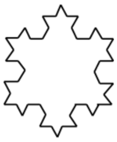
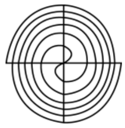
2022北京交大附中初三12月月考

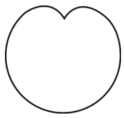
数　　学

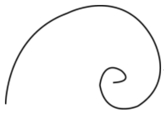
一、选择题（本题共16分，每小题2分）

1．下面的图形是用数学家的名字命名的，其中是轴对称图形但不是中心对称图形的是（　　）

A．科克曲线

B．费马螺线

C．笛卡尔心形线

D．斐波那契螺旋线

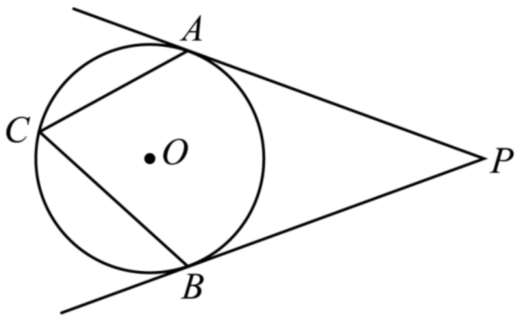
2．在下列方程中，有一个方程有两个实数根，且它们互为相反数，这个方程是（　　）

A．$x-1=0$　　B．$x^2+x=0$　　C．$x^2-1=0$　　D．$x^2+1=0$

3．已知点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$都在反比例函数$y=\dfrac{2}{x}$的图像上，且$x_1<x_2<0$，则y_1，y_2的大小关系是（　　）

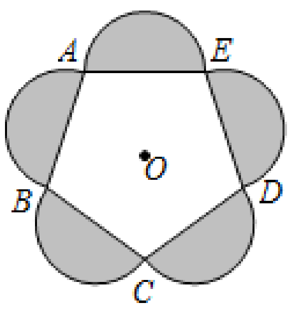
A．$0<y_1<y_2$　　B．$y_1<y_2<0$　　C．$0<y_2<y_1$　　D．$y_2<y_1<0$

4．如图，PA，PB是⊙O的切线，A，B是切点，点C为⊙O上一点，若∠ACB＝70°，则∠P的度数为（　　）



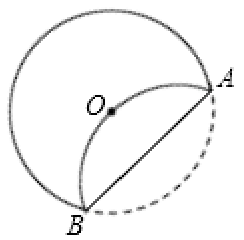
A．70°　　B．50°　　C．20°　　D．40°

5．点O是正五边形$ABCDE$的中心，分别以各边为直径向正五边形的外部作半圆，组成了一幅美丽的图案（如图），这个图案绕点O旋转α后能与自身完全重合，则α的最小值为（　　）



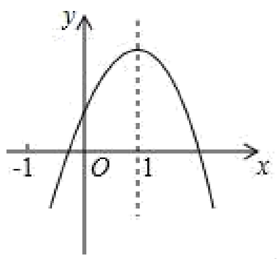
A．36°　　　　B．72°　　　　C．108°　　　　D．120°

6．如图，$\odot O$ 的半径为 3，将 $\odot O$ 的一部分沿着弦 AB 翻折，劣弧恰好经过圆心 O，则折痕 AB 的长为（）



A．1　　　　B．2　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．$3\sqrt{3}$

7．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图所示，对称轴为直线 $x=1$，下列结论中正确的是（　　）



A．$abc<0$　　　　B．$b=2a$　　　　C．$a-b+c>0$　　　　D．$4a+2b+c<0$

8．我们研究过的图形中，圆的任何一对平行切线的距离总是相等的，所以圆是“等宽曲线”．除了圆以外，还有一些几何图形也是“等宽曲线”，如勒洛三角形（如图 1），它是分别以等边三角形的每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间画一段圆弧，三段圆弧围成的曲边三角形．图 2 是等宽的勒洛三角形和圆形滚木的截面图．有如下四个结论：

①勒洛三角形是中心对称图形；

②在图 1 中，等边三角形的边长为 2，则勒洛三角形的周长为 2π；

③在图 2 中，勒洛三角形的周长与圆的周长相等；

④使用截面是勒洛三角形的滚木来搬运东西，不会发生上下抖动；

上述结论中，所有正确结论的序号是（　　）

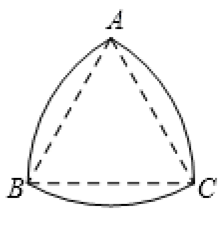


图1

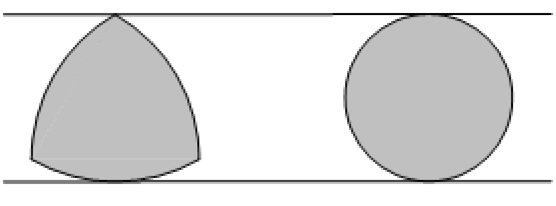


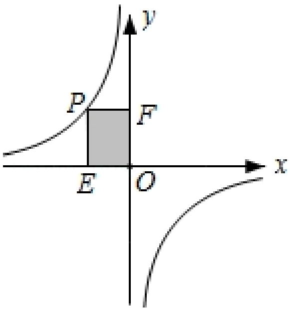
图2

A．①②　　　　B．②③　　　　C．③④　　　　D．②③④

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．已知某函数当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小，则这个函数解析式可以为________．

10．如图，P 是反比例函数图象上第二象限内的一点，且矩形 $PEOF$ 的面积为 2，则反比例函数的解析式是______．



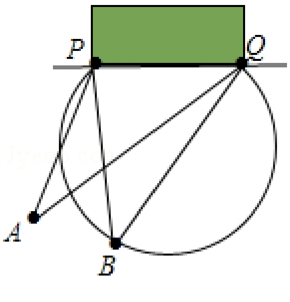
11．黄金分割是指将整体一分为二，较大部分与整体部分的比值等于较小部分与较大部分的比值，这个比例被公认为是最能引起美感的比例，因此被称为黄金分割．现有长为4m的绳子按照黄金分割分成两段，设较长一段的长为 xm，依题意，可列方程为________．

12．某城市启动“城市森林”绿化工程，林业部门要考察某种树苗在一定条件下的移植成活率．在同样的条件下，对这种树苗进行大量移植，并统计成活情况，数据如下表所示：

移植数量/棵	10	270	400	750	1500	3500	7000	9000	14000
成活数量/棵	8	235	369	662	1335	3203	6335	8073	12628
成活率	0.800	0.870	0.923	0.883	0.890	0.915	0.905	0.897	0.902

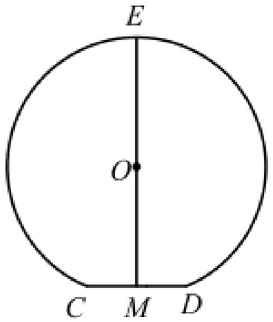
由此估计这种树苗移植成活的概率为______．（结果精确到 0.1）

13．如图，在“世界杯”足球比赛中，甲带球向对方球门 PQ 进攻．当他带球冲到 点时，同伴乙已经助攻冲到 点．有两种射门方式：第一种是甲直接射门；第二种是甲将球传给乙，由乙射门．仅从射门角度考虑，应选择第__________种射门方式．

