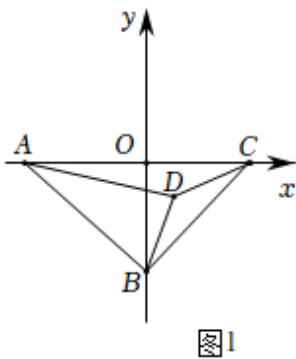
22. 甲地和乙地都种植相同品种的水稻, 甲地的种植面积为 $m^2 - 1$ 亩, 乙地的种植面积为 $(m-1)^2$ 亩 ($m > 1$), 最后两块土地收获的水稻重量都是 200kg. 请问甲地每亩水稻的产量是乙地的多少倍? 你能根据计算结果直接写出哪一块土地每亩水稻产量更高吗?

23. 定义: 若两个分式的差为 2, 则称这两个分式属于“友好分式组”.

(1) 下列三组分式: ① $\frac{3a}{a+1}$ 与 $\frac{a}{a+1}$; ② $\frac{3a}{a-1}$ 与 $\frac{a+2}{a-1}$; ③ $\frac{a}{2a+1}$ 与 $\frac{5a+2}{2a+1}$; 其中属于“友好分式组”的有 _____ (只填序号);

(2) 若 a, b 均为非零实数, 且分式 $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”求分式 $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 的值.

24. 在平面直角坐标系中, 点 $A(a, 0), \frac{a^2-1}{a-1} = 0$, 且点 A, C 关于 y 轴对称.



(1) 若点 $B(0, -1)$, 判定 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 如图1, 在 (1) 的条件下, D 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 且 $\angle DCA = \angle DCB + \angle DAC = 30^\circ$, 求证: $AB = AD$;

(3) 如图2, 若 $B(0, -\sqrt{3}), \angle ABO = 30^\circ, E(-3, 0), P$ 为线段 BE 上一动点, 以 AP 为边作等腰 $\triangle APQ$, 且 $\angle APQ = 120^\circ$, 当点 P 运动时, 求 $\triangle ABQ$ 的面积.

参考答案

一、选择题（本题共 10 小题，共 30 分）

1. 【答案】A

【解析】

【分析】利用分式定义可得答案.

【详解】解：A、 $\frac{1}{2-a}$ 的分母含字母，是分式，故此选项符合题意；

B、 $\frac{x}{\pi-3}$ 的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

C、 $-\frac{x}{3}$ 的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

D、 $\frac{x}{2}+y$ 的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查分式的定义，熟练掌握分式的定义是解答本题的关键. 判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式. 注意 π 不是字母，是常数，所以分母中含 π 的代数式不是分式，是整式.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】要使分式有意义，分式的分母不能为 0，据此可求解.

【详解】解： \because 分式 $\frac{x}{x+1}$ 有意义时，

$\therefore x+1 \neq 0$,

解得： $x \neq -1$,

故选：A

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件，解此类问题关键是令分式中分母不等于 0，求得字母的值即可.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据分式的性质化简即可；

【详解】解：A、 $\frac{2x \cdot 2y}{2x+2y} = 2 \times \frac{xy}{x+y}$ ，分式的值不能保持不变，故此选项不符合题意；

B、 $\frac{(2x+2y)^2}{(2x)^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2}$ ，分式的值保持不变，故此选项符合题意；

C、 $\frac{2y+2}{2x+2} = \frac{y+1}{x+1}$ ，分式的值不能保持不变，故此选项不符合题意；

D、 $\frac{2 \times 2x}{(2y)^2 - (2x)^2} = \frac{x}{y^2 - x^2}$ ，分式的值不能保持不变，故此选项不符合题意。

故选：B.

【点睛】本题主要考查了分式的基本性质，准确分析判断是解题的关键。

4. 【答案】A

【解析】

【分析】根据分式的基本性质：分式的分子和分母乘（或除以）同一个不等于0的整式，分式值不变，即可求出答案。

【详解】解：分子分母同时扩大10倍，即原分式 = $\frac{(0.5x-1) \times 10}{(0.3x+2) \times 10} = \frac{5x-10}{3x+20}$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查的知识点是分式的基本性质，熟记性质内容是解此题的关键。

5. 【答案】D

【解析】

【分析】把每个选项中分子分母能分解因式的分解因式，然后约分化简后即可求解。

【详解】解：A. $\frac{2m+n}{2m-n}$ 是最简二次根式，与 $\frac{m+n}{m-n}$ 不相等；

B. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ 是最简二次根式，与 $\frac{m+n}{m-n}$ 不相等；

C. $\frac{m+n+2}{m-n+2}$ 是最简二次根式，与 $\frac{m+n}{m-n}$ 不相等；

D. $\frac{m^2+mn}{m^2-mn} = \frac{m(m+n)}{m(m-n)} = \frac{m+n}{m-n}$ ，与 $\frac{m+n}{m-n}$ 相等，

故选：D.

