



2023 北京燕山初三一模

数 学

2023 年 4 月

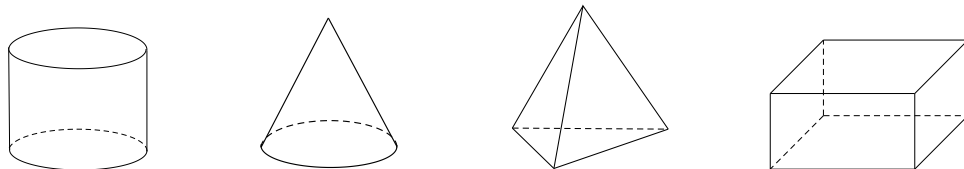
考生须知

1. 本试卷共 6 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题纸上准确填写学校名称、班级、姓名和考号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。
4. 在答题纸上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，请将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 下列几何体中，是圆锥的为



A.

B.

C.

D.

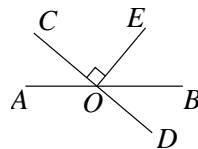
2. 近年来，我国充电基础设施快速发展，已建成世界上数量最多、分布最广的充电基础设施网络，有效支撑了新能源汽车的快速发展。2022 年，我国充电基础设施累计数量达到 520 万台左右。将 5 200 000 用科学记数法表示应为

- A. 52×10^5 B. 5.2×10^6 C. 5.2×10^7 D. 0.52×10^7

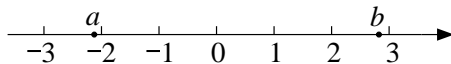
3. 如图，直线 AB , CD 相交于点 O , $OE \perp CD$, 垂足为 O ,

若 $\angle BOD = 40^\circ$, 则 $\angle AOE$ 的大小为

- A. 50° B. 120°
C. 130° D. 140°



4. 实数 a , b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是



- A. $a > -2$ B. $b > 3$ C. $|a| > b$ D. $a + b > 0$

5. 若一个多边形的每个外角都是 45° , 则该多边形的边数为

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

6. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有实数根, 则 m 的值不可能是

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

7. 为了学习宣传党的二十大精神, 某校学生宣讲团赴社区宣讲. 现从 2 名男生 1 名女生中任选 2 人, 则恰好选中 1 名男生 1 名女生的概率为



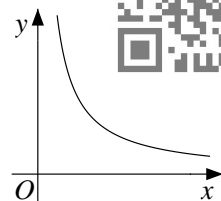
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 下面的三个问题中都有两个变量:

- ①正方形的周长 y 与边长 x ;
 ②一个三角形的面积为 5, 其底边上的高 y 与底边长 x ;
 ③小赵骑行 10km 到公司上班, 他骑行的平均速度 y 与骑行时间 x ;

其中, 变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以用如图所示的图象表示的是

- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③



二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

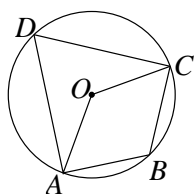
9. 若 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式: $3a^2 - 3b^2 =$ _____.

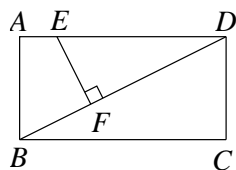
11. 方程 $\frac{2}{x} = \frac{1}{x-3}$ 的解为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $P(2, 1)$ 和点 $Q(-2, m)$, 则 m 的值为_____.

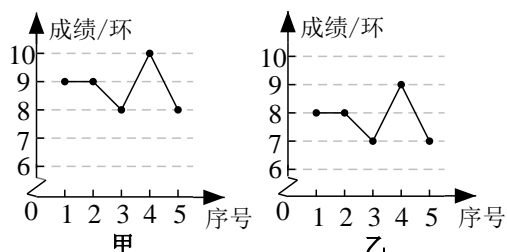
13. 如图, 点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上, $\angle AOC = 130^\circ$, 则 $\angle ABC =$ _____°.



(第 13 题)



(第 14 题)



(第 15 题)

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, $EF \perp BD$ 于点 F . 若 $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, $EF = 1$, 则 DE 的长为_____.