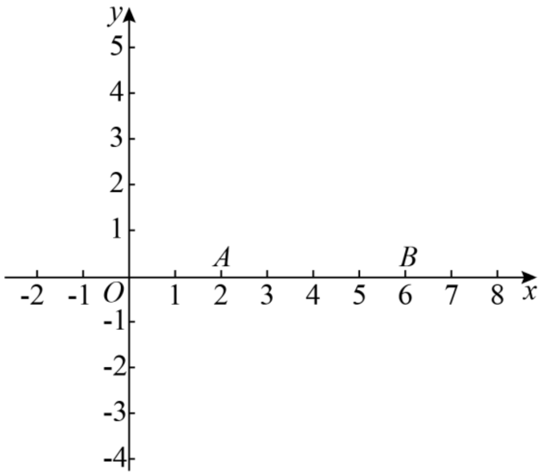


14．将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 $b\left(b>0\right)$ 个单位长度后，所得新抛物线经过点 ，则 b 的值为______________．

15．如图是一个隧道的横截面，它的形状是以点 为圆心的圆的一部分．如果 是⊙ 中弦 的中点， 经过圆心 交⊙ 于点 ， ， ，求⊙ 的半径为________．



16．如图，在平面直角坐标系 xoy 中，P 为 y 轴上一点．已知点 $A(2,0)$，$B(6,\ 0)$，$\odot M$ 为 $\triangle ABP$ 的外接圆．则：



（1）点 M 的横坐标为________；

（2）当 $\angle APB$ 最大时，点 P 的坐标为________

三、解答题（本题共 68 分）

17．（1）解方程 $x^2-2x-3=0$；

（2）解不等式 $2(x+1)\le 5x+8$．

18．在数学课上，老师布置了一项作图任务，如下：

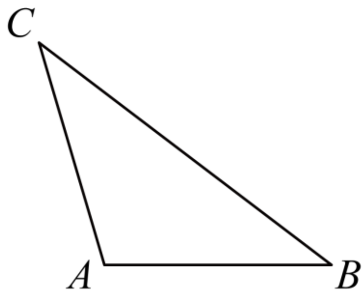
已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=AB$，请在图中的 $\triangle ABC$ 内（含边），画出使 $\angle APB=45°$ 的一个点 P（保留作图痕迹），小红经过思考后，利用如下的步骤找到了点 P：

①作线段 AB 的垂直平分线 l 交 AB 于点 M；

②以点 M 为圆心，MA 为半径画圆，与直线 l 相交于点 N（点 N 在 AB 的上方）；

③以点 N 为圆心，NA 为半径作 $\odot N$，分别交 CA、CB 边于 F，K，在劣弧 FK 上任取一点 P 即为所求点．

问题：



(1)使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

(2)在②的操作中，可以得到$\angle ANB=$________°，依据为：________；

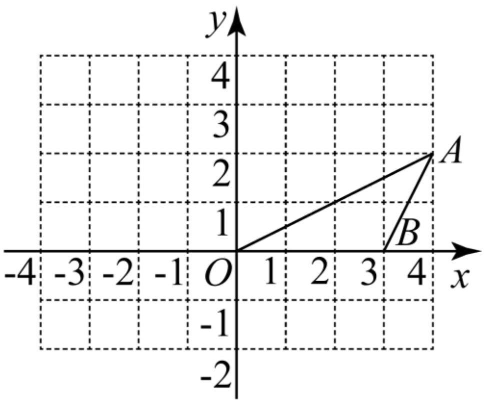
(3)在③的操作中，可以得到$\angle APB=$________°，依据为：________.

19．已知关于x的一元二次方程$x^2-(m+2)x+m+1=0$.

(1)求证：该方程总有两个实数根；

(2)若该方程两个实数根的差为2，求m的值.

20．如图，在平面直角坐标系xOy中，点$A(4,2)$，$B(3,0)$，将$\triangle OAB$绕O点逆时针方向旋转90°得到$\triangle OA'B'$.

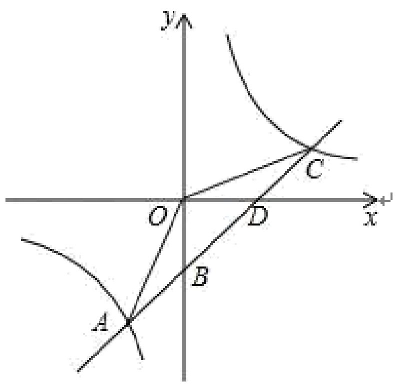


(1)在网格中画出$\triangle OA'B'$；

(2)点A'的坐标为________；

(3)线段OB在旋转过程中扫过的面积为________（结果保留π）.

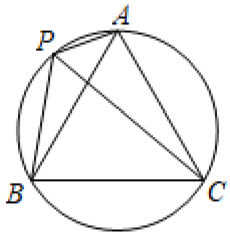
21．如图，一次函数$y=kx+b$的图象与反比例函数$y=\dfrac{m}{x}$的图象交于点$A(-2,-5)$，$C(5,n)$，交y轴于点B，交x轴于点D



(1)求反比例函数和一次函数$y=kx+b$的表达式；

(2)直接写出不等式$kx+b>\frac{m}{x}$的解集________

22．如图，A、P、B、C是圆上的四个点，$\angle APC=\angle CPB=60^\circ$，连接$AB$、$BC$、$AC$．



(1)判断$\triangle ABC$的形状，并证明你的结论；

(2)若$\angle PAC=90^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，直接写出PB的长．

23．某校七年级（1）班班主任对本班学生进行了“我最喜欢的课外活动”的调查，并将调查结果分为书法和绘画类（记为A）、音乐类（记为B）、球类（记为C）、其它类（记为D）.根据调查结果发现该班每个学生都进行了登记且每人只登记了一种自己最喜欢的课外活动.班主任根据调查情况把学生进行了归类，并制作了如下两幅统计图．请你结合图中所给信息解答下列问题：

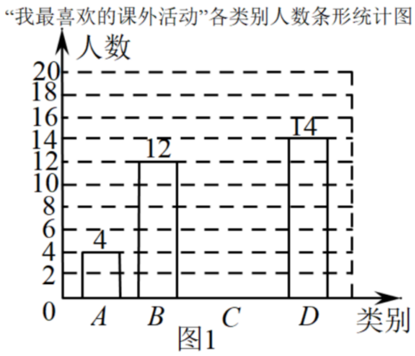


图1

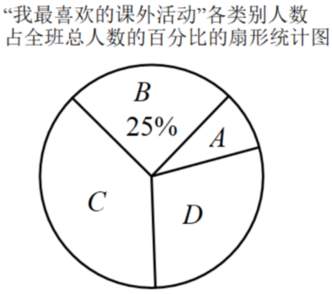


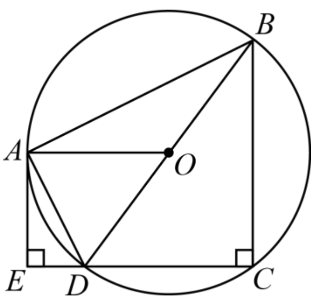
图2

(1)七年级（1）班学生总人数为________人；

(2)请补全条形统计图；

(3)学校将举行书法和绘画比赛，每班需派两名学生参加，A类4名学生中有两名学生擅长书法，另两名学生擅长绘画.班主任现从A类4名学生中随机抽取两名学生参加比赛，请你用列表或画树状图的方法，求出抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的概率

24．如图，以四边形$ABCD$的对角线BD为直径作圆，圆心为O，过点A作$AE\perp CD$的延长线于点E，已知DA平分$\angle BDE$．



(1)求证：AE是$\odot O$的切线；

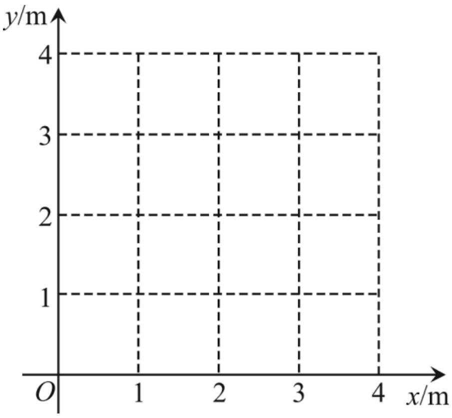
(2)若$AE=4$，$CD=6$，求$\odot O$的半径和AD的长．

25．要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，水管的顶端安一个喷水头，记喷出的水与池中心的水平距离为 x m，距地面的高度为 y m．测量得到如下数值：

x/m	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.37
y/m	2.44	3.15	3.49	3.45	3.04	2.25	1.09	0

