2022 北京理工大附中初二（下）期中

数　　学

一、 选择题：在下列各题的四个选项中，只有一个是符合题意的．

1. 以下列长度的三条线段为边能组成直角三角形的是（　　）

A. 1，1，2　　B. 2，3，4　　C. 3，4，6　　D. 6，8，10

2. 下列各式中是最简二次根式的是（　　）．

A. $\sqrt{2a}$　　B. $\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{ab^2}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. 下列各式中运算正确的是（　　）

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=3$

C. $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{(-2)^2}=-2$

4. 使$\sqrt{24n}$的值为正整数的最小整数 n 是（　　）．

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若$\angle A=3\angle B$，则$\angle D$ 的角度为（　　）．

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 135°

6. 将四个全等的直角三角形分别拼成如图 1，图 2 所示的正方形，则每一个直角三角形的面积为（　　）．

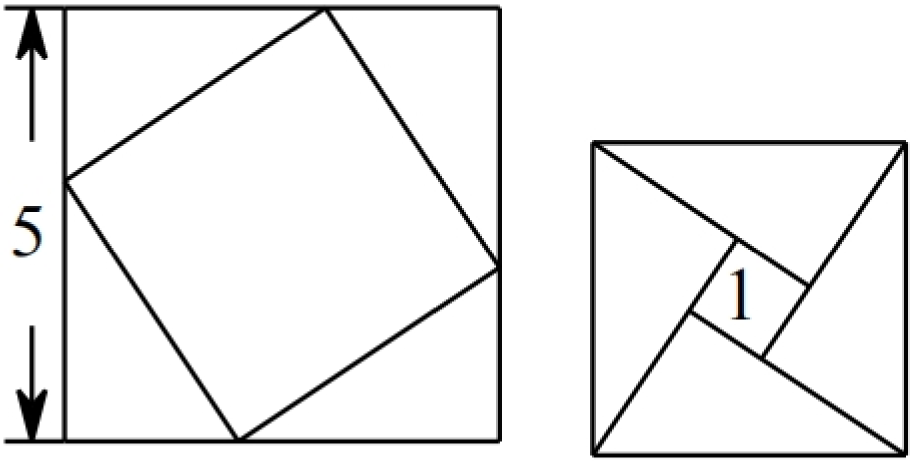
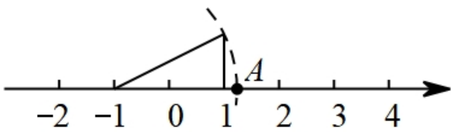


图1　　图2

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 如图所示，数轴上点 A 所表示的数为 a，则 a 的值是(　　).



A. $\sqrt{5}-1$　　B. $-\sqrt{5}+1$　　C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\sqrt{5}$

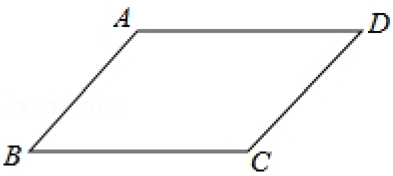
8. 如图，在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，分别以点 A，C 为圆心，m 为半径作弧，两弧交于点 D，连接 BD，CD．若 BD 的长为$2\sqrt{3}$，则 CD 的最大值为(　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{30}$　　D. $7\sqrt{2}$

二、填空题(本题共 16 分，每小题 2 分)

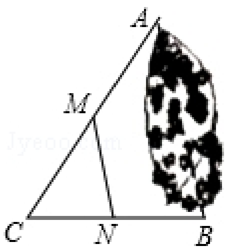
9. 若 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是______.

10. 如图，在四边形 ABCD 中，AB∥CD，请你添加一个条件，使得四边形 ABCD 成为平行四边形，你添加的条件是___.



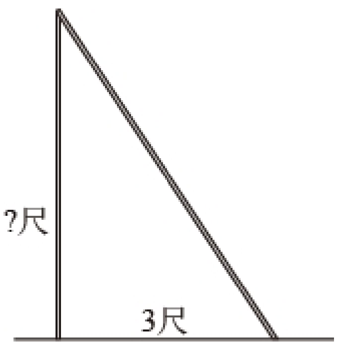
11. 若$\left|x-3\right|+\sqrt{y+1}=0$，则$x+y=$___________.

12. 如图，A，B 两点被池塘隔开，在 A，B 外选一点 C，连接 AC 和 BC，并分别找出 AC 和 BC 的中点 M，N，如果测得 MN=20m，那么 A，B 两点间的距离是_____.



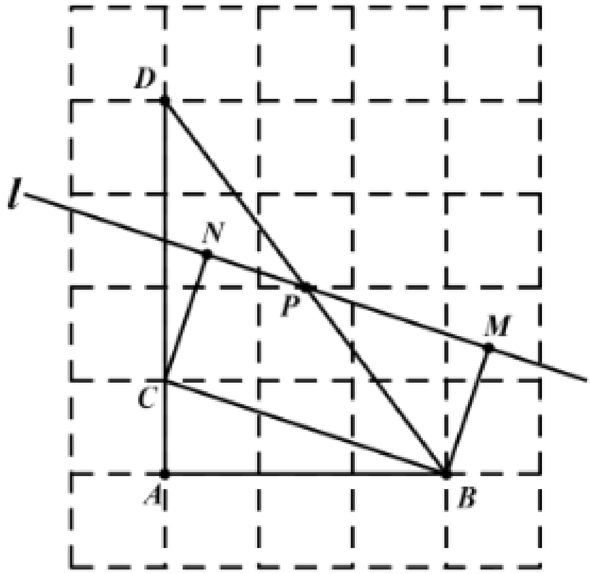
13. 用一个实数a的值说明命题“$\sqrt{a^2}=a$”是假命题，这个a的值可以是___________.

14. 我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题：一根竹子高 1 丈（1 丈=10 尺），折断后顶端落在离竹子底端 3 尺处，问折断处离地面的高度为多少尺？如图，设折断处离地面的高度为 x 尺，根据题意，可列出关于 x 方程为:__________.



15. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（3，0），B（0，4），若以点 A，B，O，C 为顶点的四边形是平行四边形，则点 C 的坐标是______.

16. 如图，在方格纸中每个小正方形的边长都是 1，点 A、B、C、D 均落在格点上.则 $S_{\triangle BDC}$=_____；点 P 为线段 BD 中点，过点 P 作直线 l∥BC，过点 B 作 $BM\perp l$ 于点 M，过点 C 作 $CN\perp l$ 于点 N，则四边形 $BCNM$ 的面积为___________.



三、解答题（本题共 60 分，第 17-21 题，每小题 4 分，第 22 题 5 分，第 23 题 6 分，第 24-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

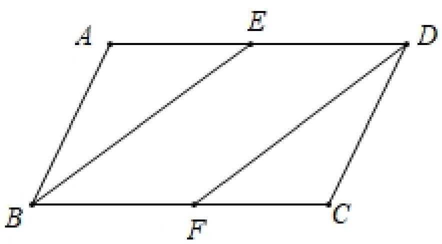
17. 计算：$\sqrt{\frac{1}{2}}+|\sqrt{2}-2|-(\pi+1)^{0}+(\frac{1}{2})^{-1}$.

18. 计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$.

19. 计算：$\left(\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{3}$.

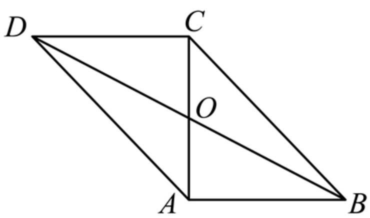
20. 当 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$ 时，求代数式 $ab+b^{2}$ 的值.

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，$AE=CF$，求证：$BE=DF$.



22. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O．若 $AB=3$，$AD=5$，$OC=2$.

求证：$AC\perp CD$.