15. 甲、乙两名射击爱好者 5 次射击测试成绩(单位: 环)的统计图如图所示. 记甲、乙两人这 5 次测试成绩数据的平均数分别为 $\bar{x}_甲$, $\bar{x}_乙$, 方差分别为 $s_甲^2$, $s_乙^2$, 则 $\bar{x}_甲$ _____ $\bar{x}_乙$, $s_甲^2$ _____ $s_乙^2$ (填 “>”, “<” 或 “=”).

16. 某工厂用甲、乙两种原料制作 A, B, C 三种型号的工艺品, 三种型号工艺品的重量及所含甲、乙两种原料的重量如下:

工艺品型号	含甲种原料的重量/kg	含乙种原料的重量/kg	工艺品的重量/kg
A	3	4	7
B	3	2	5
C	2	3	5

现要用甲、乙两种原料共 31kg, 制作 5 个工艺品, 且每种型号至少制作 1 个.

- (1) 若 31kg 原料恰好全部用完, 则制作 A 型工艺品的个数为_____;
- (2) 若使用甲种原料不超过 13kg, 同时使用乙种原料最多, 则制作方案中 A, B, C 三种型号工艺品的个数依次为_____.



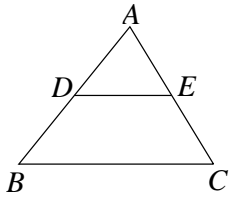
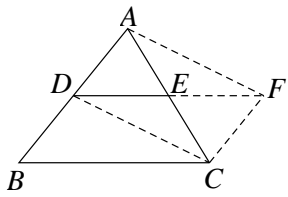
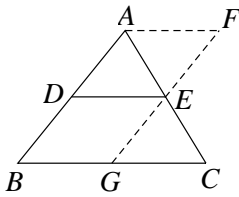
三、解答题（共 68 分，第 17—20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23—24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27—28 题，每题 7 分）
解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算： $4\sin 30^\circ + |-2| + \sqrt{12} - (\frac{1}{4})^{-1}$.

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 3x-4 < x, \\ \frac{5x+3}{2} > x. \end{cases}$$

19. 已知 $x^2 + 3x - 5 = 0$ ，求代数式 $(x+3)^2 + 3x(x+2)$ 的值.

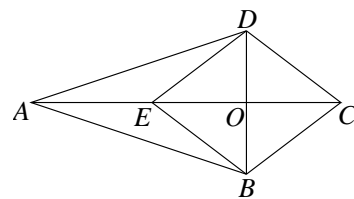
20. 下面是证明三角形中位线定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.

<p>三角形中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.</p> <p>已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是 AB, AC 边的中点.</p> <p>求证：$DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2} BC$.</p>		
<p>方法一： 证明：如图，延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 FC, DC, AF.</p>	<p>方法二： 证明：如图，取 BC 中点 G，连接 GE 并延长到点 F，使 $EF = GE$，连接 AF.</p>	
		

21. 如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB=AD$ ， $OB=OD$ ，点 E 在 AC 上，且 $\angle CED = \angle ECB$.

(1) 求证：四边形 $EBCD$ 是菱形；

(2) 若 $BC=5$ ， $EC=8$ ， $\sin \angle DAE = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求 AE 的长.



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y = 2x$ 的图象平移得到，且经过点 $A(2, 0)$.

(1) 求该一次函数的解析式；

(2) 当 $x > 2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = x + n$ 的值小于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的值，直接写出 n 的取值范围.



23. 在第四个国际数学日(2023年3月14日)到来之际,燕山地区举办了“数学节”,通过数学素养竞赛、数学创意市集、数学名师讲座等活动,展现数学魅力、传播数学文化.为了解学生数学素养竞赛的答题情况,从甲、乙两校各随机抽取了20名学生成绩(单位:分)的数据,并对数据进行整理、描述和分析.下面给出了部分信息:

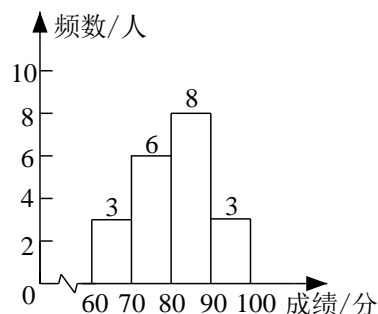
a. 乙校学生成绩数据的频数分布直方图如右图所示(数据分为四组: $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$)

b. 乙校学生成绩数据在 $80 \leq x < 90$ 这一组的是:

80 81 81 82 85 86 88 88

c. 甲、乙两校学生成绩的平均数、中位数、众数如下:

学校	平均数	中位数	众数
甲	79.2	79	78
乙	79.7	m	76



根据以上信息,回答下列问题:

(1) 写出表中 m 的值:

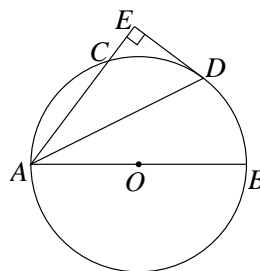
(2) 在甲、乙两校抽取的学生中,记成绩高于各自学校平均分的人数分别为 p, q , 则 p _____ q (填“>”, “<”或“=”), 理由是 _____;

(3) 若乙校共有160名学生参加了该数学素养竞赛,且成绩不低于80分的学生可获得“数学之星”的称号,估计乙校获得“数学之星”称号的学生有 _____ 人.

24. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 点 D 为 \widehat{BC} 的中点, 连接 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 E .

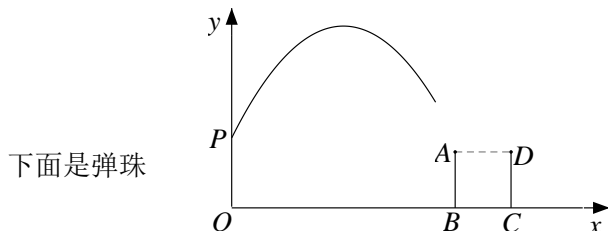
(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 延长 ED 交 AB 的延长线于点 F , 若 $BF=2, DF=4$, 求 $\odot O$ 的半径和 DE 的长.



25. 某数学兴趣小组设计了一个弹珠投箱游戏: 将无盖正方体箱子放在水平地面上, 弹珠从箱外投入箱子, 弹珠的飞行轨迹可以看作是抛物线的一部分. 建立如图所示的平面直角坐标系(正方形 $ABCD$ 为箱子正面示意图, x 轴经过箱子底面中心, 并与其一组对边平行).

某同学将弹珠从点 P 处抛出, 弹珠的竖直高度 y (单位: dm) 与水平距离 x (单位: dm) 近似满足函数关系 $y = a(x-h)^2 + k$ ($a < 0$).



下面是弹珠

的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据:

水平距离 x/dm	0	1	2	3	4	5	6
竖直高度 y/dm	2.50	4.25	5.50	6.25	6.50	6.25	5.50

(1) 直接写出弹珠竖直高度的最大值, 并求出满足的函数关系 $y = a(x-h)^2 + k$ ($a < 0$);



(2) 若点 B 的坐标为 $(8, 0)$, $BC=2\text{dm}$, 则该同学抛出的弹珠_____投入箱子 (填“能”或“不能”).

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 5 (a \neq 0)$ 与 y 轴交于点 C .

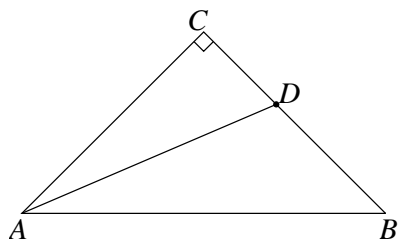
(1) 求点 C 的坐标及抛物线的对称轴;

(2) 已知点 $(-1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(6, y_3)$ 在该抛物线上, 且 y_1, y_2, y_3 中有且只有一个小于 0, 求 a 的取值范围.

27. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, D 为边 BC 上一点(不与点 B, C 重合), 连接 AD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp CE$, 交直线 CE 于点 F .

(1) 依题意补全图形; 用等式表示线段 CE 与 BF 的数量关系, 并证明;

(2) 点 G 为 AB 中点, 连接 FG , 用等式表示线段 AE, BF, FG 之间的数量关系, 并证明.



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, M 为 $\odot O$ 上一点, 点 $N(0, -2)$.