小腾根据学习函数的经验，发现 y 是 x 的函数，并对 y 随 x 的变化而变化的规律进行了探究．

下面是小腾的探究过程，请补充完整：

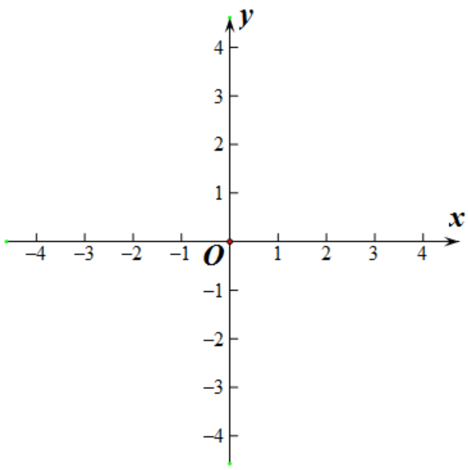


(1)在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点 (x, y)，并画出函数的图象；

(2)结合函数图象，出水口距地面的高度为_______m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为_______m（结果保留小数点后两位）；

(3)为了使水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，如果只调整水管的高度，其他条件不变，结合函数图象，估计出水口至少需要_______（填“升高”或“降低”）_______m（结果保留小数点后两位）．

26．在平面直角坐标系 xoy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx-3(a<0)$．



(1)若抛物线过点 $(4,-3)$．

①求该抛物线的对称轴；

②已知 $m>0$，当 $2-2m\le x\le 2+m$ 时，$-1\le y\le 5$，求 a 的值．

(2)若 $A(-4,\ y_1)$，$B(-2,\ y_2)$，$C(-1,\ y_3)$ 在抛物线上，且满足 $y_3<y_1<y_2$，当抛物线对称轴为直线 $x=t$

时，直接写出t的取值范围.

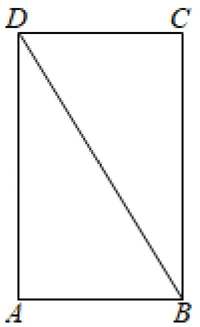
27．如图，已知BD是矩形$ABCD$的一条对角线，点E在BA的延长线上，且$AE=AD$．连接EC，与AD相交于点F，与BD相交于点G.

（1）依题意补全图形；

（2）若$AF=AB$，解答下列问题：

①判断EC与BD的位置关系，并说明理由；

②连接AG，用等式表示线段AG，EG，DG之间的数量关系，并证明.



28．在平面直角坐标系xOy中，对于点P和图形W，如果以P为端点的任意一条射线与图形W最多只有一个公共点，那么称点P独立于图形W，已知点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,2)$

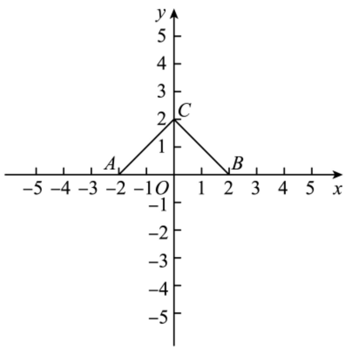


图1

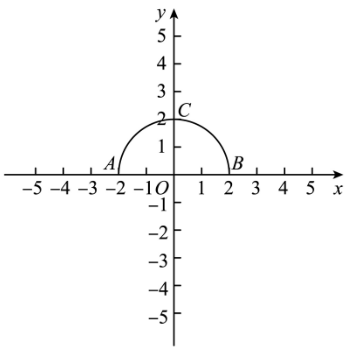


图2

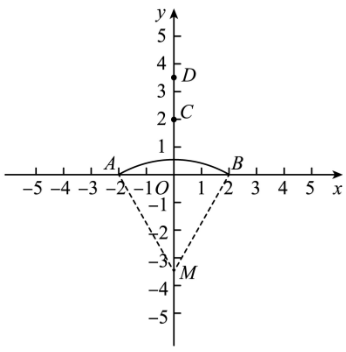


图3

(1)如图1，作折线$AC-CB$，

①在点$P_1(0,3)$，$P_2(3,0)$，$P_3(2,4)$，$P_4(2,-1)$中，独立于折线$AC-CB$的点是________；

②点P是直线l：$y=2x+4$上的一个动点.若点P独立于折线$AC-CB$，求点P的横坐标x_P的取值范围；

(2)①如图2，若弧AB经过点C，请在图2中画出独立于弧AB的所有点组成的图形（用阴影表示）

②如图3，$\angle AMB=60°$，$D(0,2\sqrt{3})$，若以D为圆心，r为半径的$\odot D$上的所有点都独立于劣弧AB，请直接写出r的取值范围

参考答案

1．C

【分析】

根据轴对称图形与中心对称图形的概念对各选项分析判断即可求解．

【详解】

解：A、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项符合题意；

D、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

故选 C

【点睛】

本题考查了轴对称图形和中心对称图形，轴对称图形即在平面内，沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形；中心对称图形即把一个图形绕某一点旋转 180°后能与自身重合，这个图形就是中心对称图形，熟练准确掌握两种图形的定义是解题的关键．

2．C

【分析】

根据题意一次项系数为 0 且△＞0 判断即可．

【详解】

解：A、x-1=0 是一次方程，方程有一个实数根，故选项不合题意；

B、∵方程两根互为相反数和为 0，一次项的系数为 1，故选项不合题意；

C、∵△=0-4×1×（-1）=4＞0，且一次项系数为 0，故此选项符合题意；

D、∵△=0-4×1×1=-4＜0，故此选项不合题意．

故选：C．

【点睛】

本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）的根与系数的关系：若方程的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1 \bullet x_2=\frac{c}{a}$，也考查了一元二次方程的根的判别式．

3．D

【分析】

根据反比例函数的增减性，进行判断即可．

【详解】

解：∵ $k=2>0$，

∴ $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小，$x<0$ 时，y 随 x 增大而减小，

∵ $x_1<x_2<0$，

$\therefore y_2 < y_1 < 0$，

故选：D．

【点睛】

本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握反比例函数的图像与性质是解本题的关键．

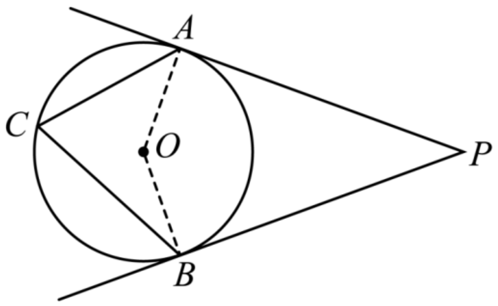
4．D

【分析】

首先连接 OA，OB，由 PA，PB 为⊙O 的切线，根据切线的性质，即可得∠OAP=∠OBP=90°，又由圆周角定理，可求得∠AOB 的度数，继而可求得答案．

【详解】

解：连接 OA，OB，



∵PA，PB 为⊙O 的切线，

∴∠OAP=∠OBP=90°，

∵∠ACB=70°，

∴∠AOB=2∠P=140°，

∴∠P=360°-∠OAP-∠OBP-∠AOB=40°．

故选：D．

【点睛】

此题考查了切线的性质与圆周角定理，注意掌握辅助线的作法和数形结合思想的应用．

5．B

【分析】

旋转对称图形：把一个图形绕着一个定点旋转一个角度α后，与初始图形重合，这种图形叫做旋转对称图形，这个定点叫做旋转对称中心．根据定义可知，最小旋转角等于周角360°除以正多边形的边数．