【点睛】本题考查了分式的约分化简，熟练掌握约分的方法是解题的关键。

6. 【答案】C

【解析】

【分析】根据最简分式的概念逐项分析即可。

【详解】A、 $\frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$ ，故错误；

B、 $\frac{x+1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$ ，故错误；

C、是最简分式，故正确；

D、 $\frac{3}{12x} = \frac{1}{4x}$ ，故错误；

故选：C.

【点睛】本题考查最简分式的概念，理解概念是解题关键.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】直接利用负整数指数幂： $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)，零指数幂： $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)，进而得出答案.

【详解】解：式子 $(x-1)^0 - (x-2)^{-1}$ 中， $x-1 \neq 0$ 且 $x-2 \neq 0$,

解得： $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$.

故选：D.

【点睛】此题主要考查了零指数幂的性质以及负整数指数幂的性质，正确掌握零指数幂的性质以及负整数指数幂的性质是解题关键.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】分式的分子与分母同乘(或除以)一个不等于0的整式，分式的值不变，据此即可求解.

【详解】解：① $\frac{-(a-b)}{c} = \frac{a-b}{-c}$ ，故①不符合题意.

② $\frac{-a-b}{c} = -\frac{a+b}{c}$ ，故②不符合题意.

③ $\frac{-a+b}{c} = -\frac{a-b}{c}$ ，故③不符合题意.

④ $\frac{-a+b}{-c} = \frac{a-b}{c}$ ，故④符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查分式的基本性质，解题的关键是熟练运用分式的基本性质，本题属于基础题型.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】把已知条件两边平方，然后利用完全平方公式整理即可求解.

【详解】解： $\because a + \frac{1}{a} = 3$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2$$

$$\therefore a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 9$$

$$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

故选：C.

【点睛】本题考查完全平方公式，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

10. 【答案】D

【解析】

【分析】设从学校到家路程为 s ，然后表示出从家到学校所用时间，再表示出从学校到家所用时间，然后利用总路程除以总时间可得平均速度.

【详解】设从学校到家路程为 s ，

$$\begin{aligned} \text{平均速度是: } & 2s \div \left(\frac{s}{x} + \frac{s}{y} \right) = 2s \div \left(\frac{sy}{xy} + \frac{sx}{xy} \right) \\ & = 2s \div \frac{s(x+y)}{xy} = \frac{2xy}{x+y}; \end{aligned}$$

故选: D.

【点睛】此题主要考查了列代数式，关键是掌握平均速度=路程 \div 时间.

二、填空题（本题共 6 小题，共 18 分）

11. 【答案】 1.02×10^{-7}

【解析】

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【详解】解: $0.000000102 = 1.02 \times 10^{-7}$,

故答案为: 1.02×10^{-7} .

【点睛】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

12. 【答案】1

【解析】

【分析】原式通分，然后分母不变，分子相加减，再约分即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} \\ & = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} \\ & = 1 \end{aligned}$$

故答案为: 1.

【点睛】本题考查了分式的加减运算，解题的关键是掌握运算法则.

13. 【答案】 $x^2 - x$

【解析】

【分析】首先将各分母分解因式，最简公分母是各分母所有因式最高次幂的乘积.

【详解】解: $\because x^2 - x = x(x-1)$

∴ 各项的最简公分母为： $x^2 - x$ ，

故答案为 $x^2 - x$ 。

【点睛】本题考查了最简公分母 确定，关键是根据最简公分母是各分母所有因式的最高次幂的乘积解答。

14. 【答案】 -3

【解析】

【分析】分式的值为0的条件是：分子为零，分母不为零。两个条件需同时具备，缺一不可。据此可以解答本题。

【详解】解：∵ 分式 $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ 的值为0，

$$\therefore x^2 - 9 = 0, x - 3 \neq 0$$

$$\therefore x = \pm 3, x \neq 3$$

$$\therefore x = -3$$

故答案为：-3。

【点睛】此题考查了分式的值为0的条件，解题的关键是熟练掌握分式的值为0的条件。分式的值为0的条件是：分子为零，分母不为零。

15. 【答案】 =

【解析】

【分析】本题只需要先对 M 、 N 分别进行化简，再把 $ab = 1$ 代入即可比较 M 、 N 的大小。

【详解】解： $M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{2ab+a+b}{(a+1)(b+1)}$ ，