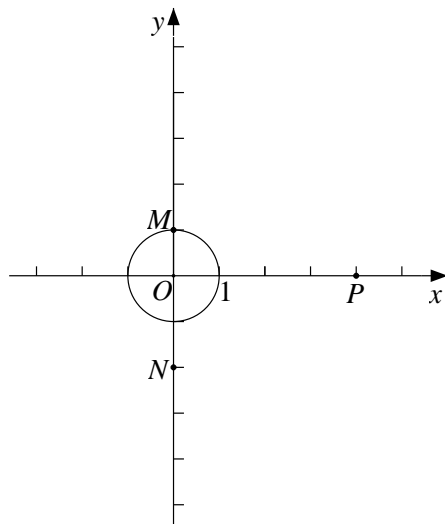
对于点 P 给出如下定义: 将点 P 绕点 M 顺时针旋转 90° , 得到点 P' , 点 P' 关于点 N 的对称点为 Q , 称点 Q 为点 P 的“对应点”.

(1) 如图, 已知点 $M(0, 1)$, 点 $P(4, 0)$, 点 Q 为点 P 的“对应点”.

①在图中画出点 Q ;

②求证: $OQ = \sqrt{2} OM$;

(2) 点 P 在 x 轴正半轴上, 且 $OP=t (t>1)$, 点 Q 为点 P 的“对应点”, 连接 PQ , 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时, 直接写出 PQ 长的最大值与最小值的积(用含 t 的式子表示).



参考答案



阅卷须知:

1. 为便于阅卷,本试卷答案中有关解答题的推导步骤写得较为详细,阅卷时,只要考生将主要过程正确写出即可。
2. 若考生的解法与给出的解法不同,正确者可参照评分参考相应给分。
3. 评分参考中所注分数,表示考生正确做到此步应得的累加分数。

第一部分 选择题

一、选择题 (共 16 分, 每题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	D	C	A	A	B

第二部分 非选择题

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. $x \geq -1$ 10. $3(a-b)(a+b)$ 11. $x = 6$

12. -1 13. 115 14. $\sqrt{5}$

15. $>$; $=$ 16. (1) 3; (2) 2, 1, 2

三、解答题 (共 68 分, 第 17—20 题, 每题 5 分, 第 21 题 6 分, 第 22 题 5 分, 第 23—24 题, 每题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27—28 题, 每题 7 分)

17. (本题满分 5 分)

解: 原式 $= 4 \times \frac{1}{2} + 2 + 2\sqrt{3} - 4$ 4 分
 $= 2\sqrt{3}$5 分

18. (本题满分 5 分)

解: 原不等式组为 $\begin{cases} 3x-4 < x, & \text{①} \\ \frac{5x+3}{2} > x. & \text{②} \end{cases}$

解不等式①, 得 $x < 2$,2 分
 解不等式②, 得 $x > -1$,4 分
 \therefore 原不等式组的解集为 $-1 < x < 2$5 分

19. (本题满分 5 分)

解: $(x+3)^2 + 3x(x+2)$
 $= x^2 + 6x + 9 + 3x^2 + 6x$ 2 分
 $= 4x^2 + 12x + 9$
 $= 4(x^2 + 3x) + 9$ 3 分
 $\therefore x^2 + 3x - 5 = 0$,
 $\therefore x^2 + 3x = 5$,4 分
 \therefore 原式 $= 29$5 分

20. (本题满分 5 分)



方法一

证明：如图，延长 DE 到点 F ，使 $EF=DE$ ，连接 FC ， DC ， AF 。

\because 点 D ， E 分别是 AB ， AC 边的中点，

$\therefore AE=EC$ ， $AD=BD$ ，

\therefore 四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$$CF \parallel AD,$$

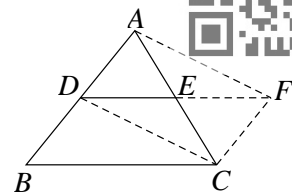
$\therefore CF \parallel BD$ ，

\therefore 四边形 $DBCF$ 是平行四边形，

$$DF \parallel BC.$$

又 $\because DE = \frac{1}{2} DF$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2} BC$5分



方法二

证明：如图，取 BC 中点 G ，连接 GE 并延长到点 F ，使 $EF=GE$ ，连接 AF 。

\because 点 D ， E 分别是 AB ， AC 边的中点，

$\therefore AE=EC$ ， $AD=BD$ 。

又 $\because \angle AEF = \angle CEG$ ，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CEG$ ，