23. 如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小方格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形 ABC，使△ABC 的面积为 2．

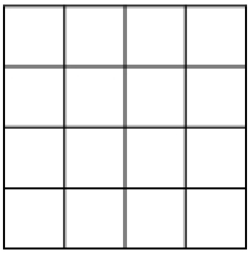


图1

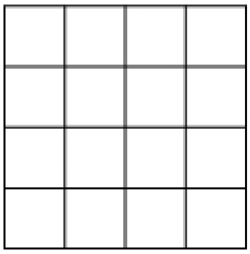
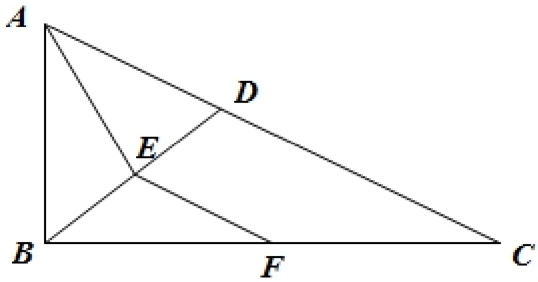


图2

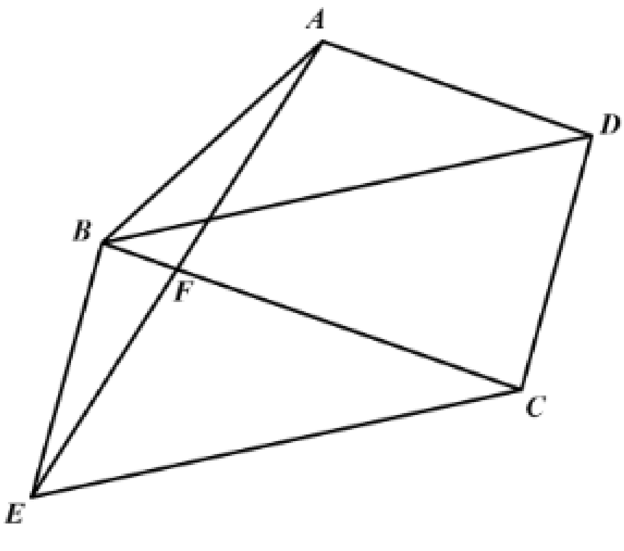
(1) 在图 1 中，画一个三角形 ABC，使它的一边长是有理数，另外两边长是无理数．

(2) 在图 2 中，画一个直角三角形 ABC，使它的三边长都是无理数．

24. 如图，在△ABC 中，∠ABC=90°，在边 AC 上截取 AD=AB，连接 BD，过点 A 作 AE⊥BD 于点 E，F 是边 BC 的中点，连接 EF．若 AB＝5，BC＝12，求 EF 的长度．



25. 如图，四边形 $ABCD$，AD∥BC，连接 BD，过 B、C 分别作 CD、BD 的平行线交于点 E，连接 AE 交 BC 于点 F．求证：F 是 AE 的中点．



26 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方．例如：

$4+2\sqrt{3}=1+3+2\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$．

这样小明就找到了一种把类似$4+2\sqrt{3}$的式子化为完全平方式的方法．

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

(1) 结合小明的探索过程填空：___+___$\sqrt{5}=\left(1+2\sqrt{5}\right)^2$；

(2) $7+4\sqrt{3}$的算术平方根为___；

(3) 化简：$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\cdots+\sqrt{2n+1-2\sqrt{n\left(n+1\right)}}$．($n$为正整数)

27. 在Rt△ABC中，∠B=90°．

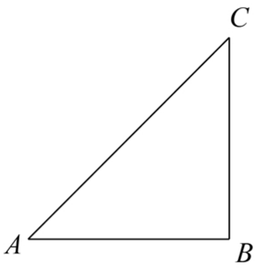


图 1

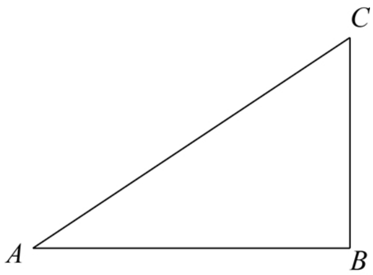


图 2

（1）如图 1，当 $AB=BC$ 时，直接写出线段 AC 与线段 AB 的数量关系；

（2）如图 2，若 $AB>BC$，用圆规在 AB 上截取 $AM=BC$，连接 CM，N 为线段 CB 上一点，连接 AN 交 CM 与点 P．请添加条件：当∠APM=___°时，使得 $AN=\sqrt{2}CM$ 成立，并证明这个命题；

（3）在（2）的条件下，取 AN 中点 H，连接 CH，若 AM=4，CN=2，则 CH=__．

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M、N，给出如下定义：P 为图形 M 上任意一点，Q 为图形 N 上任意一点，如果 P，Q 两点间的距离有最小值，那么称这个最小值为图形 M，N 间的"近距离"，记作 $d(M，N)$．在▱$ABCD$ 中，点 $A\left(4,8\right)$，$B\left(-4,0\right)$，$C\left(-4,-8\right)$，$D\left(4,0\right)$，如图 1．

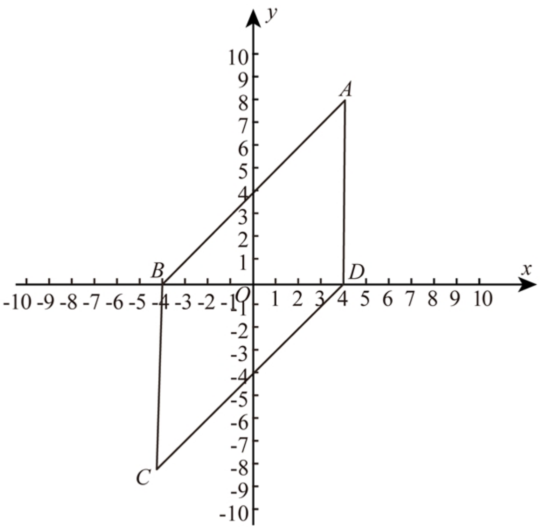


图1

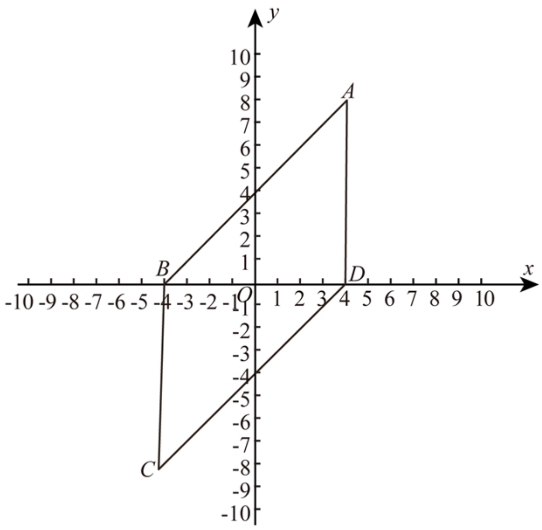


图2

（1）直接写出 d(点 O，▱$ABCD$)=___；

（2）若点 P 在 y 轴正半轴上，d（点 P，▱$ABCD$）=4，求点 P 坐标；

（3）已知点 $E\left(a,-a\right)$，$F\left(a+2,-a\right)$，$G\left(a+1,-a-1\right)$，$H\left(a+3,-a-1\right)$，顺次连接点 E、F、H、G，将得到的四边形记为图形 W（包括边界）．

①当 $a=-1$ 时，在图 2 中画出图形 W，直接写出 $d(W,▱ABCD)$ 的值；

②若 $0\le d(W,▱ABCD)<1$，直接写出 a 的取值范围．

参考答案

一、 选择题：在下列各题的四个选项中，只有一个是符合题意的．

1. 以下列长度的三条线段为边能组成直角三角形的是（　　）

A. 1，1，2　　B. 2，3，4　　C. 3，4，6　　D. 6，8，10

【答案】D

【解析】

【分析】根据勾股定理的逆定理对各选项进行判断即可．

【详解】解：A 中$1^2+1^2\neq 2^2$，故不符合题意；

B 中$2^2+3^2\neq 4^2$，故不符合题意；

C 中$3^2+4^2\neq 6^2$，故不符合题意；

D 中$6^2+8^2=10^2$，符合题意；

故选 D．

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理．解题的关键在于明确用勾股定理的逆定理判断是否是直角三角形．

2. 下列各式中是最简二次根式的是（　　）．

A. $\sqrt{2a}$　　B. $\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{ab^2}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义逐项分析判断即可．

【详解】A. $\sqrt{2a}$，是最简二次根式，故该选项符合题意；

B. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

C. $\sqrt{ab^{2}}=|b|\sqrt{a}$，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

D. $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

故选 A

【点睛】本题考查最简二次根式的定义．根据最简二次根式的定义，最简二次根式必须满足两个条件：（1）被开方数不含分母；（2）被开方数不含能开得尽方的因数或因式．

3. 下列各式中运算正确的是（　　）

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=3$

C. $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{(-2)^{2}}=-2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的加减，算术平方根的计算对各选项进行判断即可．

【详解】解：A．中$2+\sqrt{3}\neq 2\sqrt{3}$，故不符合题意；

B．中$2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\neq 3$，故不符合题意；

C．中$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，故符合题意；

D．中$\sqrt{\left(-2\right)^{2}}=2\neq -2$，故不符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查了二次根式的加减，算术平方根．熟练掌握相关的运算法则是解题关键．

4. 使$\sqrt{24n}$的值为正整数的最小整数 n 是（　　）．

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可知 $24n$ 是平方数，然后根据二次根式的定义即可求出答案.