【详解】

解：根据题意，可知这个图案是旋转对称图形，点O是旋转对称中心，

$\therefore$这个图案的最小旋转角为$\dfrac{360°}{5}=72°$；

$\therefore$这个图案绕点O旋转α后能与自身完全重合，则α的最小值72°；

故选：B．

【点睛】

此题考查了旋转对称图形，熟练掌握旋转对称图形的概念以及最小旋转角的求法是解答此题的关键．

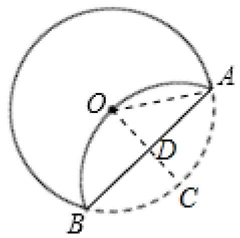
6．D

【分析】

过 O 作垂直于 AB 的半径 OC，设交点为 D，根据折叠的性质可求出 OD 的长；连接 OA，根据勾股定理可求出 AD 的长，由垂径定理知 $AB=2AD$，即可求出 AB 的长度.

【详解】

解：过 O 作 $OC\perp AB$ 于 D，交⊙O 于 C，连接 OA，$Rt\triangle OAD$ 中，



$OD=CD=\frac{1}{2}OC=\frac{3}{2},OA=3$，

根据勾股定理，得：$AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

由垂径定理得，$AB=2AD=3\sqrt{3}$，

故选：D.

【点睛】

本题考查的是翻转变换的性质、勾股定理，掌握翻转变换是一种对称变换，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等是解题的关键.

7．A

【分析】

根据二次函数的图像与对称轴可以判断选项 A 和 B 的正误，根据当 $x=-1$ 时的函数值小于 0，可以判断选项 C 的正误，根据抛物线的对称性可以判断选项 D 的正误；从而得解.

【详解】

解：根据图像可知，开口向下，且与 y 轴交点在 x 轴上方，

$\therefore a<0,c>0$，

$\because$ 对称轴为直线 $x=1$，

$\therefore x=-\frac{b}{2a}=1$，

$\therefore b=-2a>0$，

$\therefore abc<0$，

故选项 A 正确，符合题意；选项 B 错误，不符合题意；

由图像可知，当 $x=-1$ 时，函数值 $y<0$ 即 $a-b+c<0$，

故选项 C 错误，不符合题意；

根据抛物线的对称性，知当 $x=0$ 与 $x=2$ 时，对应的函数值相等且均大于零，

$\therefore 4a+2b+c>0$；

故选项D错误，不符合题意；

故选：A．

【点睛】

此题考查了二次函数的图像与性质、二次函数的图像与系数的关系，熟练掌握二次函数的图像与性质是解答此题的关键．

8．D

【分析】

根据中心对称图形的概念、弧长公式、圆的周长公式、等边三角形的性质以及圆的性质，进行判断即可．

【详解】

解：①勒洛三角形不是中心对称图形，故①错误，不符合题意；

②在图1中，等边三角形的边长为2，则勒洛三角形的周长为$\frac{60\times\pi\times 2}{180}\times 3=2\pi$，故②正确，符合题意；

③在图2中，设勒洛三角形中等边三角形的边长为 ，则圆的直径为 ，

所以勒洛三角形的周长为$\frac{60\times\pi\times a}{180}\times 3=a\pi$，圆的周长为$a\pi$，

故在图2中，勒洛三角形的周长与圆的周长相等，故③正确，符合题意；

④夹在平行线之间的勒洛三角形无论怎么滚动，平行线间的距离始终不变，

如在图1中，点 到BC上任意一点的距离都相等，故使用截面是勒洛三角形的滚木来搬运东西，不会发生上下抖动，故④正确，符合题意；

故上述结论中，所有正确结论的序号是：②③④；

故选：D．

【点睛】

此题是新定义题，主要考查了平行线间的距离、等边三角形与圆的性质、中心对称、弧长公式等知识，正确理解新定义和熟练掌握相关概念与性质是解答此题的关键．

9． $y=-x$或$y=1-x^2$或$y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）

【分析】

根据题意可得这个函数可能是一次函数或二次函数或反比例函数，再由函数的增减性即可得出函数解析式．

【详解】

解：某函数当 时，y随x的增大而减小，

∵未明确是一次函数、二次函数还是反比例函数，

∴这个函数可能是一次函数或二次函数或反比例函数，

根据其性质可得：这个函数为$y=-x$或$y=1-x^2$或$y=\frac{1}{x}$，

故答案为：$y=-x$ 或 $y=1-x^2$ 或 $y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）.

【点睛】

题目主要考查一次函数和二次函数、反比例函数的基本性质，熟练掌握三个函数的基本性质是解题关键.

10．$y=-\frac{2}{x}$

【分析】

因为过双曲线上任意一点引 x 轴、y 轴垂线，所得矩形面积 S 是个定值，即 $S=|k|$，再根据反比例函数的图象所在的象限确定 k 的值，即可求出反比例函数的解析式.

【详解】

解：由图象上的点所构成的矩形 $PEOF$ 的面积为 2 可知，

矩形 $PEOF$ 的面积＝$|k|$＝2，k＝±2.

又由于反比例函数的图象在第二、四象限，k＜0，

则 k＝－3，所以反比例函数的解析式为 $y=-\frac{2}{x}$，

故答案为：$y=-\frac{2}{x}$.

【点睛】

本题考查反待定系数法求反比例函数的解析式，比例函数系数 k 的几何意义，过双曲线上的任意一点分别向两条坐标轴作垂线，与坐标轴围成的矩形面积就等于$|k|$.

11．$x^2=4(4-x)$

【分析】

根据黄金分割的定义：如果点　把线段　　分割成　　和　　（$AP>PB$）两段，其中　　是　　和　　的比例中项（即 $AP^2=AB\cdot PB$），那么这种分割为黄金分割．据此定义直接列式即可.

【详解】

解：∵长为4m的绳子按照黄金分割分成两段，设较长一段的长为xm，

则较短的一段为：$4-x$，

$x^2=4(4-x)$；

故答案为：$x^2=4(4-x)$.

【点睛】

此题考查了一元二次方程的应用，正确理解黄金分割的定义是解答此题的关键.

12．0.9

【分析】

根据表格中的数据和概率的含义，可以估计树苗移植成活的概率.

【详解】

解：由表格中的数据可以估计树苗移植成活的概率是 0.9，

故答案为：0.9．

【点睛】

本题考查利用频率估计概率，解答本题的关键是明确题意，写出相应概率．

13．二

【分析】

本题实际是求$\angle A$和$\angle B$度数的大小；可设AP与$\odot O$的交点为C，连接QC，由圆周角定理可得$\angle PCQ=\angle B$；由于$\angle PCQ$是ΔACQ的外角，显然$\angle PCQ$即$\angle B$的度数要大于$\angle A$；因此从射门角度考虑，在B点射门时，射门的角度更大，更有利于进球．

【详解】

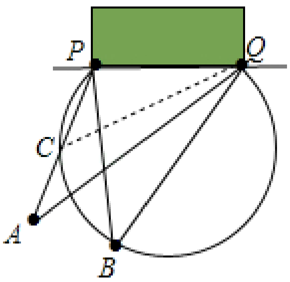
解：设AP与圆的交点是C，连接CQ；

则$\angle PCQ>\angle A$；

由圆周角定理知：$\angle PCQ=\angle B$；

所以$\angle B>\angle A$；

因此选择第二种射门方式更好．



故答案为：二．

【点睛】

此题实际上是比较两个角的大小，角度越大，射中率越高．综合考查了圆周角定理和三角形外角的性质．

14．2

【分析】

设经过平移后新抛物线的解析式为$y=2x^2+b$，然后把点$(1,4)$代入求解即可．

【详解】

解：设经过平移后新抛物线的解析式为$y=2x^2+b$，

$\because$新抛物线经过点$(1,4)$，

$\therefore 4=2+b$，

解得：$b=2$；

故答案为2．

【点睛】

本题主要考查二次函数的平移，熟练掌握二次函数的平移规律是解题的关键．

15．13

【分析】

连接OC，根据垂径定理的推论，可知$EM \perp CD$，然后在$Rt\triangle COM$中利用勾股定理即可求解.

