

数学试卷

学校 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 考号 _____

- 考生须知
1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。
 2. 在试卷和答题卡上认真填写学校名称、姓名和准考证号。
 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
 4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
 5. 考试结束，请将本试卷、答案卡和草稿纸一并交回。

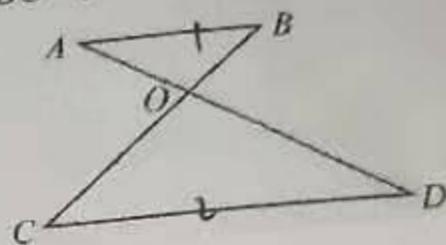
一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 如图，AD, BC 相交于点 O, AB // CD. 若 AB=1, CD=2, 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle DCO$ 的面积之比为 (B)

- A. 1:2
C. 2:1

- B. 1:4
D. 4:1



2. 方程 $x^2 - x + 3 = 0$ 的根的情况是 (C) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 12$

- A. 有两个不相等的实数根
C. 无实数根

- B. 有两个相等的实数根
D. 只有一个实数根

3. 将抛物线 $y = x^2$ 向上平移 2 个单位后得到新的抛物线的表达式为 (A)

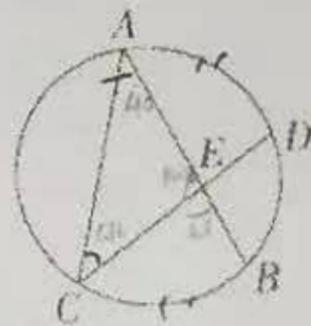
- A. $y = x^2 + 2$
C. $y = (x + 2)^2$

- B. $y = x^2 - 2$
D. $y = (x - 2)^2$

4. 如图，圆的两条弦 AB, CD 相交于点 E, 且 $\widehat{AD} = \widehat{CB}$, $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle CEB$ 的度数为 (B)

- A. 50°
C. 70°

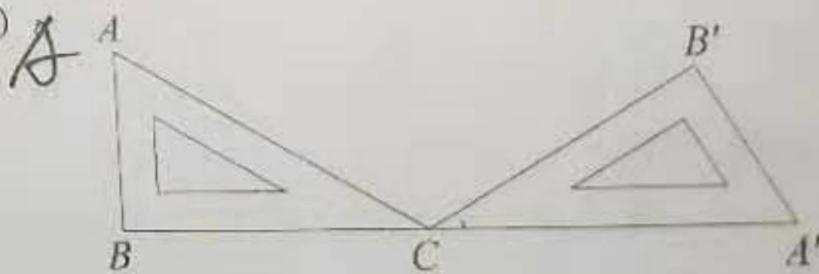
- B. 80°
D. 90°



5. 如图，一块含 30° 角的直角三角板 ABC 绕点 C 顺时针旋转到 $\triangle A'B'C'$, 当 B, C, A' 在一条直线上时，三角板 ABC 的旋转角度为 (A)

- A. 150°
C. 60°

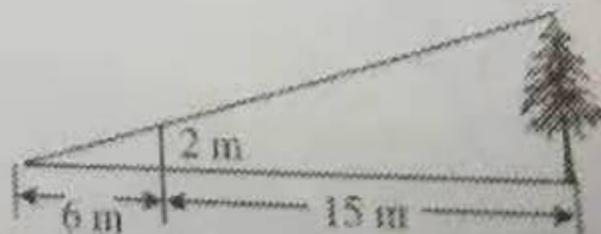
- B. 120°
D. 30°



6. 如图，为了测量某棵树的高度，小刚用长为 2m 的竹竿做测量工具，移动竹竿使竹竿、树的顶端的影子恰好落在地面的同一点。此时，竹竿与这一点相距 6m，与树相距 15m，那么这棵树的高度为 (B)

- A. 5m
C. 7.5m

- B. 7m
D. 21m



$$\frac{6}{21} = \frac{2}{h}$$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，四条抛物线如图所示，其解析式中的二次项系数一定大于 1 的是 ()