【详解】解：∵$24n=2^2\times 6n$，

∴使 $\sqrt{24n}$ 的值为正整数的最小整数 n 是 6，

故选：B.

【点睛】本题考查二次根式的定义，解题的关键是熟练运用二次根式的性质.

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle A=3\angle B$，则 $\angle D$ 的角度为（　）.

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $135°$

【答案】B

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得 $\angle A+\angle B=180°$，$\angle D=\angle B$，将 $\angle A=3\angle B$ 代入求出 $\angle B$，进而可得答案.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle A+\angle B=180°$，$\angle D=\angle B$，

∵ $\angle A=3\angle B$，

∴ $4\angle B=180°$，

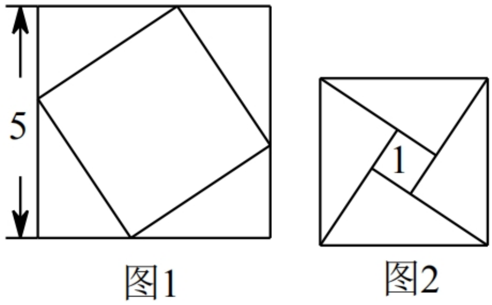
解得 $\angle B=45°$，

∴ $\angle D=45°$，

故选 B.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质．解题的关键在于明确角度的数量关系.

6. 将四个全等的直角三角形分别拼成如图 1，图 2 所示的正方形，则每一个直角三角形的面积为（　）.



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意和图形，可以先设直角三角形的长直角边为 a，短直角边为 b，然后根据图 1 和图 2 可以列出相应的方程组，从而可以求得直角三角形的两条直角边的长．

【详解】解：设直角三角形的长直角边为 a，短直角边为 b，

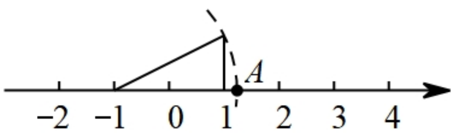
$\therefore \begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$，

∴直角三角形的面积为：（3×2）÷2=3，

故选：A．

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

7. 如图所示，数轴上点 A 所表示的数为 a，则 a 的值是(　　)．



A. $\sqrt{5}-1$　　B. $-\sqrt{5}+1$　　C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先计算出直角三角形斜边的长，然后再确定 a 的值.

【详解】解：$\because \sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore a=\sqrt{5}-1$，

故选：A .

【点睛】此题主要考查了实数与数轴，关键是利用勾股定理计算出直角三角形斜边长.

8. 如图，在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，分别以点 A，C 为圆心，m 为半径作弧，两弧交于点 D，连接 BD，CD．若 BD 的长为 $2\sqrt{3}$，则 CD 的最大值为（　　）

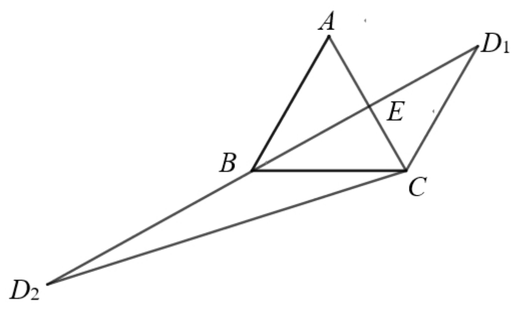
A. 2　　B. $2\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{30}$　　D. $7\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】如图，由题意知，D_1D_2 是 AC 的垂直平分线，交 AC 于 E，B 在 D_1D_2 上，$\angle CBE=30°$，$CE=\frac{1}{2}AC=1$，$BE=\sqrt{3}$，由 $BD=2\sqrt{3}$，可知 $ED_1=\sqrt{3}$，$ED_2=3\sqrt{3}$，分别在 $Rt\triangle CED_1$ 和 $Rt\triangle CED_2$ 中，用勾股定理求解 CD_1 与 CD_2 的值，比较后取最大值即可.

【详解】解：如图，由题意知，D_1D_2 是 AC 的垂直平分线，交 AC 于 E，B 在 D_1D_2 上，



$\therefore \angle BEC=90°$，$\angle CBE=30°$，$CE=\frac{1}{2}AC=1$，

$\therefore BE=\sqrt{3}$，

$\because BD=2\sqrt{3}$，

$\therefore BD_1=2\sqrt{3}$，$ED_1=\sqrt{3}$，$BD_2=2\sqrt{3}$，$ED_2=3\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle CED_1$ 中，由勾股定理得 $CD_1=\sqrt{CE^2+ED_1{}^2}=2$，

在 $Rt\triangle CED_2$ 中，由勾股定理得 $CD_2=\sqrt{CE^2+ED_2{}^2}=2\sqrt{7}$，

$\because CD_2>CD_1$，

$\therefore CD$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$，

故选 B．

【点睛】本题考查了垂直平分线，等边三角形的性质，含 30° 的直角三角形，勾股定理等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

二、填空题(本题共 16 分，每小题 2 分)

9. 若 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是______．

【答案】$x\geq-2$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件：被开方数为非负数，列不等式求解即可．

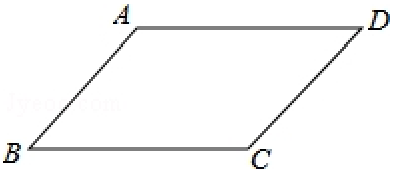
【详解】由题意可知 $x+2\geq0$，

$\therefore x\geq-2$．

故答案为：$x\geq-2$．

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件，明确被开方数为非负数是解题关键．

10. 如图，在四边形 ABCD 中，AB∥CD，请你添加一个条件，使得四边形 ABCD 成为平行四边形，你添加的条件是___．



【答案】AB=DC（答案不唯一）

【解析】

【详解】试题分析：∵在四边形 ABCD 中，AB∥CD，

∴根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形的判定，可添加的条件是：AB=DC（答案不唯一）．

还可添加的条件 AD∥BC 或∠A=∠C 或∠B=∠D 或∠A+∠B=180°或∠C+∠D=180°等．

11. 若$\left|x-3\right|+\sqrt{y+1}=0$，则$x+y=$__________．

【答案】2

【解析】

【分析】由题意知，$x-3=0$，$y+1=0$，求出x，y的值，然后代入求解即可．

【详解】解：由题意知，$x-3=0$，$y+1=0$，

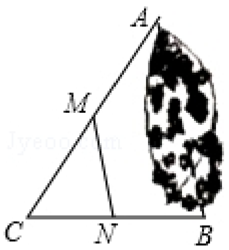
解得$x=3$，$y=-1$，

∴$x+y=3-1=2$，

故答案为：2．

【点睛】本题考查了绝对值、算术平方根的非负性、代数式求值．解题的关键在于根据非负性求出x，y的值．

12. 如图，A，B 两点被池塘隔开，在 A，B 外选一点 C，连接 AC 和 BC，并分别找出 AC 和 BC 的中点 M，N，如果测得 MN=20m，那么 A，B 两点间的距离是_____．



【答案】40m

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理：三角形的中位线平行第三边，且等于第三边的一半，那么第三边应等于中位线长的 2 倍即可解答.