【详解】

解：连接OC，如图所示，设$CO = r$，

$\because EM = 25$，

则$OM = 25 - r$，

$\because M$是$\odot O$中弦CD的中点，EM经过圆心O交$\odot O$于点E，

$\therefore EM \perp CD$，

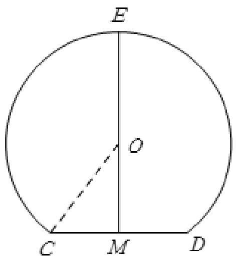
$\because CD = 10$，

$\therefore CM = MD = \dfrac{1}{2} \times CD = 5$，

在$Rt\triangle COM$中，$r^2 = (25 - r)^2 + 5^2$，

解得$r = 13$；

故答案为：13.



【点睛】

此题考查了垂径定理的推论和勾股定理，熟练掌握垂径定理的推论以及运用勾股定理是解答此题的关键.

16.　　4　$(0,\ 2\sqrt{3})$或$(0, -2\sqrt{3})$

【分析】

（1）根据点A、点B的坐标求出AB的中点，根据外心的概念得到点M的纵坐标；

（2）连接MA、MP，过点M作$MN \perp x$轴于点N，根据垂径定理求出AN，进而求出MP，根据勾股定理计算，得到答案.

【详解】

解：（1）$\because$点$A(2,0)$，$B(6,\ 0)$，

$\therefore AB$的中点坐标为$(4,0)$，

$\because \odot M$为$\triangle ABP$的外接圆，

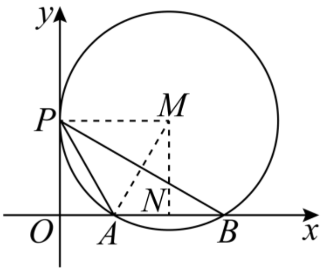
$\therefore$点M在AB的垂直平分线上，

$\therefore$点M的横坐标为4，

故答案为：4；

（2）由圆周角定理可知，当$\odot M$与y轴相切于点P时，$\angle APB$最大，

连接MA、MP，过点M作$MN \perp x$轴于点N，



∵⊙ 与 y 轴相切于点 P，

∴ $MP\perp y$ 轴，

∴四边形 $NOPM$ 为矩形，

∴ $OP=MN$，$MP=ON$，

∵ $AB=6-2=4$，$MN\perp AB$，

∴ $AN=2$，

∴ $MP=ON=4$，则 $MP=AM=4$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中，$MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴ $OP=MN=2\sqrt{3}$，

∴点 P 的坐标为 $\sqrt{\ }$，

当点 M 在第四象限时，同理点 P 的坐标为 $\sqrt{\ }$，

故答案为： $\sqrt{\ }$ 或 $\sqrt{\ }$.

【点睛】

本题考查的是三角形的外接圆与外心、切线的性质、圆周角定理，根据圆周角定理得到当⊙ 与 y 轴相切于点 P 时， 最大是解题的关键.

17.（1） $x_1=-1,x_2=3$；（2） $x\geq -2$.

【分析】

（1）利用因式分解的方法求解一元二次方程即可；

（2）根据不等式求解的步骤：去括号、移项、合并同类项、系数化为 1，即可求解.

【详解】

解：（1）因式分解，得 $(x+1)(x-3)=0$，

$\therefore x_1=-1,x_2=3$；

原方程的解为： $x_1=-1,x_2=3$；

（2）去括号，得 $2x+2\leq 5x+8$，

移项，得 $2x-5x\leq +8-2$，

合并同类项，得 $-3x\leq 6$，

系数化为 1，得 $x\geq -2$，

故原不等式的解集为： $x\geq -2$.

【点睛】

此题考查了一元二次不等式的解法、一元一次不等式的解法，熟练掌握一元二次方程与一元一次不等式的解法是解答此题的关键．

18．(1)图形见详解；

(2)90；直径所对的圆周角为直角；

(3)45；一条弧所对的圆周角的度数等于它所对的圆心角度数的一半．

【分析】

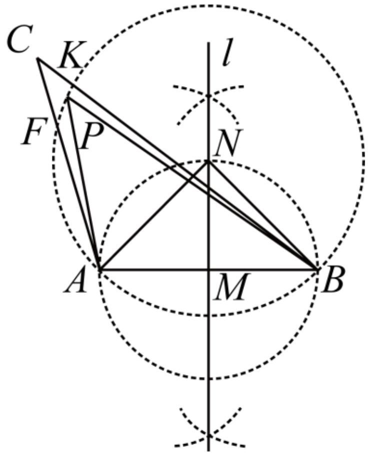
（1）按照题目要求的作图步骤补全图形即可；

（2）根据圆周角定理的推论：直径所对的圆周角为直角，即可得出答案；

（3）根据圆周角定理：一条弧所对的圆周角的度数等于它所对的圆心角度数的一半，即可得出答案．

【详解】

（1）解：补全图形如图所示，点 即为所求作；



（2）解：在②的操作中， 为⊙ 的直径，

∵直径所对的圆周角为直角，

$\therefore \angle ANB = 90°$，

故答案为：90，直径所对的圆周角为直角；

（3）解：在③的操作中，在⊙ 中，$AB = AB$，

∵一条弧所对的圆周角的度数等于它所对的圆心角度数的一半，

$\therefore \angle APB = \frac{1}{2}\angle ANB$，

$\because \angle ANB = 90°$，

$\therefore \angle APB = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$；

故答案为：45，一条弧所对的圆周角的度数等于它所对的圆心角度数的一半．

【点睛】

此题是圆的综合题，主要考查了较复杂的作图、圆周角定理及其推论等知识，正确理解题意和熟练掌握圆周角定理是解答此题的关键．

19．(1)证明见详解；

(2)2 或 -2 .

【分析】

（1）先求一元二次方程的根的判别式Δ，然后再证明$\Delta \geq 0$即可；

（2）不妨设方程的两实数根为x_1, x_2且$x_1 > x_2$，则$x_1 - x_2 = 2$，再利用一元二次方程的根与系数的关系可得$x_1 + x_2, x_1x_2$，进而变形即可求解.

【详解】

（1）解：关于 的一元二次方程 的根的判别式

$\Delta = \left[-\left(m+2\right)\right]^2 - 4\times1\times\left(m+1\right)$

$= m^2 + 4m + 4 - 4m - 4$

$= m^2$，

不论 取任何实数，都有$m^2 \geq 0$即$\Delta \geq 0$成立；

当$\Delta > 0$时，方程有两个不相等的实数根，

当$\Delta = 0$时，方程有两个相等的实数根；

故该方程总有两个实数根；

（2）解：不妨设方程的两实数根为x_1, x_2且$x_1 > x_2$，

则$x_1 - x_2 = 2$，

$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$，

又$\because$ $x_1 + x_2 = m + 2,\quad x_1x_2 = m + 1$，

$\therefore \left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4\left(x_1x_2\right) = \left(m+2\right)^2 - 4\left(m+1\right) = 4$，

$\therefore m = 2$或$m = -2$，

故 的值为 2 或 -2 .