$$N = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}$$

$$\therefore ab = 1,$$

$$\therefore M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}$$

$$\therefore M = N,$$

故答案为：=。

【点睛】本题考查了分式的混合运算，在解题时要注意先对分式进行化简，再代入求值即可。

16. 【答案】 -1

【解析】

【分析】根据当 $x = a (a \neq 0)$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ，当 $x = \frac{1}{a}$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{a^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + 1} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ ，可得

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = 0, \text{ 求和即可.}$$

【详解】解：当 $x = a (a \neq 0)$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ，

$$\text{当 } x = \frac{1}{a} \text{ 时， } \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{a^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + 1} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}，$$

$$\therefore \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = 0，$$

\therefore 当 $x = 2022$ 时与当 $x = \frac{1}{2022}$ 时相加所得的代数式的值为 0，

当 $x = 2021$ 时与当 $x = \frac{1}{2021}$ 时相加所得的代数式的值为 0，

.....

当 $x = 2$ 时与当 $x = \frac{1}{2}$ 时相加所得的代数式的值为 0，

当 $x = 1$ 时所得的代数式的值为 0，

当 $x = 0$ 时所求的代数式的值为 -1，

\therefore 这些分式的值其和等于 -1，

故答案为：-1.

【点睛】本题考查了求分式的值，数字的变化规律，通过计算发现当 $x = a$ 时与当 $x = \frac{1}{a}$ 时所得的代数式的值和为 0 是解题的关键.

三、解答题（本题共 8 小题，共 72 分）

17. 【答案】2

【解析】

【分析】直接利用零指数幂的性质以及负整数指数幂的性质、算术平方根分别化简，进而得出答案.

【详解】解：原式 = $3 + 1 - 2$

$$= 2.$$

【点睛】此题主要考查了实数的运算，掌握零指数幂和负整数指数幂的性质，正确化简各数是解题关键.

18. 【答案】 $2a + 2$ ，当 $a = 0$ 时，原式 = 2

【解析】

【分析】先将分子分解因式，约分后合并同类项，再把有意义的 a 的值代入计算即可.

$$\text{【详解】解： } 2a + (1 - a) + \frac{a^2 - 1}{a - 1}$$

$$= 2a + 1 - a + \frac{(a + 1)(a - 1)}{a - 1}$$

$$= 2a + 1 - a + a + 1$$

$$= 2a + 2,$$

当 $a = 0$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times 0 + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2.$$

【点睛】本题考查分式化简求值，解题的关键是掌握分式的运算法则，把所求式子化简.

19. 【答案】(1) 0

$$(2) \frac{b^7}{a^2}$$

【解析】

【分析】(1) 根据分式的乘除运算以及加减运算即可求出答案.

(2) 根据负整数指数幂的意义以及同底数幂的乘法运算即可求出答案.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = \frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{xy}{x^2} - \frac{1}{2y} \cdot \frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{4y} - \frac{x}{4y}$$

$$= 0.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 原式} = a^2 b^3 \cdot (a^{-4} b^4)$$

$$= a^{-2} b^7$$

$$= \frac{b^7}{a^2}.$$

【点睛】本题考查分式的乘除运算，分式的加减运算，负整数指数幂的意义以及同底数幂的乘法运算，本题属于基础题型.

$$20. \text{【答案】} \frac{1}{x-1}, \frac{1}{5}$$

【解析】

【分析】先算括号里，再算括号外，然后把 x 的值代入化简后的式子进行计算即可解答.

$$\text{【详解】解: } \frac{x-3}{x^2-1} \div \frac{x-3}{x^2+2x+1} - \left(\frac{1}{x-1} + 1 \right)$$

$$= \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-3} - \frac{1+x-1}{x-1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{x+1-x}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

当 $x=6$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{6-1}$$

$$= \frac{1}{5}.$$

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，熟练掌握因式分解以及分式的混合运算法则是解题的关键.