$\therefore AF=CG$ ， $\angle F = \angle CGE$ ，

$\therefore AF \parallel CG$ 。

$\because BG=CG$ ，

$\therefore AF \parallel BG$ ，

\therefore 四边形 $ABGF$ 是平行四边形，

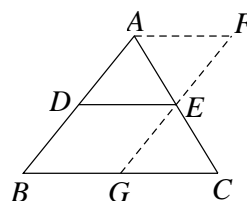
$\therefore AB \parallel FG$ 。

$\because DB = \frac{1}{2} AB$ ， $GE = \frac{1}{2} GF$ ，

$\therefore DB \parallel GE$ ，

\therefore 四边形 $DBGE$ 是平行四边形，

$\therefore DE \parallel BC$ ，且 $DE = BG = \frac{1}{2} BC$5分



21. (本题满分 6 分)

(1) 证明：在 $\triangle OED$ 和 $\triangle OCB$ 中，

$$OB=OD, \angle DOE = \angle BOC, \angle OED = \angle OCB,$$

$\therefore \triangle OED \cong \triangle OCB$ ，

$\therefore OE=OC$ 。

又 $\because AB=AD$ ， $OB=OD$ ，

$\therefore AO \perp BD$ 于点 O ，

\therefore 四边形 $EBCD$ 是菱形.3分



(2) 解: \because 四边形 $EBCD$ 是菱形,

$$\therefore CD=BC=5, OE=OC=\frac{1}{2}EC=4.$$

$\because CE \perp BD$ 于点 $O, \therefore \angle DOC = \angle DOA = 90^\circ,$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OCD \text{ 中, } OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = 3.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOD \text{ 中, 由 } \sin \angle DAO = \frac{OD}{AD} = \frac{3}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{得 } AD = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = 9,$$

$$\therefore AE = AO - OE = 9 - 4 = 5. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

22. (本题满分 5 分)

解: (1) \because 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = 2x$ 的图象平移得到,

$$\therefore k = 2.$$

将点 $A(2, 0)$ 的坐标代入 $y = 2x + b$ 中, 得 $0 = 2 \times 2 + b,$

解得 $b = -4,$

$$\therefore \text{该一次函数的解析式为 } y = 2x - 4. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) n \leq -2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

23. (本题满分 6 分)

解: (1) 由题意可知, 乙校学生成绩数据的中位数

$$m = \frac{80+81}{2} = 80.5. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) $p < q,$ 理由: 答案不唯一, 如

甲校成绩数据的中位数为 79 低于平均数 79.2, 而乙校成绩数据的中位数 80.5 高于平均数 79.7, 故乙校成绩高于平均数的人数更多. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(3) 88. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

24. (本题满分 6 分)

(1) 证明: 如图, 连接 $OD,$

\because 点 D 为 \widehat{BC} 的中点,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

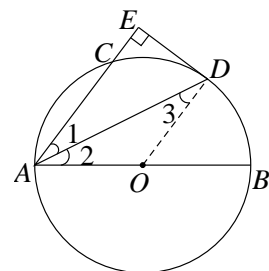
$$\therefore OD \parallel AE.$$

$$\because DE \perp AE,$$

$$\therefore DE \perp OD.$$

又 $\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$$\therefore DE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



(2) 解: 如图, 设 $\odot O$ 的半径为 $r,$ 则 $OD = OB = r,$

$$\text{在 Rt}\triangle ODF \text{ 中, } \angle ODF = 90^\circ, OD = r, OF = r + 2, DF = 4,$$



由 $OF^2 = OD^2 + DF^2$,

得 $(r+2)^2 = r^2 + 4^2$,

解得 $r=3$,

即 $\odot O$ 的半径为 3,

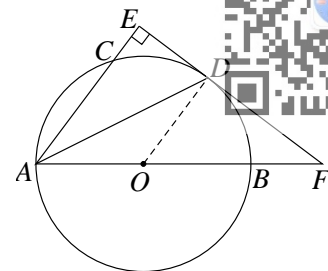
$\therefore OF = OB + BF = 5$.

$\therefore OD \parallel AE$,

$\therefore \frac{FO}{OA} = \frac{FD}{DE}$,

即 $\frac{5}{3} = \frac{4}{DE}$,

$\therefore DE = \frac{12}{5}$6 分



25. (本题满分 5 分)

解: (1) 弹珠竖直高度的最大值为 6.5dm,

由题意可知 $y = a(x-4)^2 + 6.5$,

\therefore 当 $x=0$ 时, $y=2.5$,

$\therefore a(0-4)^2 + 6.5 = 2.5$,

解得 $a = -0.25$,

\therefore 函数关系为 $y = -0.25(x-4)^2 + 6.5$4 分

(2) 能.5 分

26. (本题满分 6 分)

解: (1) 由题意, 抛物线与 y 轴交于点 $C(0, 5)$.

