2022北京广渠门中学初三（上）期中

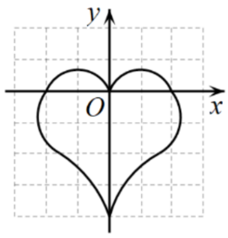
数　　学

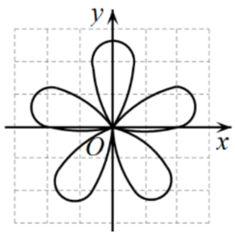
一、选择题

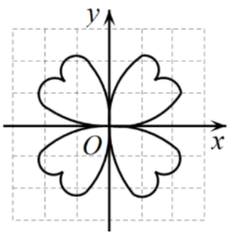
1. 将抛物线 $y=x^2$ 向上平移3个单位长度得到的抛物线是（　　）

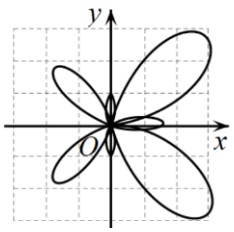
A. $y=x^2+3$　　B. $y=x^2-3$　　C. $y=(x+3)^2$　　D. $y=(x-3)^2$

2. 下列各曲线是在平面直角坐标系 xOy 中根据不同的方程绘制而成的，其中是中心对称图形的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

3. 若关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的一个根为1，则 m 的值为（　　）.

A. 3　　B. −1　　C. −3　　D. 1

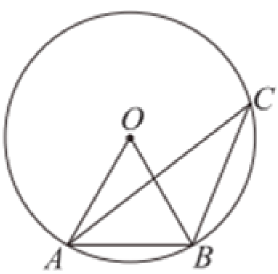
4. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1,2)$ 关于原点对称的点的坐标是（　　）

A. $1,-2$　　B. $-1,2$　　C. $(-2,1)$　　D. $(-1,-2)$

5. 用配方法解方程 $x^2+4x=1$，变形后结果正确的是（　　）

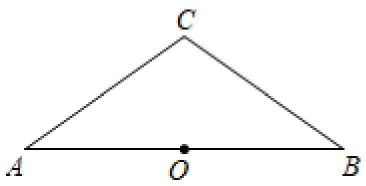
A. $(x+2)^2=5$　　B. $(x+2)^2=2$　　C. $(x-2)^2=5$　　D. $(x-2)^2=2$

6. 如图，点A，B，C 在⊙O 上，$\triangle OAB$ 是等边三角形，则 $\angle ACB$ 的大小为（　　）



A. 60°　　B. 40°　　C. 30°　　D. 20°

7. 在△ABC 中，$CA=CB$，点 O 为 AB 中点．以点 C 为圆心，CO 长为半径作⊙C，则⊙C 与 AB 位置关系是（　　）



A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 不确定

8. 下面的四个问题中都有两个变量：

①一个圆柱的高等于底面半径 x，这个圆柱的表面积为 y；

②x 个球队比赛，每两队之间进行一场比赛，比赛的场次为 y；

③某产品现在的年产量是 20t，计划今后两年增加产量，如果每年都比上一年增加 x 倍，两年后这种产品的产量为 y；

④某种商品每件的进价为 30 元，在某段时间内若以每件 x 元出售，可卖出（100－x）件，利润为 y 元．

其中，变量 y 与变量 x 之间的函数关系（不考虑自变量取值范围）可以用一条开口向上的抛物线表示的是（　　）

A. ②③④　　B. ①③④　　C. ①②④　　D. ①②③

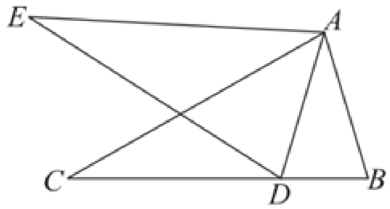
二、填空题

9. 抛物线 $y=(x-2)^2+1$ 的顶点坐标是______.

10. 若抛物线 $y=x^2-2x-m$ 与 x 轴有两个交点，则 m 的取值范围是__________.

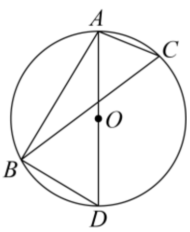
11. 已知某函数当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小，则这个函数解析式可以为________.

12. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$ 得到 $\triangle ADE$，点 B 的对应点 D 恰好落在边 BC 上，则 $\angle ADE=$_______.（用含 α 的式子表示）

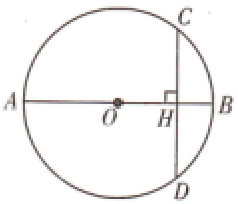


13. 若点 $A\left(-2, y_1\right)$，$B\left(2, y_2\right)$ 在抛物线 $y=\left(x+1\right)^2$ 上，则 y_1 与 y_2 的大小关系为：y_1_________y_2（填“>”，“=”或“<”）.

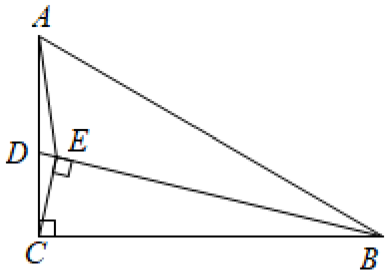
14. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的直径，若 $\angle BCA=50°$，则 $\angle BAD=$___________°.