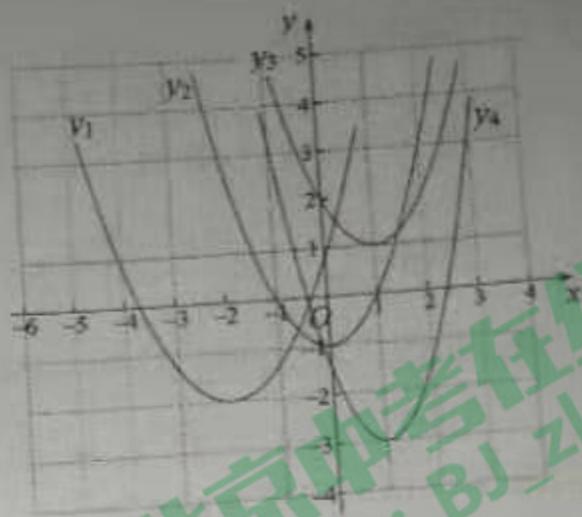
的是 (~~A~~) **B**

A. y_1

B. y_2

C. y_3

D. y_4



8. 小张承包了一片荒山，他想把这片荒山改造成一个苹果园，现在有一种苹果树苗，它的成活率如下表所示：

移植棵数(n)	成活数(m)	成活率(m/n)	移植棵数(n)	成活数(m)	成活率(m/n)
50	47	0.940	1500	1335	0.890
270	235	0.870	3500	3203	0.915
400	369	0.923	7000	6335	0.905
750	662	0.883	14000	12628	0.902

下面有四个推断：

①当移植的棵数是 1 500 时，表格记录成活数是 1 335，所以这种树苗成活的概率是 0.890；

②随着移植棵数的增加，树苗成活的频率总在 0.900 附近摆动，显示出一定的稳定性，

可以估计树苗成活的概率是 0.900；

③若小张移植 10 000 棵这种树苗，则可能成活 9 000 棵；

④若小张移植 20 000 棵这种树苗，则一定成活 18 000 棵。

其中合理的是 ()

A. ①③

B. ①④

C. ②③

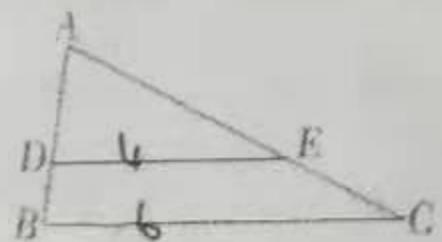
D. ②④

二、填空题 (本题共 16 分，每小题 2 分)

9. 半径为 2 且圆心角为 90° 的扇形面积为 π 。

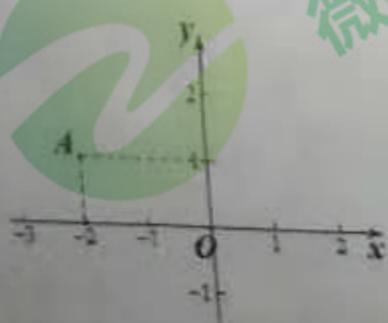
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 AB, AC 上，且 $DE \parallel BC$ 。

若 $AD=2, AB=3, DE=4$ ，则 BC 的长为 6。

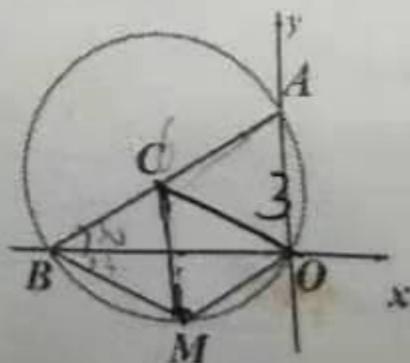


11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，若点 B 与点 A 关于点 O 中心

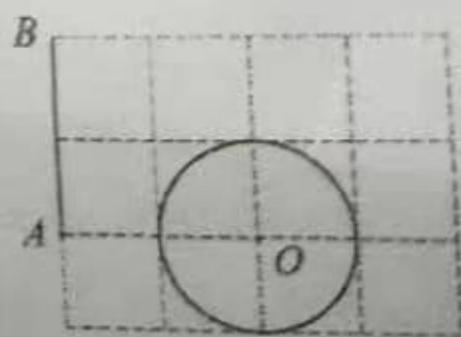
对称，则点 B 的坐标为 $(2, -1)$ 。



第 11 题图



第 12 题图



第 14 题图

12. 如图, $\odot C$ 过原点, 且与坐标轴分别交于点 A, B 点 A 的坐标为 $(0, 3)$, M 是第三象限内 \widehat{OB} 上一点, $\angle BMO = 120^\circ$, 则 $\odot C$ 的半径为 3.