【点睛】

此题考查了一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系、完全平方公式以及直接开平方求解一元二次方程等知识，熟练掌握根的判别式与根与系数的关系的应用是解答此题的关键.

20．(1)答案见详解；

(2)$(-2, 4)$；

(3)$\dfrac{9\pi}{4}$.

【分析】

（1）根据旋转的性质，找出对应点即可画出 ；

（2）根据图形直接写出答案即可；

（3）根据扇形的面积公式求解即可.

【详解】

（1）解：如图 1 所示，　　　　为所画；

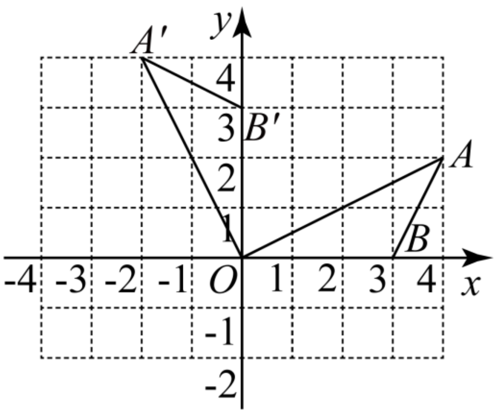


图1

（2）解：如图 2 所示，过　作 $AC \perp x$ 轴于　，则 $OC = 4, AC = 2$，

∵绕　点逆时针方向旋转　　，

$\therefore A'C' = AC = 2, OC' = OC = 4$，

$\therefore A'(-2, 4)$；

故答案为：$(-2, 4)$；

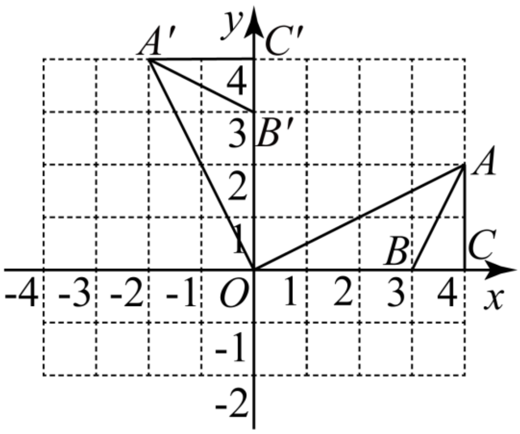


图2

（3）解：$\because OB = 3$，$\angle BOB' = 90°$，

　线段　　在旋转过程中扫过的图形的面积为

$\frac{90\pi \times 3^2}{360} = \frac{9\pi}{4}$，

故答案为：$\frac{9\pi}{4}$.

【点睛】

此题考查了旋转变换的作图与性质、扇形的面积公式等知识，熟练掌握旋转变换的性质是解答此题的关键.

21．(1) $y=\frac{10}{x}$； $y=x-3$；

(2) $-2<x<0$ 或 $x>5$．

【分析】

（1）将点 A 的坐标代入反比例函数解析式中即可求出反比例函数的解析式，然后求出点 C 的坐标，将 A、C 的坐标代入一次函数中即可求出一次函数的解析式．

（2）根据图象即可求出 x 的解集．

【详解】

（1）解：设反比例函数的解析式为： —

$\because$ 反比例函数的图象经过点 $A(-2,-5)$，

$\therefore m=(-2)\times(-5)=10$．

反比例函数的表达式为 $y=\frac{10}{x}$．

$\because$ 点 $C(5，n)$ 在反比例函数的图象上，

$\therefore n=\frac{10}{5}=2$．

$\therefore C$ 的坐标为 $(5,2)$．

$\because$ 一次函数的图象经过点 A，C，将这两个点的坐标代入 ，得 $\begin{cases}-5=-2k+b\\2=5k+b\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=1\\b=-3\end{cases}$

所求一次函数的表达式为 $y=x-3$．

（2）由图象可知：x 的范围是：$-2<x<0$ 或 $x>5$．

【点睛】

此题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，涉及的知识有：坐标与图形性质，待定系数法确定函数解析式，利用了数形结合的思想，熟练掌握待定系数法是解本题的关键．

22．(1)等边三角形，证明见详解；

(2)2．

【分析】

（1）根据圆周角定理的推论：同弧所对的圆周角相等，可得 $\angle ABC=\angle BAC=60°$，进一步得三个内角相等，结论即可得证；

（2）由圆周角定理的推论： 的圆周角所对的弦是直径，得出线段 PC 是直径，进一步推出 $\angle BCP=\angle ACP$，从而 $BP=AP$，再利用垂径定理的推论，得 PC 垂直且平分 ，然后由勾股定理求解得出 的长．

【详解】

（1）解：△ 是等边三角形；

证明：∵ $\angle APC = 60°$，$AC = AC$，

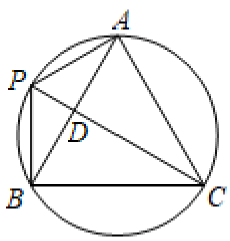
$\therefore \angle ABC = \angle APC = 60°$，

同理，$\angle BAC = \angle CPB = 60°$，

$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle ACB = 60°$，

△ 是等边三角形；

（2）解：设 PC 与 相交于点 ，如图所示，



∵ ，

线段 PC 为圆的直径，

$\therefore \angle PBC = 90°$，

又 ，

$\therefore \angle BCP = \angle ACP = 30°$，

$\therefore BP = AP$，

$\therefore PC \perp AB, AD = BD$，

$\sqrt{\ }$，

$\therefore BD = \sqrt{3}$，

$\because \angle PBD = \angle ACP = 30°$，

$\therefore PD = \frac{1}{2}PB$，

设 $PB = 2x$，则 $PD = x$，

在 Rt△PBD 中，由勾股定理，得 $x^2 + (\sqrt{3})^2 = (2x)^2$，

解得， ，

$\therefore PB = 2$．

【点睛】

此题是圆的综合题，主要考查了圆周角定理、垂径定理、直角三角形的性质、等边三角形的判定以及勾股定理等知识，熟练掌握圆的相关定理与勾股定理是解答此题的关键．

23．(1)48；

(2)见解析；

(3) $\frac{2}{3}$

【分析】

（1）由条形统计图与扇形统计图可得到七年级（1）班学生总人数；

（2）求得 C 类的人数，则可补全统计图；

（2）首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【详解】

（1）∵七年级（1）班学生总人数为：12÷25%=48（人），

故答案为：48；

（2）C 类人数：$48-4-12-14=18$（人），如图：

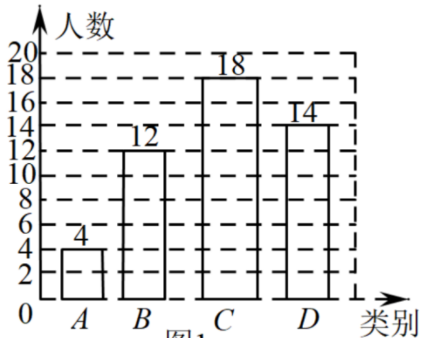
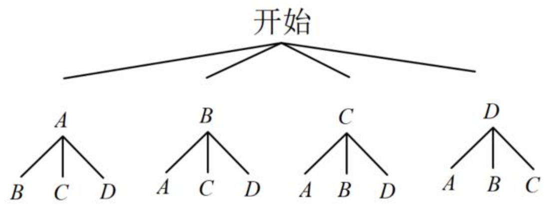


图1

（3）分别用 A，B 表示两名擅长书法的学生，用 C，D 表示两名擅长绘画的学生，

画树状图得：



∵共有 12 种等可能的结果，抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的有 8 种情况，

∴抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的概率为：$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

【点睛】

此题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图与扇形统计图．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

24．(1)见解析

(2)5，$2\sqrt{5}$

【分析】

（1）连接 OA，根据已知条件证明 $OA\perp AE$ 即可解决问题；

（2）取 CD 中点 F，连接 OF，根据垂径定理可得 $OF \perp CD$，所以四边形 $AEFO$ 是矩形，利用勾股定理即可求出结果.