21. **【答案】** 1

【解析】

【分析】 根据新定义列出算式，再计算分式混合运算即可.

$$\text{【详解】解: } \frac{a}{a+1} - \frac{a^2-1}{1}$$

$$= a \times 1 - \frac{1}{a+1} \times (a^2-1)$$

$$= a - \frac{1}{a+1} \cdot (a+1)(a-1)$$

$$= a - (a-1)$$

$$= a - a + 1$$

$$= 1.$$

【点睛】 本题考查分式混合运算，涉及新定义，解题的关键是读懂题意，列出算式，掌握分式的混合运算法则.

22. **【答案】** 甲地每亩水稻的产量是乙地的 $\frac{m-1}{m+1}$ 倍，乙地每亩水稻的产量高

【解析】

【分析】 先表示出甲地、乙地每亩水稻的产量得到甲地每亩水稻的产量为 $\frac{200}{m^2-1}$ ，乙地每亩水稻的产量为

$$\frac{200}{(m-1)^2}, \text{ 然后计算 } \frac{200}{m^2-1} \div \frac{200}{(m-1)^2} \text{ 即可.}$$

【详解】解: 甲地每亩水稻的产量为 $\frac{200}{m^2-1}$ ，乙地每亩水稻的产量为 $\frac{200}{(m-1)^2}$,

$$\frac{200}{m^2-1} \div \frac{200}{(m-1)^2} = \frac{200}{(m+1)(m-1)} \cdot \frac{(m-1)^2}{200} = \frac{m-1}{m+1},$$

$\because m > 1,$

$$\therefore m-1 < m+1,$$

$$\therefore 0 < \frac{m-1}{m+1} < 1,$$

\therefore 乙地每亩水稻的产量高.

故甲地每亩水稻的产量是乙地的 $\frac{m-1}{m+1}$ 倍, 乙地每亩水稻的产量高.

【点睛】 本题考查了分式的混合运算, 注意运算顺序是解题的关键.

23. **【答案】** (1) ②③ (2) $-\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据给出的“友好分式组”定义把每一组的分式相减看结果来判断;

(2) 根据分式 $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”, 得 $|\frac{2a^2+2ab}{a^2-4b^2}|=2$, 求出① $a=-4b$, ②

$ab=4b^2-2a^2$, 分别把①②代入分式 $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 求出结果即可.

【小问1详解】

解: ① $\frac{3a}{a+1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a}{a+1} \neq 2,$

② $\frac{3a}{a-1} - \frac{a+2}{a-1} = \frac{2a-2}{a-1} = 2,$

③ $|\frac{a}{2a+1} - \frac{5a+2}{2a+1}| = |\frac{-4a-2}{2a+1}| = 2,$

\therefore 属于“友好分式组”的有②③,

故答案为: ②③;

【小问2详解】

解: $\because |\frac{3a^2}{a^2-4b^2} - \frac{a}{a+2b}|$

$$= |\frac{3a^2}{(a+2b)(a-2b)} - \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}|$$

$$= |\frac{3a^2 - a^2 + 2ab}{(a+2b)(a-2b)}|$$

$$= |\frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2}|,$$

\therefore 分式 $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”,

$$\therefore \left| \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2} \right| = 2,$$

$$\therefore 2a^2 + 2ab = 2(a^2 - 4b^2) \text{ 或 } 2a^2 + 2ab = -2(a^2 - 4b^2),$$

$$\therefore a = -4b \text{ 或 } ab = 4b^2 - 2a^2,$$

$$\text{把 } a = -4b \text{ 代入得 } \frac{a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{16b^2 - 2b^2}{-4b^2} = -\frac{7}{2};$$

$$\text{把 } ab = 4b^2 - 2a^2 \text{ 代入得 } \frac{a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{a^2 - 2b^2}{4b^2 - 2a^2} = -\frac{1}{2},$$

综上所述: $\frac{a^2 - 2b^2}{ab}$ 的值为 $-\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了分式的加减法, 熟练掌握分式加减法的法则, 对新定义的理解是解题关键.