13. 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 1$ 的图象, 若 $1 < x_1 < 2$ $3 < x_2 < 4$, 则 y_1 < y_2 . (填 " $>$ ", " $=$ " 或 " $<$ ")

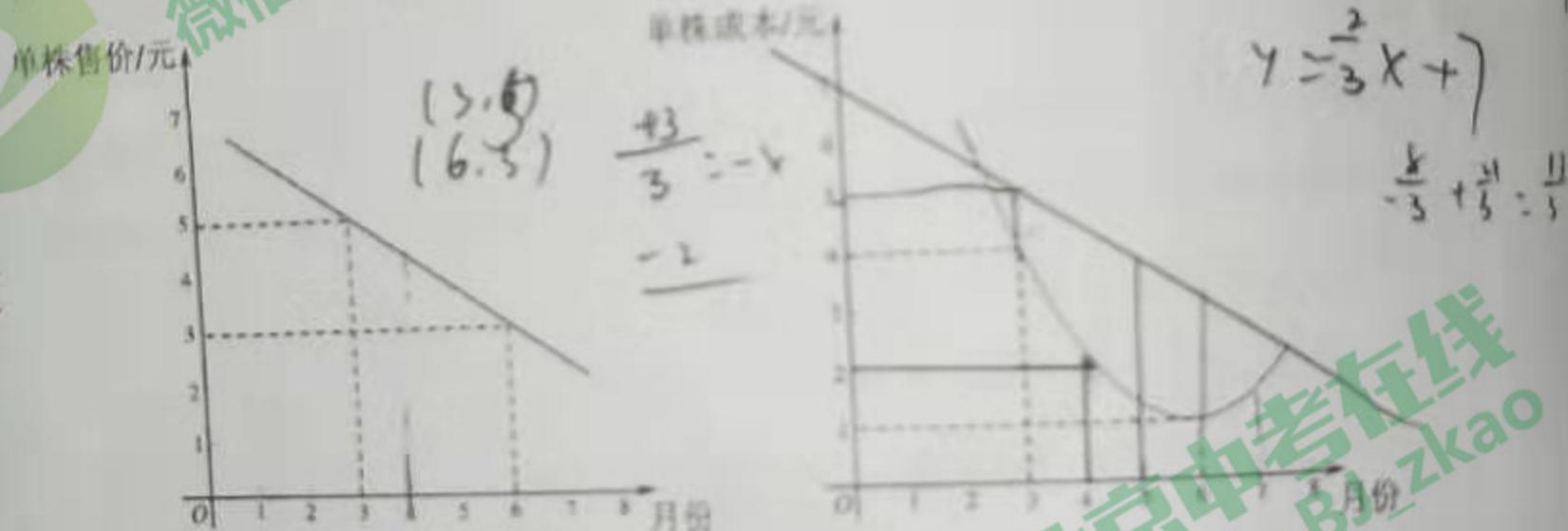
14. 如图所示的网格是正方形网格, 线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 后与 $\odot O$ 相切, 则 α 的值为 60° 或 120° .

15. 某民宿酒店收费标准如下:

房型	1 人间	3 人间	5 人间	7 人间
每间租金(元/天)	800	1000	1200	1500

北京市参加冬奥会的男子代表团共 15 名运动员, 比赛期间一起入住该民宿酒店, 则每天住宿费用最低为 3600 元.