对称轴为直线 $x = -\frac{-4a}{2a} = 2$3 分

(2) \therefore 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$,

\therefore 点 $(-1, y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(5, y_1)$,

点 $(2, y_2)$ 在对称轴上, 点 $(5, y_1)$, $(6, y_3)$ 在对称轴右侧.

当 $x = -1$ 时, $y_1 = a + 4a + 5 = 5a + 5$,

当 $x = 2$ 时, $y_2 = 4a - 8a + 5 = -4a + 5$,

当 $x = 6$ 时, $y_3 = 36a - 24a + 5 = 12a + 5$.

当 $a > 0$ 时, 抛物线在对称轴右侧 (即 $x \geq 2$ 时) y 随 x 的增大而增大,

$\therefore y_2 < y_1 < y_3$.

$\therefore y_1, y_2, y_3$ 中有且只有一个小于 0,

$\therefore y_2 < 0$, 且 $y_1 \geq 0$,

即 $\begin{cases} -4a + 5 < 0, \\ 5a + 5 \geq 0, \end{cases}$

解得 $a > \frac{5}{4}$.

当 $a < 0$ 时, 抛物线在对称轴右侧 (即 $x \geq 2$ 时) y 随 x 的增大而减小,

$\therefore y_3 < y_1 < y_2$.

$\therefore y_1, y_2, y_3$ 中有且只有一个小于 0,

$\therefore y_3 < 0$, 且 $y_1 \geq 0$,

即 $\begin{cases} 12a + 5 < 0, \\ 5a + 5 \geq 0, \end{cases}$



解得 $-1 \leq a < -\frac{5}{12}$.

综上所述, $a > \frac{5}{4}$ 或 $-1 \leq a < -\frac{5}{12}$6分

27. (本题满分 7 分)

解: (1)依题意补全图形, 如图.

线段 CE 与 BF 的数量关系: $CE=BF$.

证明: $\because \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \angle CAE + \angle CDE = 90^\circ$.

$\because CE \perp AD$,

$\therefore \angle CED = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ$,

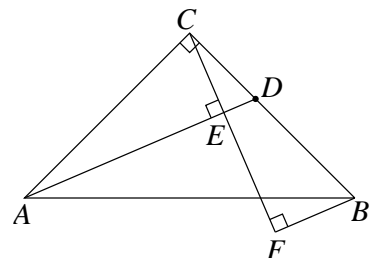
$\therefore \angle CAE = \angle DCE$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$\angle AEC = \angle CFB = 90^\circ$, $\angle CAE = \angle BCF$, $AC = BC$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CBF$,

$\therefore CE = BF$3分



(2)线段 AE , BF , FG 之间的数量关系: $AE - BF = \sqrt{2} FG$.

证明: 连接 CG , EG , 设 CF 与 AB 交于点 H .

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 G 为 AB 中点,

$\therefore CG \perp AB$, $CG = BG = \frac{1}{2} AB$.

$\because \angle CGH = \angle BFH = 90^\circ$,

$\angle CHG = \angle BHF$,

$\therefore \angle GCH = \angle FBH$.

由(1)得 $\triangle ACE \cong \triangle CBF$,

$\therefore AE = CF$, $CE = BF$.

在 $\triangle GCE$ 和 $\triangle GBF$ 中,

$CG = BG$, $\angle GCE = \angle GBF$, $CE = BF$,

$\therefore \triangle GCE \cong \triangle GBF$,

$\therefore GE = GF$, $\angle CGE = \angle BGF$,

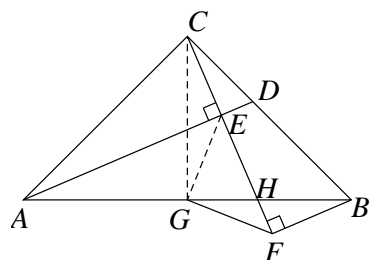
$\therefore \angle EGF = \angle EGB + \angle BGF = \angle EGB + \angle CGE = \angle CGB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle GEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore EF = \sqrt{2} FG$.