【详解】解：∵M，N 分别是 AC，BC 的中点，

∴MN 是△ABC 的中位线，

∴MN= $\frac{1}{2}$ AB,

∴AB=2MN=2×20=40（m）.

【点睛】本题考查三角形中位线定理，掌握三角形的中位线平行第三边，且等于第三边的一半是解题关键.

13. 用一个实数 a 的值说明命题“$\sqrt{a^2}=a$”是假命题，这个 a 的值可以是__________.

【答案】-1（答案不唯一，$a<0$ 即可.）

【解析】

【分析】选取的 a 的值不满足 $\sqrt{a^2}=a$ 即可.

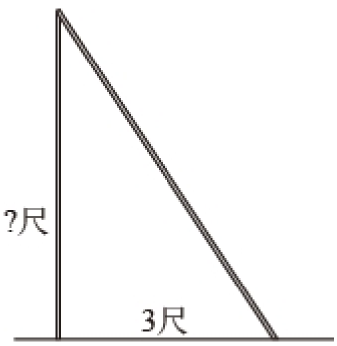
【详解】$a=-1$ 时，满足 a 是实数，但不满足 $\sqrt{a^2}=a$，

所以 $a=-1$ 可作为说明命题“如果 a 是任意实数，那么“$\sqrt{a^2}=a$”是假命题的一个反例.

故答案为：-1（答案不唯一，$a<0$ 即可.）

【点睛】本题考查了命题与定理，要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

14. 我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题：一根竹子高 1 丈（1 丈=10 尺），折断后顶端落在离竹子底端 3 尺处，问折断处离地面的高度为多少尺？如图，设折断处离地面的高度为 x 尺，根据题意，可列出关于 x 方程为:__________.



【答案】$(10-x)^2=x^2+3^2$

【解析】

【分析】设折断处离地面的高度为 x 尺，根据勾股定理列出方程即可

【详解】解：设折断处离地面的高度为 x 尺，根据题意可得：$(10-x)^2=x^2+3^2$

故答案为：$(10-x)^2=x^2+3^2$

【点睛】本题考查了勾股定理的应用，掌握勾股定理是解题的关键．

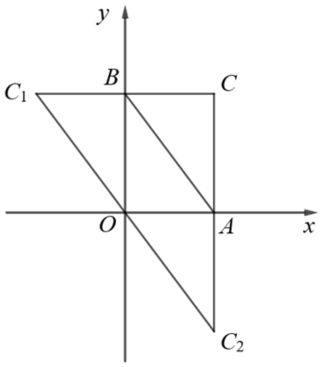
15. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（3，0），B（0，4），若以点 A，B，O，C 为顶点的四边形是平行四边形，则点 C 的坐标是_____．

【答案】$(3,4)$ ## $(-3,4)$ ## $(3,-4)$

【解析】

【分析】由题意知，以点 A，B，O，C 为顶点的四边形是平行四边形，分三种情况求解：①如图，四边形 $BOAC$ 是平行四边形；②如图，四边形 $OABC_1$ 是平行四边形；③如图，四边形 $ABOC_2$ 是平行四边形；根据平行四边形的性质求解即可．

【详解】解：如图，



∵以点 A，B，O，C 为顶点的四边形是平行四边形，

①四边形 $BOAC$ 是平行四边形，

∴ $BC \parallel OA$， $BC = OA$，

∴ $C(3,4)$；

②四边形 $OABC_1$ 是平行四边形，

∴ $BC_1 \parallel OA$， $BC_1 = OA$，

∴ $C_1(-3,4)$；

③四边形 $ABOC_2$ 是平行四边形，

∴ $OC_2 \parallel AB$， $OC_2 = AB$，

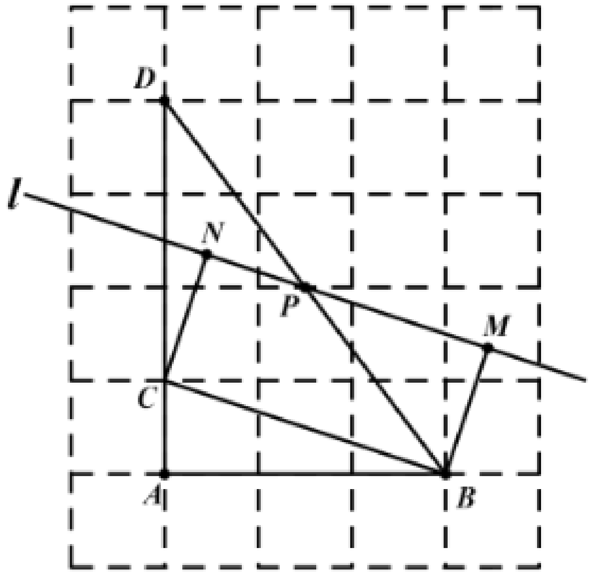
∴ $C_2(3,-4)$；

综上所述，C 的坐标为 $(3,4)$ 或 $(-3,4)$ 或 $(3,-4)$，

故答案为：$(3,4)$ 或 $(-3,4)$ 或 $(3,-4)$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、点坐标，解题的关键在于熟练掌握平行四边形的性质．

16. 如图，在方格纸中每个小正方形的边长都是 1，点 A、B、C、D 均落在格点上.则 $S_{\triangle BDC}$=_____；点 P 为线段 BD 中点，过点 P 作直线 $l \parallel BC$，过点 B 作 $BM \perp l$ 于点 M，过点 C 作 $CN \perp l$ 于点 N，则四边形 $BCNM$ 的面积为___________.



【答案】 ①. 4.5 ②. 4.5

【解析】

【分析】由题意得：$AD=3$，$AB=3$，由三角形面积公式得出 $S_{\triangle BDC}$，根据作图可得四边形 $BCNM$ 是矩形，根据 P 为线段 BD 中点，可得 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=S_{矩形CNMB}$ 即可求解

【详解】解：由题意得：$AD=3$，$AB=3$，

$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times DC\times AB=\frac{1}{2}\times3\times3=4.5$，

故答案为：4.5；

$\because$ $l // BC$， $BM\perp l$，$CN\perp l$，

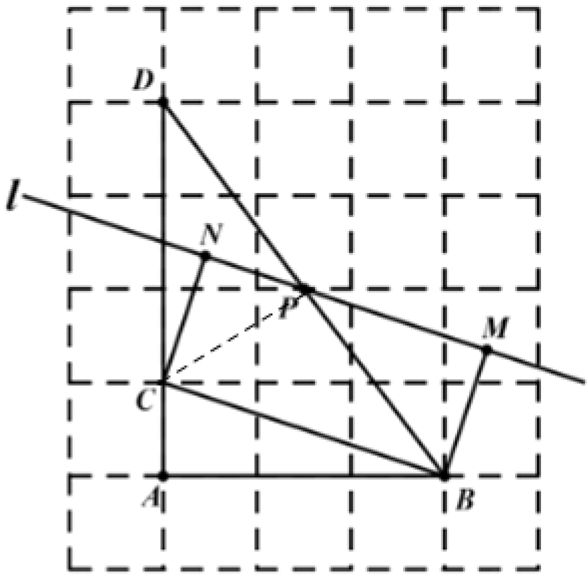
$\therefore$四边形 $BCNM$ 是矩形，

$\because$ P 为线段 BD 中点，连接 PC，

$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$， $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{矩形CNMB}=2.25$，

$\therefore S_{矩形CNMB}=4.5$．

故答案为：4.5， 4.5．



【点睛】本题考查了三角形中线的性质，矩形的性质与判定，掌握三角形中线的性质是解题的关键．

三、解答题（本题共 60 分，第 17-21 题，每小题 4 分，第 22 题 5 分，第 23 题 6 分，第 24-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$\sqrt{\frac{1}{2}}+|\sqrt{2}-2|-(\pi+1)^{0}+(\frac{1}{2})^{-1}$.

【答案】$3-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，化简绝对值，零指数幂，负整数指数幂进行计算即可.

【详解】解：原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}+2-\sqrt{2}-1+2$

$=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，掌握二次根式的性质，化简绝对值，零指数幂，负整数指数幂是解题的关键.

18. 计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$.

【答案】$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】按照二次根式的运算法则计算即可.