【详解】

（1）证明：如下图，连接 OA，

∵　　　　，

$\therefore \angle DAE + \angle ADE = 90^\circ$.

∵DA 平分　　　，

$\therefore \angle ADE = \angle ADO$.

又∵$OA = OD$，

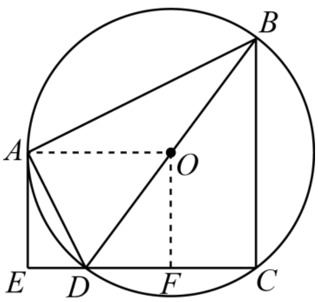
$\therefore \angle OAD = \angle ADO$，

$\therefore \angle DAE + \angle OAD = 90^\circ$，

$\therefore OA \perp AE$，

∵OA 是半径，

∴　是⊙　切线；



（2）解：如上图，取 CD 中点 F，连接 OF，

$\therefore OF \perp CD$ 于点 F，

∴四边形 $AEFO$ 是矩形.

∵　　　，

$\therefore DF = FC = 3$.

在 $Rt\triangle OFD$ 中，$OF = AE = 4$，

$\therefore OD = \sqrt{OF^2 + DF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$，

在 $Rt\triangle AED$ 中，

　　，$ED = EF - DF = OA - DF = OD - DF = 5 - 3 = 2$，

$\therefore AD = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$，

∴　的长是 $2\sqrt{5}$.

【点睛】

本题考查了切线的判定与性质，垂径定理，圆周角定理，勾股定理，解决本题的关键是掌握切线的判定与性质.

25．(1)见解析；

(2)出水口距地面的高度为 2.44m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为 1.20m；

(3)出水口至少需要降低 0.52m．

【分析】

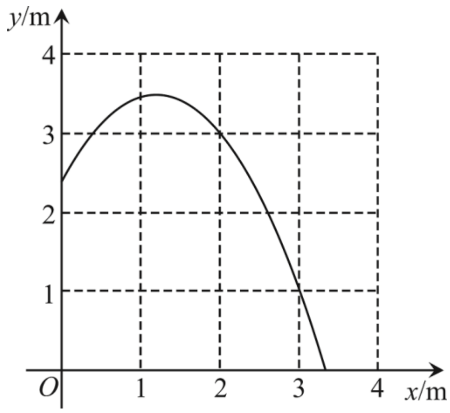
（1）根据表格中的数据，描点，连线画出图象；

（2）设 $y=ax^2+bx+2.44$，将点(1，3.49)，(2，3.04)代入求出解析式，然后求出对称轴即可；

（3）根据水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，得出 a，b 不变，只有 c 改变，将 $x=3.2$ 代入求解即可．

【详解】

（1）如图所示：



（2）由图象可得：当 $x=0$ 时，$y=2.44$，

∴$c=2.44$，设 $y=ax^2+bx+2.44$，

将点(1，3.49)，(2，3.04)代入得：$\begin{cases}3.49=a+b+2.44\\3.04=4a+2b+2.44\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-0.75\\b=1.8\end{cases}$，

∴$y=-0.75x^2+1.8x+2.44$，

∴抛物线的对称轴为：$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1.8}{1.5}=1.2$，

∴$y=-0.75\times1.2^2+1.8\times1.2+2.44=3.52$，

∴出水口距地面的高度为 2.44m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为 1.20m；

（3）为了使水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，此时 $y=ax^2+bx+c$ 中，a，b 不变，只有 c 改变，

∴$y=-0.75\times3.2^2+1.8\times3.2+c$，解得 $c=1.92$，$2.44-1.92=0.52$(m)，

∴出水口至少需要降低 0.52m．

【点睛】

本题考查了二次函数在实际生活中的运用，解题的关键是数形结合并熟练掌握待定系数法．

26．(1)①直线　　；②$a=-2$

(2)$-3<t<-\dfrac{5}{2}$

【分析】

（1）①根据抛物线解析式得到抛物线经过点$\left(0,-3\right)$，即可求出对称轴；

②由①知抛物线对称轴为　　，$a<0$，得到$-\frac{b}{2a}=2$，根据二次函数的性质得到当　　时，y取得最大值5，即可求出a的值；

（2）由抛物线　　　　对称轴为直线　　，得到$-\frac{b}{2a}=t$，即$b=-2at$，将　　，　　，　　分别代入，得$y_3=a+2at-3, y_1=16a+8at-3, y_2=4a+4at-3$，根据　　，建立不等式组$\begin{cases}a+2at-3<16a+8at-3\\a+2at-3<4a+4at-3\\16a+8at-3<4a+4at-3\end{cases}$，计算可得.

【详解】

（1）解：①∵抛物线　　，

∴当　　时，$y=-3$，故抛物线经过点$\left(0,-3\right)$，

又∵抛物线过点　　，

∴抛物线的对称轴为直线$x=\frac{4+0}{2}=2$，即　　；

②由①知抛物线对称轴为　　，$a<0$，

∴抛物线图象开口向下，且$-\frac{b}{2a}=2$，

∴$b=-4a$，

又∵　　，当　　时，　　，

∴当　　时，y取得最大值5，即$4a+2b-3=5$，解得$a=-2$；

（2）若抛物线　　　　对称轴为直线　　，则$-\frac{b}{2a}=t$，即$b=-2at$，

∴解析式为$y=ax^2-2atx-3\left(a<0\right)$，

将　　，　　，　　分别代入，

得$y_3=a+2at-3$，$y_1=16a+8at-3$，$y_2=4a+4at-3$，

又∵　　，

∴$\begin{cases}a+2at-3<16a+8at-3\\a+2at-3<4a+4at-3\\16a+8at-3<4a+4at-3\end{cases}$，

∴$-3<t<-\frac{5}{2}$.

【点睛】

此题考查了二次函数的图象和性质，二次函数的对称性，正确理解并掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

27.（1）见解析；（2）①$EC\perp BD$，理由见解析；② $EG-DG=\sqrt{2}AG$，证明见解析．

【分析】

（1）根据题意补全图形即可；

（2）①$EC\perp BD$，证明$\triangle AEF\cong\triangle ADB$（$SAS$），则$\angle AEF=\angle ADB$，$\angle GEB+\angle GBE=\angle ADB+\angle ABD=90°$，即可求解；

②方法一：在线段EG上取点P，使得$EP=DG$，连接AP，证明$\triangle AEP\cong\triangle ADG$，得到$\triangle PAG$为等腰直角三角形，故可求解；

方法二：过点A作AG的垂线，与DB的延长线交于点Q，连接AQ，BQ，证明$\triangle AEG\cong\triangle ADQ$，得到$\triangle GAQ$为等腰直角三角形，故可求解．

【详解】

解：（1）补全的图形，如图1所示：

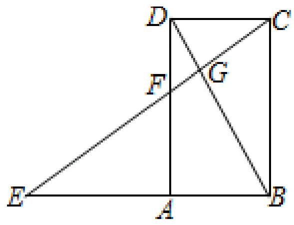


图1

（2）①解：$EC\perp BD$．

理由如下：由矩形性质知$\angle DAB=90°$，

∴$\angle EAF=90°$．

在$\triangle AEF$与$\triangle ADB$中，

$$\begin{cases} AE=AD, \\ \angle E=\angle ADB, \\ AF=AB, \end{cases}$$

∴$\triangle AEF\cong\triangle ADB$（$SAS$）．

∴$\angle E=\angle ADB$．

∴$\angle GEB+\angle GBE=\angle ADB+\angle ABD=90°$．

∴$EC\perp BD$．

②线段AG，EG，DG之间的数量关系：$EG-DG=\sqrt{2}AG$．

证法一：如图2，在线段EG上取点P，使得$EP=DG$，连接AP．

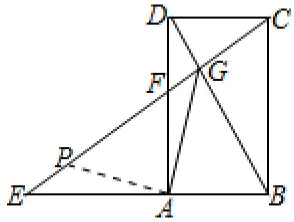


图2

在$\triangle AEP$与$\triangle ADG$中，

$\begin{cases} AE = AD \\ \angle E = \angle ADG \\ EP = DG \end{cases}$,

∴△AEP≌△ADG（SAS）.

