2023 北京丰台高一（上）期末

数　　学

2023.01

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{0,1,2\}$　　（C）$\{-1,0,1\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知 a 为实数，则“$a<1$”是“$a<2$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（3）$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$ 化简后等于

（A）$\overrightarrow{BC}$　　（B）$\overrightarrow{CB}$　　（C）$\overrightarrow{BD}$　　（D）$\overrightarrow{DB}$

（4）已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，则下列关系式中成立的是

（A）$f(-\frac{5}{2})<f(-3)<f(2)$　　（B）$f(-3)<f(-\frac{5}{2})<f(2)$

（C）$f(2)<f(-3)<f(-\frac{5}{2})$　　（D）$f(2)<f(-\frac{5}{2})<f(-3)$

（5）已知函数 $f(x)=\ln x+2x-6$，则 $f(x)$ 的零点所在的区间是

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(2,3)$　　（D）$(3,4)$

（6）已知 $a>2$，则 $a+\dfrac{1}{a-2}$ 的最小值为

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

（7）声音的等级 $f(x)$（单位：dB）与声音强度 x（单位：W/m^2）满足 $f(x)=10\lg\dfrac{x}{1\times10^{-12}}$.

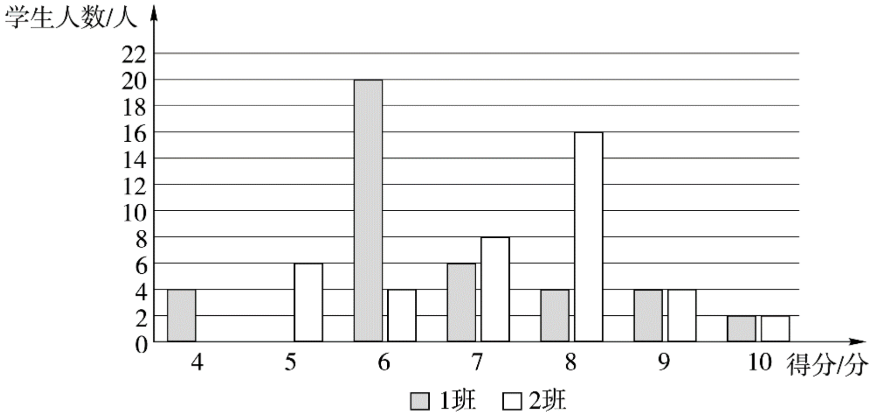
火箭发射时，声音的等级约为160dB；一般噪音时，声音的等级约为90dB，那么火箭发射时的声音强度约为一般噪音时声音强度的

（A）10^5 倍　　（B）10^6 倍　　（C）10^7 倍　　（D）10^8 倍

（8）已知 $a=\log_{0.6}0.5$, $b=0.5^{0.6}$, $c=0.5$, 则 a,b,c 的大小关系为

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>a>b$　　（D）$c>b>a$

（9）在某校举办的“学宪法，讲宪法”活动中，每个学生需进行综合测评，满分为 10 分，学生得分均为整数. 其中某年级 1 班和 2 班两个班级学生的得分分布条形图如下：



给出下列四个结论：

①1 班学生得分的平均分大于 2 班学生得分的平均分；

②1 班学生得分的方差小于 2 班学生得分的方差；

③1 班学生得分的第 90 百分位数等于 2 班学生得分的第 90 百分位数；

④若两班中某同学得分为 7 分，且在他所在的班级属于中上水平，则该同学来自 1 班.

其中所有正确结论的序号是

（A）①③　　（B）②③　　（C）②④　　（D）③④

（10）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x-2)=2f(x)$，且当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=x(2-x)$. 若 $f(t)\geqslant\dfrac{15}{4}$，则 t 的最大值是

（A）$-\dfrac{13}{4}$　　（B）$-\dfrac{14}{5}$　　（C）$-\dfrac{11}{4}$　　（D）$-\dfrac{9}{4}$

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $(2,4)$，则 $f(3)=$____.