16. 小哲的姑妈经营一家花店, 随着越来越多的人喜爱“多肉植物”, 姑妈也打算销售“多肉植物”. 小哲帮助姑妈针对某种“多肉植物”做了市场调查后, 绘制了以下两张图表:



(1) 如果在三月份出售这种植物, 单株获利 1 元;

(2) 在 5 月销售这种多肉植物, 单株获利最大. (提示: 单株获利 = 单株售价 - 单株成本)

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-22 题每题 5 分, 第 23 题 6 分, 24 题 5 分, 25 题 7 分, 26 题 6 分, 27、28 题 7 分)

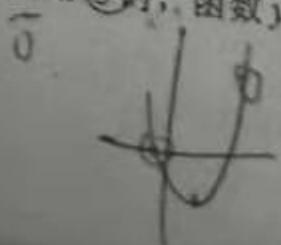
17. 解方程: $2(x-1)^2 - 16 = 0$

18. 已知二次函数部分自变量和对应的函数值如表:

x	...	(-1)	0	2	4	(5)	...
y	...	(0)	-1	0	5	(9)	...

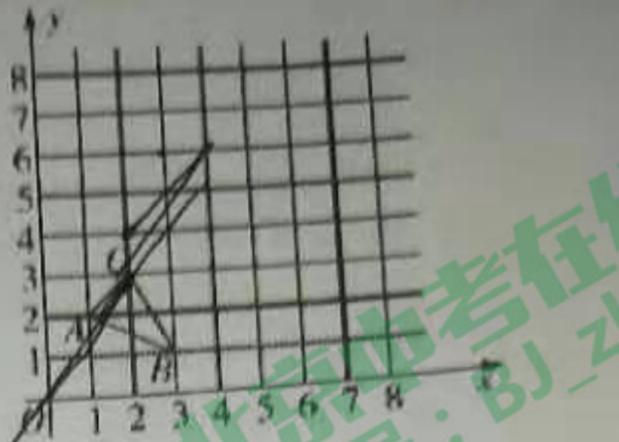
(1) 求此二次函数的解析式

(2) 当 $-1 < x < 5$ 时, 函数 y 的取值范围是 $0 < y < 9$



19. 如图, $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 3)$, 以原点为位似中心, 将 $\triangle ABC$ 放大为原来的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$.

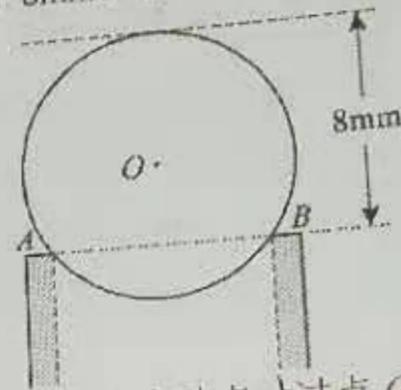
- (1) 点 A' 的坐标为 _____
 (2) 在第一象限内画出符合要求的 $\triangle A'B'C'$.
 (不写出画法)



20. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$.

- (1) 当 $b=a+2$ 时, 利用根的判别式判断方程根的情况;
 (2) 若方程有两个相等的实数根, 写出一组满足条件的 a, b 的值, 并求此时方程的根.

21. 一些不便于直接测量的圆形孔道的直径可以用如下方法测量. 如图, 把一个直径为 10mm 的小钢球紧贴在孔道边缘, 测得钢球顶端离孔道外端的距离为 8mm. 求这个孔道的直径 AB .



22. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=3$, $BC=4$. 点 Q 是线段 AC 上的一个动点, 过点 Q 作 AC 的垂线交直线 AB 于点 P .

- (1) 当点 P 在线段 AB 上时, 求证: $\triangle AQP \sim \triangle ABC$.