∴AP＝AG，∠EAP＝∠DAG.

∴∠PAG＝∠PAD+∠DAG＝∠PAD+∠EAP＝∠DAE＝90°.

∴△PAG为等腰直角三角形.

∴ $PG = \sqrt{2}AG$.

∴ $EG - DG = EG - EP = PG = \sqrt{2}AG$.

证法二：如图3，过点A作AG的垂线，与DB的延长线交于点Q，连接AQ，BQ.

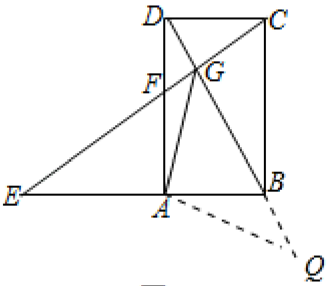


图3

在△AEG与△ADQ中，

$\begin{cases} \angle E = \angle ADQ \\ AE = AD \\ \angle EAG = \angle DAQ \end{cases}$,

∴△AEG≌△ADQ（ASA）.

∴EG＝DQ，AG＝AQ.

∴△GAQ为等腰直角三角形.

∴ $GQ = \sqrt{2}AG$.

∴ $EG - DG = DG = GQ = DG = \sqrt{2}AG$ ，即 EG - DG＝$\sqrt{2}$ AG.

【点睛】

本题是四边形综合题，考查了矩形的性质，相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质等知识，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

28．(1)① P_1，P_4；②点　的横坐标　的取值范围为：$x_P < -2$ 或 $x_P > -\frac{2}{3}$；

(2)①见解析；②　的取值范围为$0 < r < 2$.

【分析】

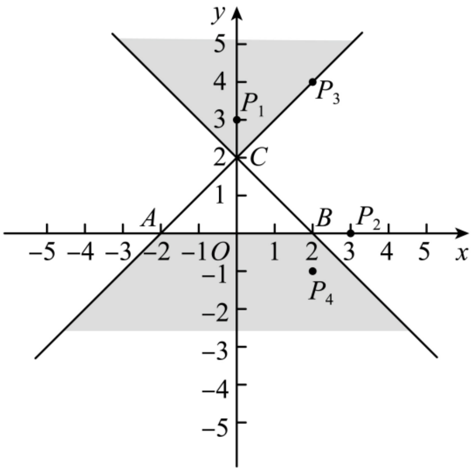
（1）①根据点P独立于折线　　　　的定义即可判断；②求出直线　：　　　　　与直线BC交点坐标即可判断；

（2）①作出与弦AC、CB平行的切线，即可画出图形；②过点A、B作出⊙　的切线，过点D作

$DH \perp AC$ 于 H，利用 30 度角的直角三角形的性质，结合图象即可解决问题．

【详解】

（1）解：①由题意知，独立于折线 的点都在阴影区域内，



设直线 的解析式为 ，

$\therefore \begin{cases} -2k+b=0 \\ b=2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} k=1 \\ b=2 \end{cases}$，

$\therefore$直线 的解析式为 $y=x+2$，

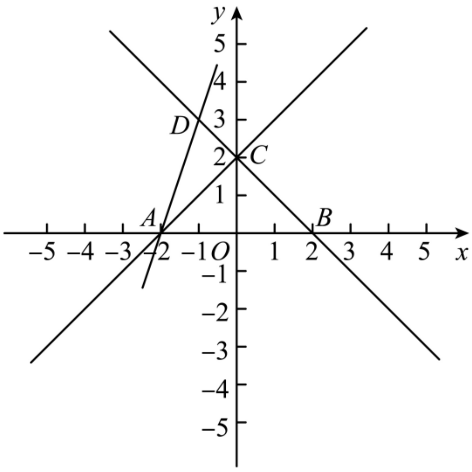
点 在直线 上，点 都在图中空白区域，

点 ， ，都在图中阴影区域，

$\therefore$ P_1，P_4独立于折线 ，

故答案为：P_1，P_4；

②设直线 ： 与直线 BC 交于点 D，



同理求得直线 BC 的解析式为 $y=-x+2$，

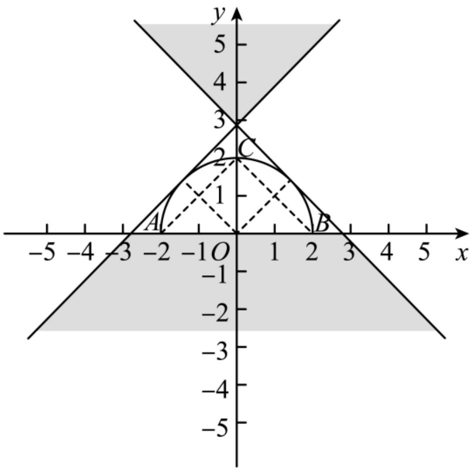
联立$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{8}{3} \end{cases}$，

$\therefore D\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$，

$\because$点 P 独立于折线　　　　，

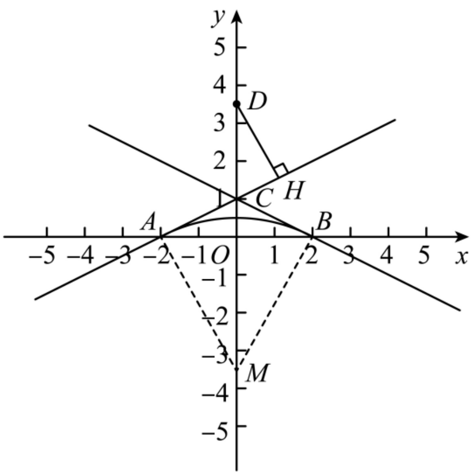
$\therefore$点　的横坐标　的取值范围为：$x_P<-2$ 或 $x_P>-\frac{2}{3}$；

（2）解：①独立于弧　　的所有点组成的图形，如图阴影区域所示，



；

②过 A 点作直线 $AC\perp AM$ 交 y 轴于 C，过点 D 作 $DH\perp AC$ 于 H，



$\therefore$　　与弧　　相切，

$\because$　　　　　　，$MA=MB$，

$\therefore\triangle AMB$ 是等边三角形，

$\therefore\angle MAB=60^\circ$，$\angle CAO=30^\circ$，

$\therefore\angle ACO=\angle DCH=60^\circ$，

$\therefore OC=\frac{\sqrt{3}}{3}OA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore DC=OD=OC=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\because DH\perp AH$，

$\therefore CH=\frac{1}{2}CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴ $DH=\sqrt{3}CH=2$，

∵⊙ 上的所有点都独立于劣弧 ，，

∴⊙ 与直线 没有交点，

∴ 的取值范围为$0<r<2$.

【点睛】

本题属于圆综合题，考查了切线的性质，一次函数的应用，点P独立于图形W的定义等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，学会利用特殊位置解决实际问题，属于中考压轴题.