（12）函数 $f(x)=\lg x+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是____.

（13）某校高中部有高一学生 600 人，高二学生 480 人，高三学生 420 人. 某研究小组为了调查该校高中部不同年级学生课后作业量的情况，现采用分层随机抽样的方法在三个年级共抽取 100 名学生，应抽取高一学生的人数为____.

（14）能说明“$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a<0$”是假命题的一个实数 a 的取值是____.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+3, x\geqslant a,\\(x-2)^2, x<a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，$f(f(-1))=3$；

②若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$；

③若 $f(x)$ 存在零点，则 a 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup(0,+\infty)$；

④若 $f(x)$ 是减函数，则 a 的取值范围为 $(0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[1+\frac{\sqrt{2}}{2},2]$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知关于 x 不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集为 $A=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$.

（Ⅰ）求实数 a,b 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，使得 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

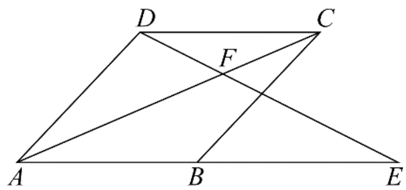
条件①：集合 $B=\{x\,|\,m\leqslant x\leqslant m+1\}$；

条件②：集合 $B=\{x\,|\,2m\leqslant x\leqslant m+1\}$.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

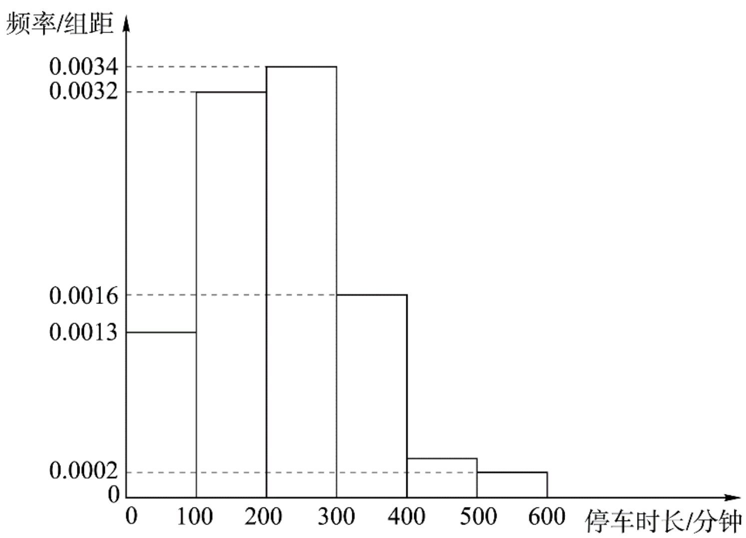


（Ⅰ）用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DE}$；

（Ⅱ）用向量的方法证明：A,F,C 三点共线.

（18）（本小题 14 分）

某商场为了制定合理的停车收费政策，需要了解顾客的停车时长（单位：分钟）. 现随机抽取了该商场到访顾客的100 辆车进行调查，将数据分成6 组：$(0,100]$，$(100,200]$，$(200,300]$，$(300,400]$，$(400,500]$，$(500,600]$，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求样本中停车时长在区间 $(400,500]$ 上的频率；

（Ⅱ）若某天该商场到访顾客的车辆数为1000，根据频率分布直方图估计该天停车时长在区间$(100,400]$上的车辆数；

（Ⅲ）为了吸引顾客，该商场准备给停车时长较短的车辆提供免费停车服务．若使该服务能够惠及 25%的到访顾客的车辆，请你根据频率分布直方图，给出确定免费停车时长标准的建议．

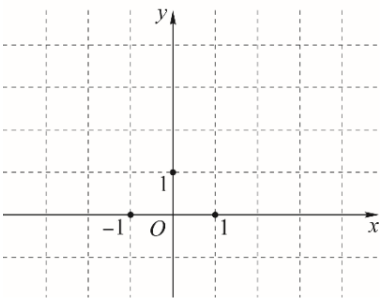
（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=-2\times(\dfrac{1}{2})^{|x|}+2$.