$PQ = PB$

$\frac{15 - 6\sqrt{2}}{5} = 3 - \frac{6\sqrt{2}}{5}$

$PQ = PB$
 $BQ = BP$
 $PQ = BQ$



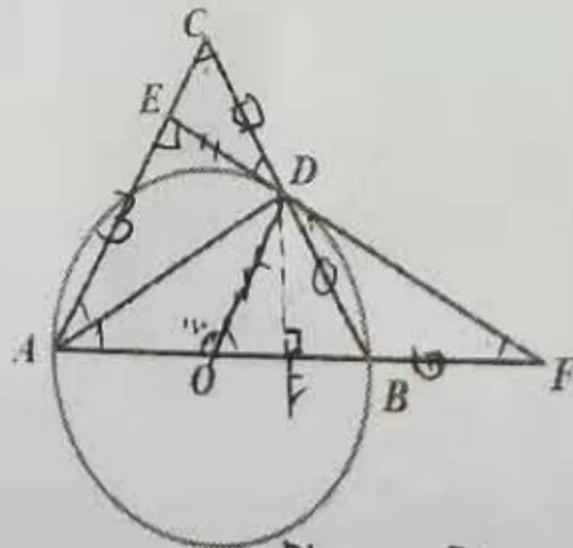
$\frac{12\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$

$\frac{15 - 6\sqrt{2}}{5}$
 $\sqrt{2}x = \frac{12}{5}$
 $x = \frac{12}{5\sqrt{2}}$

(2) 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, 直接写出 AP 的长 _____.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D , 过点 D 作 AC 的垂线交 AC 于点 E , 交 AB 的延长线于点 F .

- (1) 求证: DE 与 $\odot O$ 相切;
 (2) 若 $CD=BF$, $AE=3$, 求 DF 的长.



$\frac{15 - 12\sqrt{2}}{5}$

$= 3 - 4\sqrt{2}$

$3 - \frac{6}{5}\sqrt{2}$

$\frac{PB}{3} = \frac{PQ}{4}$

$D-1=0$

$y = ax^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

24. 利用函数 $y=(x-1)(x-2)$ 的图象和性质，探究函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 的图象和性质。

下面是小东的探究过程，请补充完整：

(1) 函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 的自变量 x 的取值范围是_____。

(2) 如图2，他列表描点画出了函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 图象的一部分，请补全函数图

象：



图1



图2

解决问题：

设方程 $\sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{4}x - b = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，方程 $x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}x + b$ 的两

根为 x_3, x_4 ，且 $x_3 < x_4$ 。若 $1 < b < \sqrt{2}$ ，则 x_1, x_2, x_3, x_4 的大小关系为_____（用“<”连接）。

25. 数学课上学习了圆周角的概念和性质：“顶点在圆上，两边与圆相交”，“同弧所对的圆周角相等”，小明在课后继续对圆外角和圆内角进行了探究。

下面是他的探究过程，请补充完整：

定义概念：

顶点在圆外，两边与圆相交的角叫做圆外角。顶点在圆内，两边与圆相交的角叫做圆内角。

如图1， $\angle M$ 为 \widehat{AB} 所对的一个圆外角。

(1) 请在图2中画出 \widehat{AB} 所对的一个圆内角；



图1

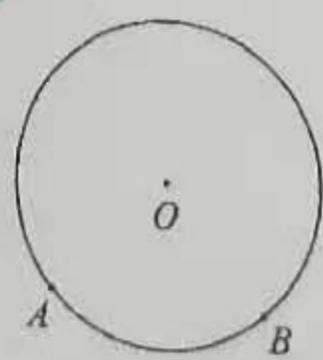


图2

提出猜想：

(2) 通过多次画图、测量，获得了两个猜想：一条弧所对的圆外角____这条弧所对的圆周角；
一条弧所对的圆内角____这条弧所对的圆周角；（填“大于”、“等于”或“小于”）

推理证明：

(3) 利用图1或图2，在以上两个猜想中任选一个进行证明；

问题解决：

经过证明后，上述两个猜想都是正确的，应用这两个正确的结论解决下面的问题。
如图3，设墙壁上的展品最高处点P距离地面a米，最低处点Q距离地面b米，则站在何处观赏最理想？所谓观赏最理想“是指看展品时的视角（ $\angle PEQ$ ）最大”，问题转化为“在水平视线EF上求使视角最大的点”