【详解】解：$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{6}$

$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

【点睛】此题主要考查二次根式的混合运算，熟练掌握运算法则，即可解题.

19. 计算：$\left(\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{3}$.

【答案】$\frac{17}{3}$

【解析】

【分析】先利用二次根式的性质进行化简，然后进行混合运算即可.

【详解】解：原式$=\left(4\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\div\sqrt{3}=\frac{17}{3}$.

【点睛】本题考查了二次根式的性质，二次根式的混合运算．解题的关键在于熟练掌握二次根式的性质与混合运算的法则.

20. 当 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$ 时，求代数式 $ab+b^2$ 的值.

【答案】$6-2\sqrt{3}$

【解析】

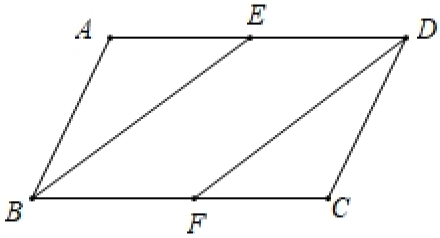
【分析】将 a,b 的值代入，计算求解即可.

【详解】解：将 a,b 的值代入得，原式$=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)^2=3-1+3-2\sqrt{3}+1=6-2\sqrt{3}$.

$\therefore ab+b^2$ 的值为$=6-2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了运用平方差公式、完全平方公式进行运算，代数式求值．解题的关键在于熟练掌握平方差公式与完全平方公式．

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，$AE=CF$，求证：$BE=DF$．



【答案】见解析

【解析】

【分析】先求出 $DE=BF$，再证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形，即可得出结论．

【详解】证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=BC$，$AD\parallel BC$，

∵$AE=CF$，

∴$DE=BF$，

又∵$DE\parallel BF$，

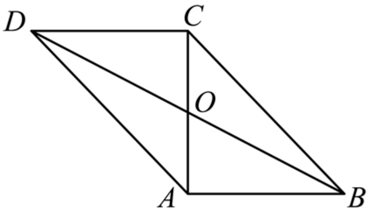
∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形，

∴$BE=DF$．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质；熟练掌握平行四边形的判定方法，证明四边形是平行四边形是解决问题的关键．

22. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O．若 $AB=3$，$AD=5$，$OC=2$．

求证：$AC\perp CD$．



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得，$AO=CO$，$AC=4$，$CD=AB=3$，$AD^2=AC^2+CD^2$，则$\angle ACD=90°$，进而结论得证．

【详解】证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AO=CO$，$AC=4$，$CD=AB=3$，

∵ $5^2=4^2+3^2$，

∴ $AD^2=AC^2+CD^2$，

∴ $\angle ACD=90°$，

∴ $AC\perp CD$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理的逆定理．解题的关键在于熟练掌握平行四边形的性质，勾股定理的逆定理判断直角三角形．

23. 如图，在4×4的正方形网格中，每个小方格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形ABC，使△ABC的面积为2．

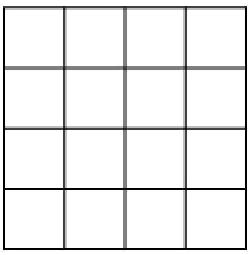


图1

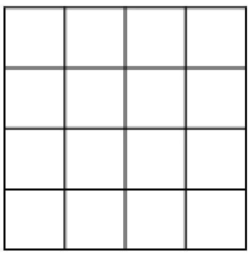


图2

（1）在图1中，画一个三角形ABC，使它的一边长是有理数，另外两边长是无理数．

（2）在图2中，画一个直角三角形ABC，使它的三边长都是无理数．

【答案】（1）作图见解析（答案不唯一）

（2）作图见解析（答案不唯一）

【解析】

【分析】（1）由题意知，令 $BC=4$，$AB=AC=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$，满足 $S_{\triangle ABC}=2$，如图 1，即为所作.

（2）由题意知，令 $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$\angle ACB=90°$，满足要求，如图 2，即为所作.

【小问 1 详解】

解：如图 1，

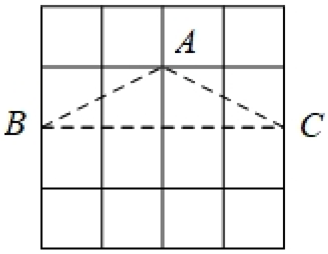


图1

$\because BC=4$，$AB=AC=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times4\times1=2$，

$\therefore BC$ 为有理数，AB，AC 为无理数，$S_{\triangle ABC}=2$，

$\therefore$图中 $\triangle ABC$ 即为所作.

【小问 2 详解】

解：如图 2，

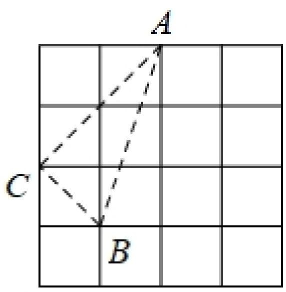


图2

∵ $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

$AB^2=AC^2+BC^2$，

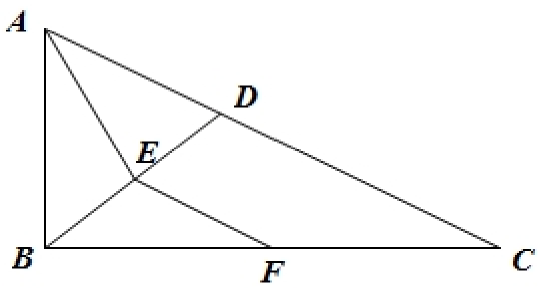
$\angle ACB=90°$，

∴ BC，AB，AC 均为无理数，$\triangle ABC$ 是直角三角形，

∴图中 $\triangle ABC$ 即为所作.

【点睛】本题考查了有理数，无理数，等腰三角形的判定，作格点三角形，勾股定理，勾股定理的逆定理等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

24. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC$=90°，在边 AC 上截取 AD=AB，连接 BD，过点 A 作 $AE\perp BD$ 于点 E，F 是边 BC 的中点，连接 EF. 若 AB＝5，BC＝12，求 EF 的长度.



【答案】4

【解析】

【分析】根据等腰三角形三线合一，得出点 E 是线段 BD 的中点，结合点 F 为线段 BC 的中点，进而得出线段 EF 是△BCD 的中位线，从而得出 EF 的长度.

【详解】解：∵在△ABD 中，AB=AD，$AE\perp BD$，

∴BE=ED，即点 E 是线段 BD 的中点，

又∵点 F 是线段 BC的中点，

∴EF 是△BCD 的中位线，

∴$EF=\frac{1}{2}DC$

∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=5$，$BC=12$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

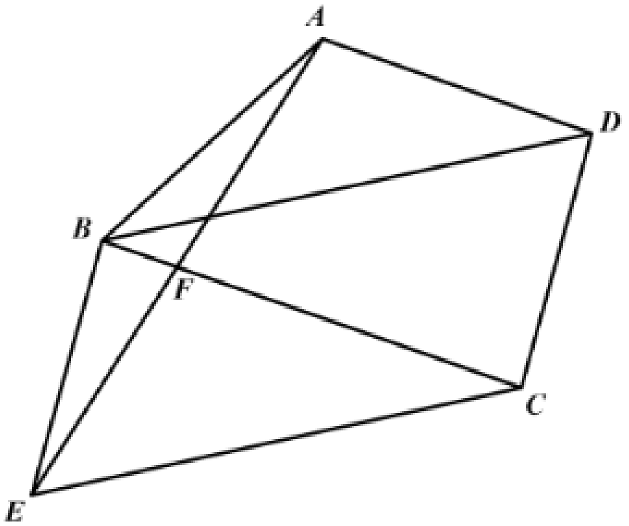
又∵$AD=AB=5$，

∴$DC=AC-AD=13-5=8$，

∴$EF=\frac{1}{2}DC=4$

【点睛】本题考查了等腰三角形三线合一，勾股定理，三角形的中位线等知识，掌握三角形中位线的性质是解题的关键.