（Ⅰ）判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；

（Ⅱ）在如图所示的平面直角坐标系 xOy 中，画出 $f(x)$ 的图象，并写出该函数的值域；

（Ⅲ）写出不等式 $f(x)>x$ 的解集.



（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$.

（Ⅰ）判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义进行证明；

（Ⅱ）设 $g(x)=a-3x$，若 $\forall x_1\in[1,4]$，$\exists x_2\in[1,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知集合 $U=\{x\in\mathbf{Z}\,\big|\,|x|\leqslant 4\}$. 若集合 A 是 U 的含有 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个元素的子集，且 A 中的所有元素之和为 0，则称 A 为 U 的“k 元零子集”. 将 U 的所有“k 元零子集”的个数记为 $f(k)$.

（Ⅰ）写出 U 的所有“2 元零子集”；

（Ⅱ）求证：当 $k\in\mathbf{N}^*$, 且 $k\leqslant 8$ 时，$f(k)=f(9-k)$；

（Ⅲ）求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$ 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	D	C	C	C	A	D	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．9　　　　12． $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　　　13． 40

14．0（答案不唯一）　　　　15． ①②④

（注：15 题给出的结论中，有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.）

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $-2,1$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根，

所以 $\begin{cases}4-2a+b=0,\\1+a+b=0.\end{cases}$

解得 $a=1,b=-2$．　　　　………… 6 分

（Ⅱ） 选择条件①：

因为 $B=\{x\,|\,m\leqslant x\leqslant m+1\}$，

由 $A\cap B=\varnothing$，

所以 $\begin{cases}m\geqslant -2,\\m+1\leqslant 1.\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant m\leqslant 0$．

所以实数 m 的取值范围为 $[-2,0]$．　　　　………… 13 分

选择条件②：

因为 $B=\{x\,|\,m\leqslant x\leqslant m+1\}$，

当 $B=\varnothing$ 时，得 $2m>m+1$，解得 $m>1$，符合题意.

当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $A\cap B=\varnothing$，

所以 $\begin{cases}2m\leqslant m+1,\\2m\geqslant -2,\\m+1\leqslant 1.\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant 0$．

综上，实数 m 的取值范围为 $[-1,0]\cup(1,+\infty)$．　　　　………… 13 分

17.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为平行四边形 $ABCD$， $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

又因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. .... 6 分

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，且 $\overrightarrow{DE}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$

$=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

所以 A,F,C 三点共线. .... 14 分

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $1-100\times(0.0013+0.0032+0.0034+0.0016+0.0002)=0.03$，

所以样本中停车时长在区间 $(400,500]$ 上的频率为 0.03. .... 4 分

（Ⅱ）由图可知，停车时长在区间 $(100,400]$ 上的频率为 $100\times(0.0032+0.0034+0.0016)=0.82$，

所以该天停车时长在区间 $(100,400]$ 上的车辆数为 $1000\times0.82=820$. .... 9 分

（Ⅲ）设免费停车时长标准为 x 分钟，

由题可知 $(x-100)\times0.0032=0.25-0.13$，

解得 $x=137.5$.

所以建议将免费停车时长标准定为137.5 分钟. .... 14 分

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 为偶函数，证明如下：

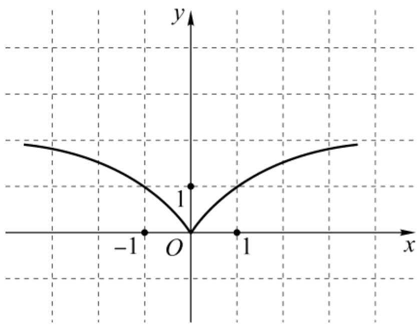
函数 $f(x)=-2\times(\frac{1}{2})^{|x|}+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，