(4) 如图4，点A(1,0)，B(5,0)，点P是y上一点， $\angle APB$ 是否有最大值？若有，直接出点P的坐标；若没有，说明理由。

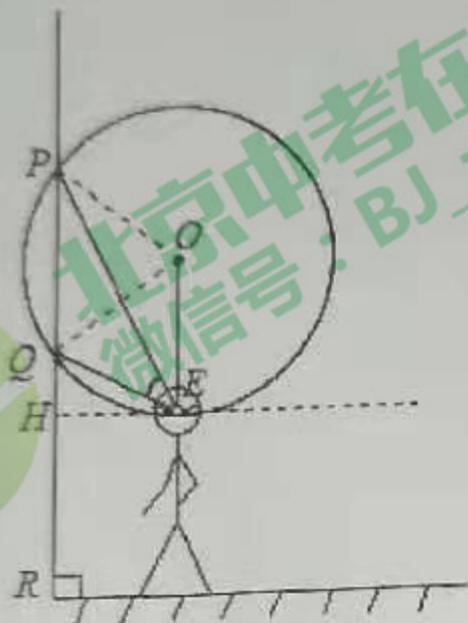


图3

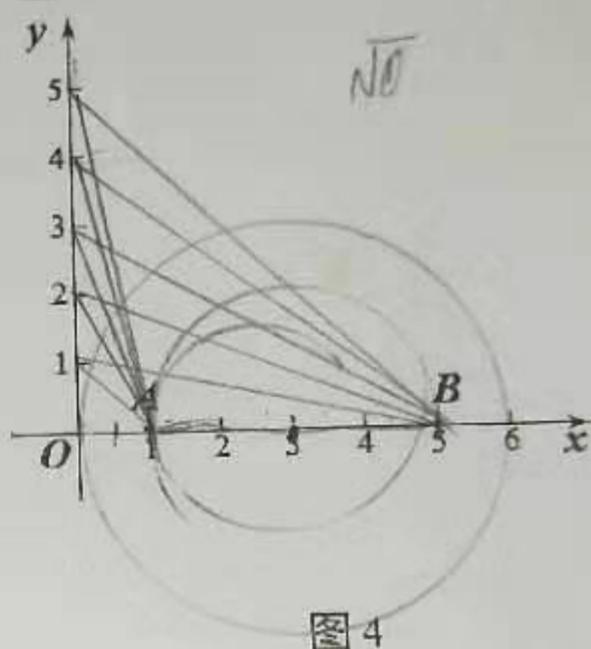


图4

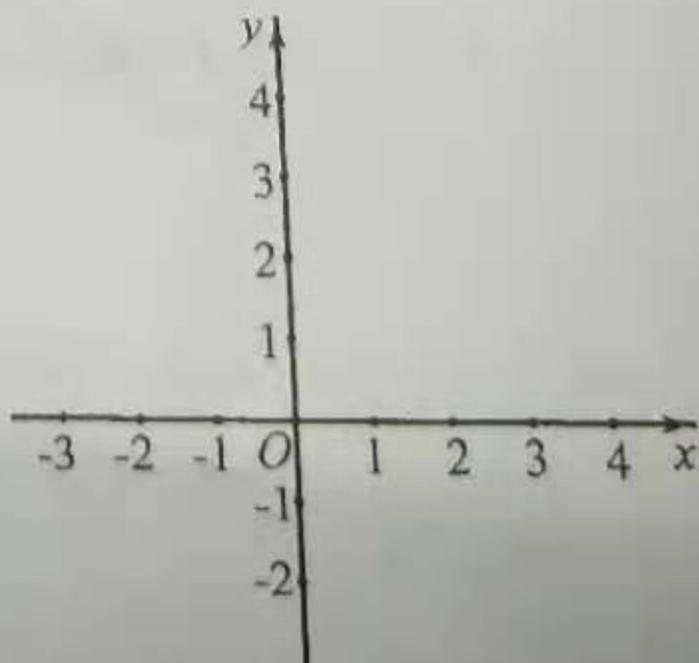
26. 已知二次函数 $y = x^2 - ax + b$ 在 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时的函数值相等。

(1) 求二次函数 $y = x^2 - ax + b$ 的对称轴；

(2) 过 $P(0, 1)$ 作 x 轴的平行线与二次函数 $y = x^2 - ax + b$ 的图象交于不同的两点 M, N 。

① 当 $MN = 2$ 时，求 b 的值；

② 当 $PM + PN = 4$ 时，请结合函数图象，写出 b 的取值范围，并说明理由。



27. 已知 $\angle MON = \alpha$, P 为射线 OM 上的点, $OP = 1$.