24. 【答案】 (1) 等腰直角三角形

(2) 见解析 (3) $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 分别求出点 C , 点 A 坐标, 可得 $OB = OA = OC = 1$, 即可求解;

(2) 作 $DE \perp AC$ 于 E , AC 上截取 $EF = EC$, 设 $DE = x$, 依次表示出 CD , CE , EF , AF , AB , 计算得出 $AB^2 = AD^2$, 从而得出结论;

(3) 作 $\angle EPC = 120^\circ$, 截取 $PC = PE$, 连接 EC , 可证得 $\triangle APE \cong \triangle QCP$, 进而证得 $\angle PCQ = \angle PCE$, 从而点 E , Q , C 共线, 进而证得 $EQ \parallel AB$, 再计算得出 $AD = \sqrt{3}$, 进一步求得结果.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because \frac{a^2 - 1}{a - 1} = 0,$$

$$\therefore a - 1 \neq 0, a^2 - 1 = 0,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore \text{点 } A(-1, 0),$$

\therefore 点 A , C 关于 y 轴对称,

$$\therefore \text{点 } C(1, 0),$$

$$\therefore \text{点 } B(0, -1), \text{点 } A(-1, 0), \text{点 } C(1, 0),$$

$$\therefore AO = BO = CO = 1,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ,$$

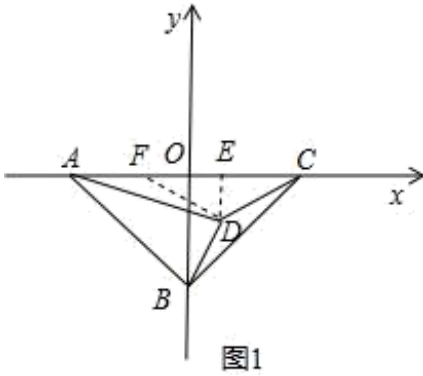
$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形;

【小问 2 详解】

证明：如图1，



作 $DE \perp AC$ 于 F ，在 AC 上截取 $EF = CE$ ，连接 DF ，

$$\therefore DF = DC,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DCA,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ, \angle DCA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\because \angle DCA = \angle DCB + \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA - \angle DCB = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，

$$\text{设 } DE = x, \text{ 则 } CD = 2x, CE = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore DF = DC = 2x,$$

$$\because \angle DFC = \angle DCA = 30^\circ, \angle DAC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC - \angle DAC = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore AF = DF = 2x,$$

$$\therefore AC = AF + EF + CE = 2x + 2\sqrt{3}x,$$

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} (2x + 2\sqrt{3}x) = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，

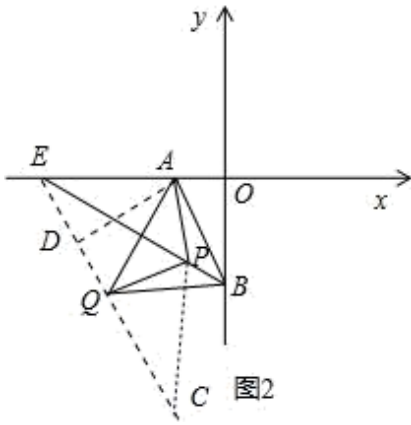
$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = (2x + \sqrt{3}x)^2 + x^2 = (8 + 4\sqrt{3}) x^2,$$

$$\therefore AB^2 = [(\sqrt{2} + \sqrt{6}) x]^2 = (8 + 4\sqrt{3}) x^2,$$

$$\therefore AB = AD;$$

【小问 3 详解】

如图 2，



$$\because B(0, -\sqrt{3}), E(-3, 0),$$

$$\therefore OB = \sqrt{3}, OE = 3,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \angle ABO = 30^\circ, OB = \sqrt{3},$$

$$\therefore OA = 1, AB = 2,$$

$$\therefore AE = OE - OA = 2,$$

$$\therefore AE = AB = 2,$$

$$\because \angle BAO = 90^\circ - \angle ABO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle BAO = 30^\circ,$$

作 $\angle EPC = 120^\circ$, 截取 $PC = PE$, 连接 EC ,

$$\therefore \angle EPC = \angle APQ = 120^\circ, \angle PCE = \angle PEC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EPC - \angle EPQ = \angle APQ - \angle EPQ,$$

$$\therefore \angle EAP = \angle CPQ,$$

$$\because AP = QP,$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle QCP (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle PCQ = \angle AEP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PCQ = \angle PCE,$$

\therefore 点 E 、 Q 、 C 共线,

$$\therefore \angle PEQ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PEQ = \angle ABE,$$

$$\therefore EQ \parallel AB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle AED = \angle AEB + \angle PEQ = 60^\circ$, $AE = 2$,

$$\therefore AD = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形性质，勾股定理等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造全等三角形.