且 $f(-x)=-2\times(\frac{1}{2})^{|-x|}+2=-2\times(\frac{1}{2})^{|x|}+2=f(x)$，

所以函数 $f(x)=-2\times(\frac{1}{2})^{|x|}+2$ 为偶函数. .... 5 分

（Ⅱ）



函数 $f(x)$ 的值域为$[0,2)$.　　　　………… 11 分

（Ⅲ）$(-\infty,0)\cup(0,1)$.　　　　………… 14 分

20．（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，证明如下：

任取 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-\dfrac{4}{x_1})-(x_2-\dfrac{4}{x_2})$

$$=x_1-x_2+\frac{4}{x_2}-\frac{4}{x_1}$$

$$=x_1-x_2+\frac{4(x_1-x_2)}{x_1x_2}$$

$$=(x_1-x_2)(1+\frac{4}{x_1x_2}).$$

因为 $0<x_1<x_2$，

所以 $x_1-x_2<0$，且 $1+\dfrac{4}{x_1x_2}>0$，

即 $(x_1-x_2)(1+\dfrac{4}{x_1x_2})<0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.　　　　………… 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递增，

所以 $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(4)$.

又 $f(1)=-3$，$f(4)=3$，

所以 $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$，即 $f(x)$ 的值域为 $[-3,3]$.

因为 $g(x)=a-3x$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递减，

所以 $g(4)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$.

又 $g(4)=a-12$，$g(1)=a-3$，

所以 $a-12 \leqslant g(x) \leqslant a-3$，即 $g(x)$ 的值域为 $[a-12，a-3]$.

由题可知 $[-3,3] \subseteq [a-12，a-3]$，

所以 $\begin{cases} a-12 \leqslant -3 \\ a-3 \geqslant 3 \end{cases}$，解得 $6 \leqslant a \leqslant 9$.

故实数 a 的取值范围为 $[6,9]$. …………15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）U 的所有“2 元零子集”为：$\{-1,1\},\{-2,2\},\{-3,3\},\{-4,4\}$. …………4 分

（Ⅱ）当 $k \in \mathbf{N}^*, k \leqslant 8$ 时，设 M 是 U 的任意一个“k 元零子集”，则 M 中所有元素之和为 0，

因为 U 中所有元素之和为 0，所以 $\complement_U M$ 中所有元素之和也为 0，

即 $\complement_U M$ 是集合 U 的“$(9-k)$ 元零子集”;

反之，设 N 是 U 的任意一个“$(9-k)$ 元零子集”,

同理得 $\complement_U N$ 是 U 的“k 元零子集”. 所以 $f(k)=f(9-k)$. …………9 分

（Ⅲ）U 的“1 元零子集”只有 $\{0\}$，所以 $f(1)=1$；

由（Ⅰ）知：$f(2)=4$.

U 的“3 元零子集”中含有 0 的有 4 个：$\{-1,0,1\},\{-2,0,2\},\{-3,0,3\},\{-4,0,4\}$；

不含有 0 的有 4 个：$\{-4,1,3\},\{-3,-1,4\},\{-3,1,2\},\{-2,-1,3\}$.

所以 $f(3)=4+4=8$.

U 的“4 元零子集”中含有 0 的有 4 个：$\{-4,0,1,3\},\{-3,-1,0,4\},\{-3,0,1,2\},\{-2,-1,0,3\}$；

不含有 0 的有 8 个：$\{-4,-3,3,4\},\{-4,-2,2,4\},\{-4,-1,1,4\},\{-4,-1,2,3\},\{-3,-2,1,4\},\{-3,-2,2,3\}$,

$\{-3,-1,1,3\},\{-2,-1,1,2\}$.

所以 $f(4)=4+8=12$.

由（Ⅱ）知：$f(5)=f(4)=12, f(6)=f(3)=8, f(7)=f(2)=4, f(8)=f(1)=1,$

又 $f(9)=1$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(9)=1+4+8+12+12+8+4+1+1=51.$ …………15 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）