25. 如图，四边形 $ABCD$，$AD\parallel BC$，连接 BD，过 B、C 分别作 CD、BD 的平行线交于点 E，连接 AE 交 BC 于点 F．求证：F 是 AE 的中点．

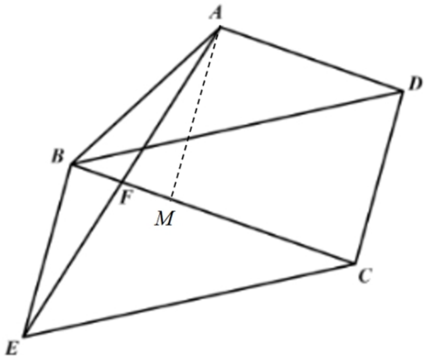


【答案】证明见解析

【解析】

【分析】如图，作 $AM\parallel CD$ 交 BC 于 M，由题意知，$BD\parallel CE$，$BE\parallel CD$，四边形 $BECD$ 是平行四边形，$BE=CD$，证明四边形 $AMCD$ 是平行四边形，则 $AM=CD=BE$，证明 $\triangle BEF\cong\triangle MAF\left(ASA\right)$，则 $EF=AF$，进而结论得证.

【详解】证明：如图，作 $AM\parallel CD$ 交 BC 于 M，



由题意知，$BD \,//\, CE$， $BE \parallel CD$，

$\therefore$四边形$BECD$是平行四边形，

$\therefore BE = CD$，

$\because AD // CM$， $AM \,//\, CD$，

$\therefore AM // BE$，四边形$AMCD$是平行四边形，

$\therefore AM = CD = BE$，

$\because AM // BE$，

$\therefore \angle BEF = \angle MAF$， $\angle EBF = \angle AMF$，

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle MAF\left(ASA\right)$，

$\therefore EF = AF$，

$\therefore F$ 是AE的中点.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定与性质．解题的关键在于作辅助线，证明$\triangle BEF \cong \triangle MAF$．

26. 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方． 例如：

$4 + 2\sqrt{3} = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 1^2 + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$.

这样小明就找到了一种把类似$4 + 2\sqrt{3}$的式子化为完全平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

（1）结合小明的探索过程填空：___+___$\sqrt{5}=\left(1+2\sqrt{5}\right)^2$；

（2）$7+4\sqrt{3}$的算术平方根为___；

（3）化简：$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\cdots+\sqrt{2n+1-2\sqrt{n\left(n+1\right)}}$．($n$为正整数)

【答案】（1）21；4

（2）$2+\sqrt{3}$

（3）$\sqrt{n+1}-1$

【解析】

【分析】（1）根据$\left(1+2\sqrt{5}\right)^2=21+4\sqrt{5}$，填写答案即可；

（2）由题意知，$7+4\sqrt{3}$配完全平方得$\left(2+\sqrt{3}\right)^2$，然后求算术平方根即可；

（3）由题意知，$2n+1-2\sqrt{n\left(n+1\right)}$配完全平方得$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2$，然后求得算术平方根为$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，将原式进行配完全平方和求算术平方根得$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，最后进行二次根式的加减运算即可.

【小问1详解】

解：$\because\left(1+2\sqrt{5}\right)^2=1+4\sqrt{5}+20=21+4\sqrt{5}$，

故答案为：21；4；

【小问2详解】

解：$\because 7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=2^2+4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$，

$\therefore\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}$，

故答案为：$2+\sqrt{3}$；

【小问3详解】

解：$\because 2n+1-2\sqrt{n(n+1)}=(n+1)-2\sqrt{n}\cdot\sqrt{(n+1)}+n$

$=\left(\sqrt{n+1}\right)^2-2\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+\left(\sqrt{n}\right)^2$

$=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2$，

$\therefore \sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

$\therefore \sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\cdots+\sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}$

$=\sqrt{2\times1+1-2\sqrt{1\times2}}+\sqrt{2\times2+1-2\sqrt{2\times3}}+\sqrt{2\times3+1-2\sqrt{3\times4}}+\cdots+\sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2}+\cdots+\sqrt{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$=\sqrt{n+1}-1$，

∴原式化简结果为$\sqrt{n+1}-1$.

【点睛】本题考查了完全平方公式运算、算术平方根、二次根式的加减运算．解题的关键在于熟练掌握完全平方公式.

27. 在 Rt△ABC 中，∠B=90°.

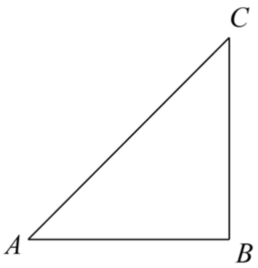


图 1

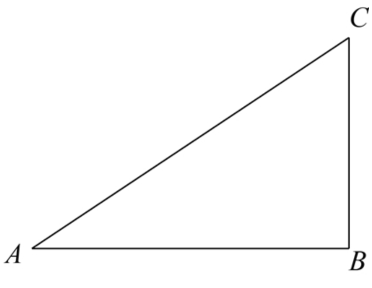


图 2

（1）如图 1，当 $AB=BC$ 时，直接写出线段 AC 与线段 AB 的数量关系；

（2）如图 2，若 $AB>BC$，用圆规在 AB 上截取 $AM=BC$，连接 CM，N 为线段 CB 上一点，连接 AN 交 CM 与点 P．请添加条件：当 $\angle APM=$___°时，使得 $AN=\sqrt{2}CM$ 成立，并证明这个命题；

（3）在（2）的条件下，取 AN 中点 H，连接 CH，若 $AM=4$，$CN=2$，则 $CH=$__.

【答案】（1）$AC=\sqrt{2}AB$

（2）45°，证明见解析

（3）$3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}BC$，进而可得结果；

（2）证明如下：如图 2，将 CM 逆时针旋转 90° 到 CD，连接 MD，作 $DN\perp BC$ 于 N，连接 AN 交 CM 于 P，作 $DF\perp AB$ 的延长线于 F，$\angle DCN=\angle CMB$，证明 $\triangle CDN\cong\triangle MCB(AAS)$，则 $DN=BC=AM$，由 $DM=\sqrt{CM^2+CD^2}=\sqrt{2}CM$，$AN=\sqrt{2}CM$，可知 $AN=DM$，证明 $\triangle ABN\cong\triangle MFD(SAS)$，则 $\angle NAB=\angle DMF$，$AN/\!/DM$，根据 $\angle APM=\angle PMD$ 可求 $\angle APM$ 的值；

（3）如图 2，连接 BH，作 $HE\perp BC$ 于 E，$HG\perp AB$ 于 G，由 H 是 AN 的中点，可知 $BH=\frac{1}{2}AN=HN=AH$，$\triangle AHB$ 与 $\triangle BHN$ 为等腰三角形，$AG=BG=\frac{1}{2}AB$，$EN=BE=\frac{1}{2}BN$，$HE=GB$，由（2）可知 $BM=CN=2$，$BN=BC-CN=2$，求出 EN，CE，HE，AB 的值，根据 $Rt\triangle CEH$ 中，由勾股定理得 $CH=\sqrt{CE^2+HE^2}$，求 CH 的值即可．

【小问 1 详解】

解：$AC=\sqrt{2}AB$．

∵ $\angle B=90^\circ$，$AB=BC$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}BC$．

【小问 2 详解】

解：$\angle APM = 45°$．

证明如下：如图 2，将 CM 逆时针旋转 $90°$ 到 CD，连接 MD，作 $DN \perp BC$ 于 N，连接 AN 交 CM 于 P，作 $DF \perp AB$ 的延长线于 F，