(1) 如图 1, $\alpha = 60^\circ$, A, B 均为射线 ON 上的点, $OA = 1, OB > OA$, 将 PB 绕点 P 逆时针旋转 60° 得到线段 PC , 连接 BC, AC .

① 依题意将图 1 补全;

② 判断直线 AC 与 OM 的位置关系: _____.

(2) 若 $\alpha = 45^\circ$, Q 为射线 ON 上一动点 (Q 与 O 不重合), 以 PQ 为斜边作等腰直角 $\triangle PQR$, 使 O, R 两点位于直线 PQ 的异侧, 连接 OR , 求 $\triangle POR$ 的面积.

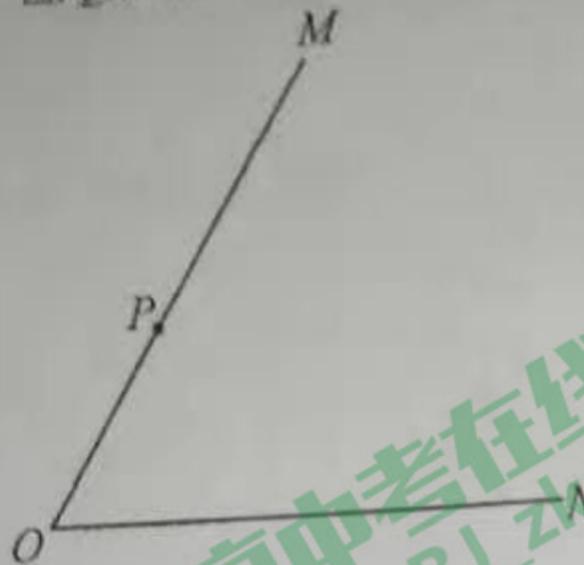


图 1



28. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 是 $\odot C$ 外一点, 连接 CP 交 $\odot C$ 于点 Q , 点 P

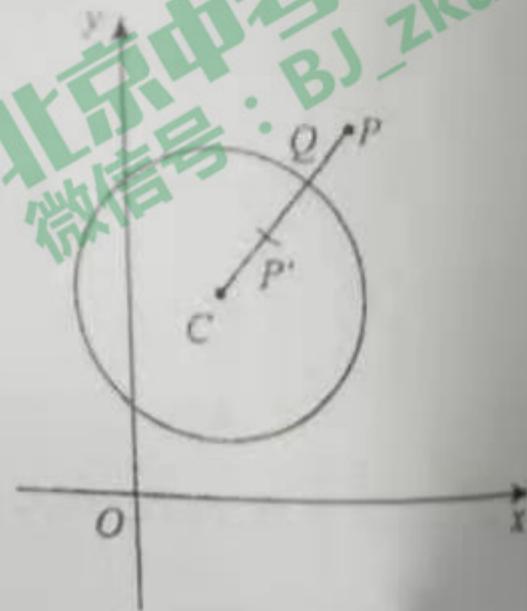
关于点 Q 的对称点为 P' , 当点 P' 在线段 CQ 上时, 称点 P 为 $\odot C$ “友好点”.

已知 $A(1,0), B(0,2), C(3,3)$

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时,

① 点 A, B, C 中是 $\odot O$ “友好点” 的是 _____;

② 已知点 M 在直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 上, 且点 M 是 $\odot O$ “友好点”, 求点 M 的横坐标 m 的取值范围;



(2) 已知点 $D(2\sqrt{3}, 0)$, 连接 BC, BD, CD , $\odot T$ 的圆心为 $T(t, -1)$, 半径为 1, 若在 $\triangle BCD$ 上存在一点 N , 使点 N 是 $\odot T$ “友好点”, 求圆心 T 的横坐标 t 的取值范围.