$\because CF - CE = EF$, $CF = AE$, $CE = BF$,

$\therefore AE - BF = \sqrt{2} FG$7分



28. (本题满分 7 分)

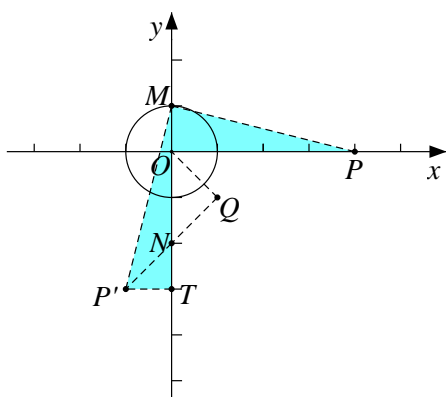
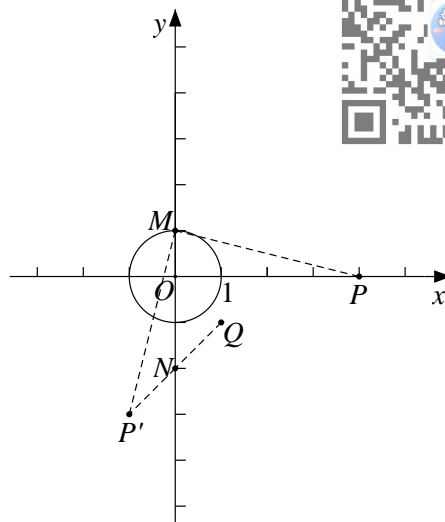
解: (1)①如图, 点 Q 即为所求;

②证明: 方法一: 如图 1, 过点 P' 作 $P'T \perp y$ 轴于点 T ,

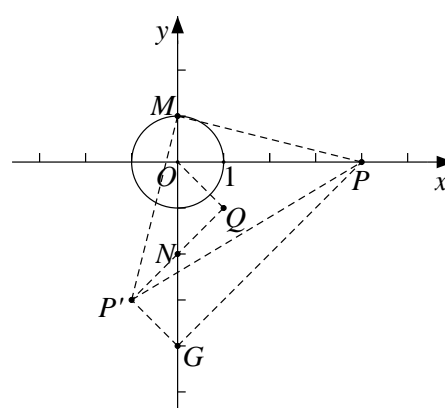
\because 将点 P 绕点 M 顺时针旋转 90° , 得到点 P' ,



$\therefore MP' = MP, \angle P'MP = 90^\circ,$
 $\therefore \angle P'MT + \angle OMP = 90^\circ.$
 $\because \angle MOP = 90^\circ,$
 $\therefore \angle OMP + \angle OPM = 90^\circ,$
 $\therefore \angle P'MT = \angle OPM,$
 $\therefore \triangle P'MT \cong \triangle PMO,$
 $\therefore MT = OP = 4, P'T = OM = 1,$
 $\therefore P'(-1, -3).$
 \because 点 P' 关于点 $N(0, -2)$ 的对称点为 $Q,$
 $\therefore Q(1, -1),$
 $\therefore OQ = \sqrt{2}.$
 $\because OM = 1,$
 $\therefore OQ = \sqrt{2} OM.$



(图 1)



(图 2)

方法二：如图 2，设点 $G(0, -4)$ ，连接 $P'G, PG, PP'$ ，
由题意可知， $\triangle MP'P$ 和 $\triangle OGP$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{PP'}{MP} = \frac{PG}{OP} = \sqrt{2}, \angle MPP' = \angle OPG = 45^\circ,$$

即 $\angle OPM + \angle OPP' = \angle OPP' + \angle GPP'$,

$$\therefore \angle OPM = \angle GPP',$$

$$\therefore \triangle OPM \sim \triangle GPP',$$

$$\therefore \frac{GP'}{OM} = \sqrt{2},$$

即 $GP' = \sqrt{2} OM.$

又 $\because P'N = NQ, \angle GNP' = \angle ONQ, GN = NO,$

$$\therefore \triangle P'NG \cong \triangle QNO,$$

$$\therefore GP' = OQ,$$

$$\therefore OQ = \sqrt{2} OM. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) PQ 长的最大值与最小值的积为 $2t^2 - 8t + 14$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$