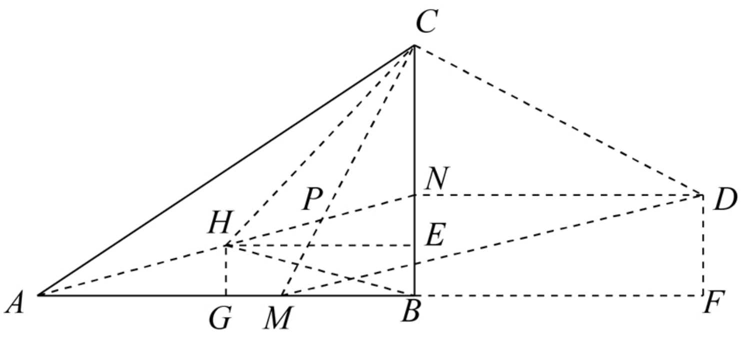


图 2

由题意知 $CD = CM$，$\angle CND = 90°$，$\angle DCM = 90°$，

$\therefore \angle CMD = \angle CDM = 45°$，

$\because \angle DCN + \angle MCB = 90°$，$\angle CMB + \angle MCB = 90°$，

$\therefore \angle DCN = \angle CMB$，

$\therefore \triangle CDN \cong \triangle MCB\left(AAS\right)$，

$\therefore DN = BC = AM$，

$\because DM = \sqrt{CM^2 + CD^2} = \sqrt{2}CM$，$AN = \sqrt{2}CM$，

$\therefore AN = DM$，

$\because DF \perp BF$，

$\therefore DF \parallel BC$，

$\because DN \perp BC$，$FB \perp BC$，

$\therefore DN = BF$，

同理，$DF = BN$，

$\therefore AB = MF$，

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle MFD(SAS)$，

$\therefore \angle NAB = \angle DMF$，

$\therefore AN // DM$，

$\therefore \angle APM = \angle PMD = 45^\circ$，

故答案为：45°．

【小问3详解】

解：如图2，连接BH，作$HE \perp BC$于E，$HG \perp AB$于G，

$\because H$是AN的中点，

在$Rt\triangle ABN$中，$BH = \frac{1}{2}AN = HN = AH$，

$\therefore \triangle AHB$与$\triangle BHN$为等腰三角形，

$\therefore AG = BG = \frac{1}{2}AB$，$EN = BE = \frac{1}{2}BN$，

$\because HG // BC$，$HE \perp BC$，$GB \perp BC$，

$\therefore HE = GB$，

由（2）可知$BM = CN = 2$，

$\therefore BN = BC - CN = 2$，

$\therefore EN = 1$，$CE = 3$，$AB = AM + BM = 6$，$HE = 3$，

在$Rt\triangle CEH$中，由勾股定理得$CH = \sqrt{CE^2 + HE^2} = 3\sqrt{2}$，

故答案为：$3\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了勾股定理，旋转的性质，全等三角形的判定与性质，平行线的判定，等腰三角形的判定与性质，直角三角形斜边的中线等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

28. 对于平面直角坐标系xOy中的图形M、N，给出如下定义：P为图形M上任意一点，Q为图形N上任意一点，如果P，Q两点间的距离有最小值，那么称这个最小值为图形M，N间的“近距离”，记作$d(M，N)$．在$\square ABCD$中，点$A(4,8)$，$B(-4,0)$，$C(-4,-8)$，$D(4,0)$，如图1．

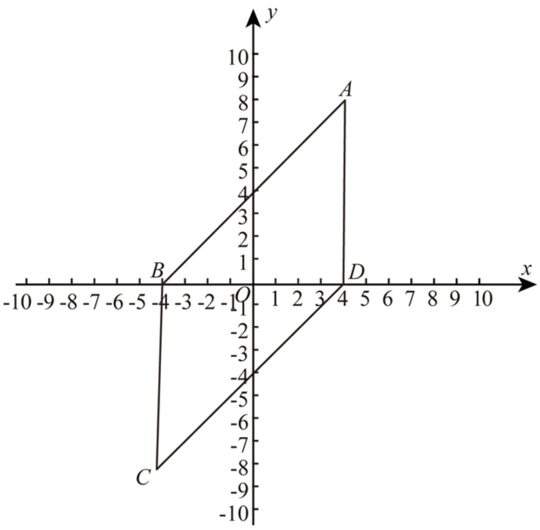


图1

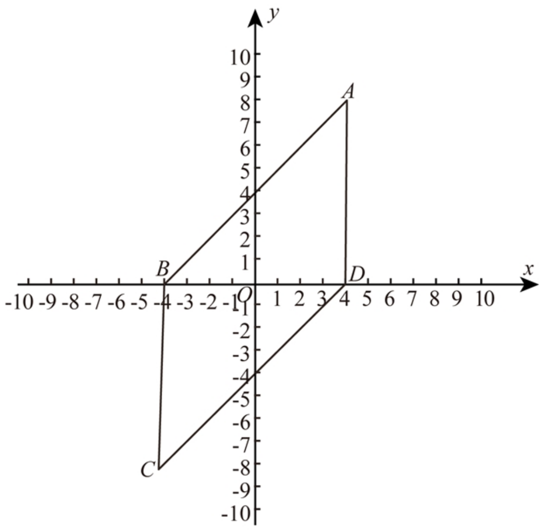


图2

（1）直接写出 d(点 O，▱$ABCD$)=___；

（2）若点 P 在 y 轴正半轴上，d（点 P，▱$ABCD$ ）=4，求点 P 坐标；

（3）已知点 $E(a,-a)$，$F(a+2,-a)$，$G(a+1,-a-1)$，$H(a+3,-a-1)$，顺次连接点 E、F、H、G，将得到的四边形记为图形 W（包括边界）.

①当 $a=-1$ 时，在图 2 中画出图形 W，直接写出 $d(W,▱ABCD)$ 的值；

②若 $0\le d(W,▱ABCD)<1$，直接写出 a 的取值范围.

【答案】（1）$2\sqrt{2}$

(2) $\left(0,4+4\sqrt{2}\right)$

(3) ①作图见解析，$\sqrt{2}$；②$-4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由 A,B,C,D 的点坐标可知 O 为▱$ABCD$ 对角线的交点，可知点 O 到 BC，AD 的距离相等且为 4；点 O 到 AB，CD 的距离相等；如图 1，记 AB 与 y 轴的交点为 M，$\angle ABD=\angle BMO=45°$，在 $Rt\triangle OBM$ 中，由勾股定理得 $BM=\sqrt{OB^2+OM^2}=4\sqrt{2}$，设 O 到 AB 的距离为 h，根据 $S_{\triangle BOM}=\dfrac{1}{2}\times OB\times OM=\dfrac{1}{2}BM\times h$，求出 h 的值，然后与 4 比较取最小值即可；

（2）如图 1，作 $PQ\perp AB$ 于 Q，由 d（点 P，$▱ABCD$ ）=4，可知 $PQ=4$，且 $\angle PMQ=\angle BMO=45°$，在 $Rt\triangle PQM$ 中，由勾股定理得 $PM=\sqrt{MQ^2+PQ^2}$，求出 PM 的值，进而可得 P 点坐标；

（3）①由 $a=-1$，可得 $E(-1,1)$、$F(1,1)$、$G(0,0)$、$H(2,0)$，在坐标系中描点，依次连接如图 2 所示，$▱EFHG$ 即为图形 W；延长 GE 交 AB 于 M，交 CD 于 K，延长 FH，交 CD 于 N，由 E、F、G、H 点坐标可知 $\angle MGB=45°=\angle ABD$，$\angle OMB=90°=\angle GKD$，可知 $MO=BM$，$ME=HN$，$d(W,▱ABCD)=ME$，根据勾股定理求解 OE，OM 的值，根据 $ME=OM-OE$，求出 ME 的值即可；②由 E,F,H,G 的点坐标可知，$EF=GH=2$，$EG=FH=\sqrt{2}$，四边形 $EFHG$ 是一个大小不变的平行四边形，且 E 点沿着直线 MK 运动，如图 2，作 $HJ\perp EG$ 的延长线于 J，$\angle JOH=\angle OHJ=45°$，$EJ=2\sqrt{2}$，$EJ=OK$，分情况求解：当 $0\le a\le 2$ 时，W 与 $▱ABCD$ 有交点，满足要求；当 $a>2$，$KE=1$ 时，$OE=OK+KE=2\sqrt{2}+1$，可得 E 点坐标与 a 的值，此时有 $0\le a<2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，满足要求；当 $a<0$，$JK=1$ 时，$OE=EJ-OJ=2\sqrt{2}-\left(2\sqrt{2}-1\right)=1$，可得 E 点坐标与 a 的值，此时有 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<0$，满足要求；当 E 在 M 右侧且 $ME=1$ 时，$OE=2\sqrt{2}-1$，可得 E 点坐标与 a 的值，当 J 在 M 的左侧且 $JM=1$ 时，$OE=EJ+JM+OM=4\sqrt{2}+1$，可得 E 点坐标与 a 的值，此时有 $-4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，满足要求.

【小问 1 详解】

解：由 A,B,C,D 的点坐标可知 O 为 $▱ABCD$ 对角线的交点，

$\therefore$ 点 O 到 BC，AD 的距离相等且为 4；点 O 到 AB，CD 的距离相等；

如图 1，记 AB 与 y 轴的交点为 M，

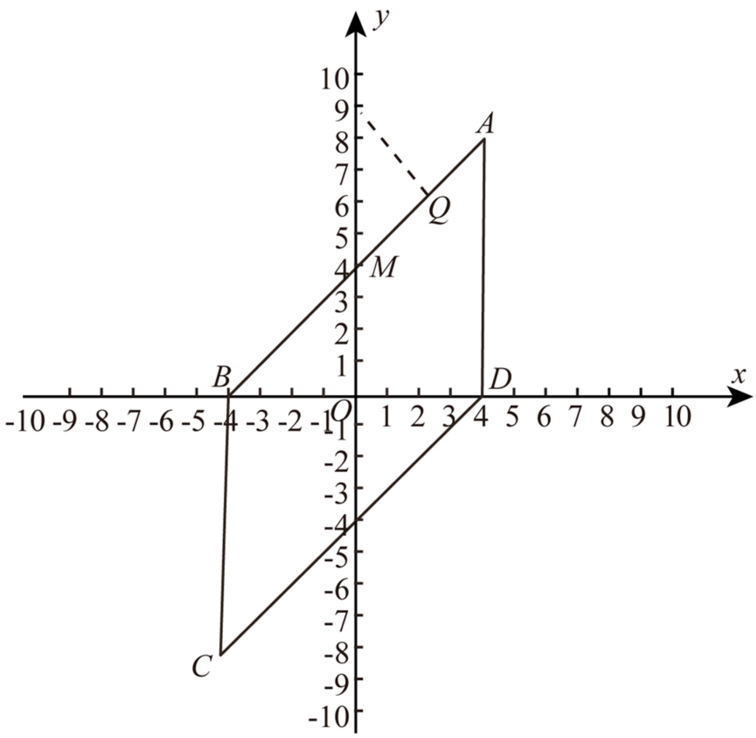


图1

$\because AD = 8 = BD$，

$\therefore \angle ABD = \angle BMO = 45^\circ$，

$\therefore OM = OB = 4$，

在 $Rt\triangle OBM$ 中，由勾股定理得 $BM = \sqrt{OB^2 + OM^2} = 4\sqrt{2}$，

设 O 到 AB 的距离为 h，

$\therefore S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} \times OB \times OM = \frac{1}{2} BM \times h$，

$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times h$，

解得 $h = 2\sqrt{2}$，

$\because 2\sqrt{2} < 4$，

$\therefore d($点 O，$\square ABCD)$ 的值为 $2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$．

【小问 2 详解】

解：如图 1，作 $PQ \perp AB$ 于 Q，

∵ d（点 P，▱$ABCD$ ）=4，

∴ $PQ = 4$，

∵ $\angle PMQ = \angle BMO = 45°$，

∴ $MQ = PQ = 4$，

在 $Rt\triangle PQM$ 中，由勾股定理得 $PM = \sqrt{MQ^2 + PQ^2} = 4\sqrt{2}$，

∴ $OP = 4 + 4\sqrt{2}$，

∴点 P 坐标为 $\left(0, 4 + 4\sqrt{2}\right)$.

【小问 3 详解】

解：①∵ $a = -1$，

∴ $E(-1,1)$、$F(1,1)$、$G(0,0)$、$H(2,0)$，

在坐标系中描点，依次连接如图 2 所示，▱$EFHG$ 即为图形 W，

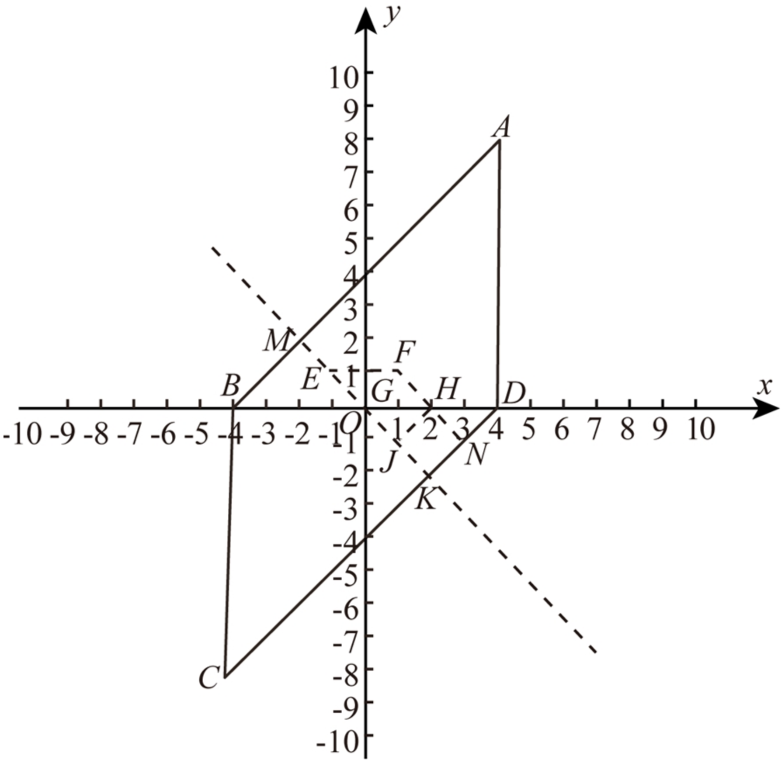


图2

延长 GE 交 AB 于 M，交 CD 于 K，延长 FH，交 CD 于 N，由 $E(-1,1)$，$F(1,1)$，$G(0,0)$，$H(2,0)$ 可知 $\angle MGB=45^\circ=\angle ABD$，

$\therefore \angle OMB=90^\circ=\angle GKD$，

$\therefore MO=BM$，$ME=HN$，

由题意知，$d(W,▱ABCD)=ME$，

$\because OE=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$OM^2+BM^2=OB^2$，

$\therefore OM=2\sqrt{2}$，

同理 $OK=2\sqrt{2}$，

$\therefore ME=OM-OE=\sqrt{2}$，

$\therefore d(W,▱ABCD)$ 的值为 $\sqrt{2}$．

②由 E,F,H,G 的坐标可知，$EF=GH=2$，$EG=FH=\sqrt{2}$，四边形 $EFHG$ 是一个大小不变的平行四边形，且 E 点沿着直线 MK 运动，如图 2，作 $HJ\perp EG$ 的延长线于 J，

$\because \angle JOH=\angle OHJ=45^\circ$，

$\therefore JG = HJ = \sqrt{2}$，

$\therefore EJ = 2\sqrt{2}$，

$\therefore EJ = OK$，

当$0 \le a \le 2$时，W与$\square ABCD$有交点，$d(W,\square ABCD) = 0$，

当$a > 2$，$KE = 1$时，$OE = OK + KE = 2\sqrt{2} + 1$，

$\therefore E\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore$可知$0 \le a < 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$0 \le d(W,\square ABCD) < 1$；

当$a < 0$，$JK = 1$时，$OE = EJ - OJ = 2\sqrt{2} - \left(2\sqrt{2}-1\right) = 1$，

$\therefore E\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore$可知$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < 0$时，$0 < d(W,\square ABCD) < 1$；

当E在M右侧且$ME = 1$时，$OE = 2\sqrt{2} - 1$，

$\therefore E\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2},2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

当J在M的左侧且$JM = 1$时，$OE = EJ + JM + OM = 4\sqrt{2} + 1$，

$\therefore E\left(-4-\dfrac{\sqrt{2}}{2},4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore$可知$-4-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < -2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$0 \le d(W,\square ABCD) < 1$；

综上所述，a的取值范围为$-4-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < -2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

【点睛】本题考查了坐标与图形，等腰三角形的判定与性质，勾股定理，平行四边形的判定与性质，两平行线间距离相等，新定义下的实数运算等知识．解题的关键在于理解题意，分情况求解．