15. 如图，AB 为$\odot O$的直径，弦$CD \perp AB$于点 H，若$AB=10$，$CD=8$，则 OH 的长度为__.



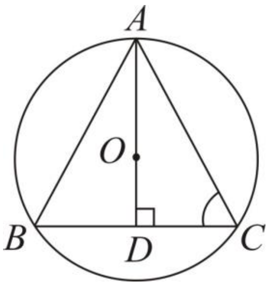
16. 如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=4$，$\angle BAC=60°$，D 是边 AC 上的一个动点，连接 BD，作 $CE\perp BD$ 于点 E，连接 AE，则 AE 长的最小值为________.



三、解答题

17. 解方程：$x^2-4x+3=0$.

18. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，高 AD 经过圆心 O．求证：$\angle B=\angle C$.



19. 下面是证明圆周角定理的过程，请认真阅读，并补全过程.

圆周角定理：一条弧所对　圆周角等于它所对圆心角的一半，

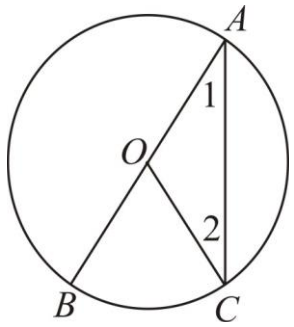
分析：根据圆心与圆周角　位置关系，可以分为三类.

已知：如图，A、B、C 为$\odot O$上的三个点

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

请你参考情况 1 的证明，完成情况 2、情况 3 的证明.

情况 1 圆心在圆周角的边上



证明：

$\because OA = OC$，

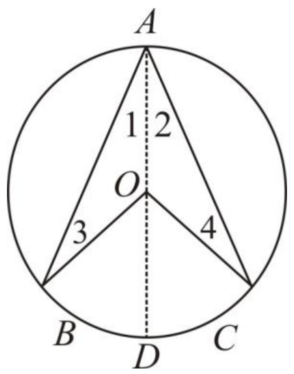
$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

由外角可得，$\angle BOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$，

$\therefore \angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle BOC$.

即$\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BOC$.

（1）情况 2 圆心在圆周角内部



证明：作直径AD.

$\because OA = OB$，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle BOD = \angle 1 + \angle 3 = 2\angle 1$，

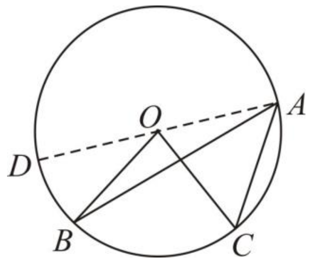
同理$\angle COD = 2\angle$________，

$\therefore \angle BOC = \angle BOD + \angle COD$

$= 2\angle$________，

$\therefore \angle$________$= \dfrac{1}{2}\angle BOC$.

（2）情况 3 圆心在圆周角外部



证明：作直径 AD.

∵　　　　　，

∴∠______=∠______.

∴∠BOD=______+______

=2∠______，

同理∠COD=2∠______，

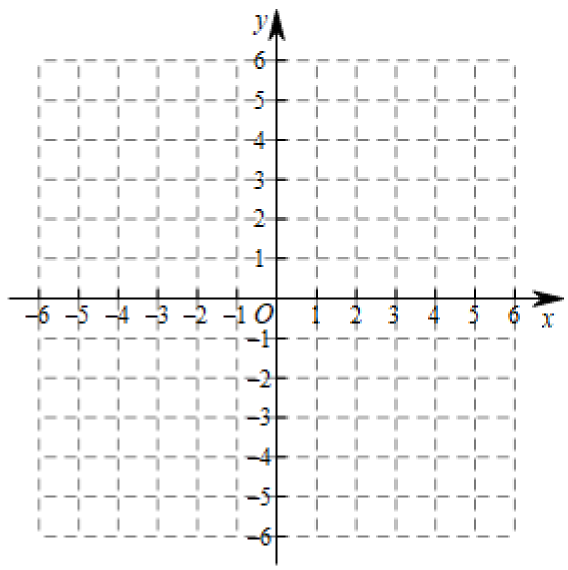
∴∠BOC=∠______−∠______

=2∠______−2∠______

=2∠______，

∴　　　　　−　　　　.

20. 已知二次函数经过点$\left(-1,0\right)$，$\left(3,0\right)$，且最大值为 4.



（1）求二次函数的解析式；

（2）在平面直角坐标系　　中，画出二次函数的图象；

（3）当$1<x<4$时，结合函数图象，直接写出 y 的取值范围.

21. 如图，在 4×4 的方格纸中，△ABC 的三个顶点都在格点上.

（1）在图 1 中，画出一个与△ABC 成中心对称的格点三角形；

（2）在图 2 中，画出一个与△ABC 成轴对称且与△ABC 有公共边的格点三角形；

（3）在图 3 中，画出△ABC 绕着点 C 按顺时针方向旋转 90° 后的三角形．

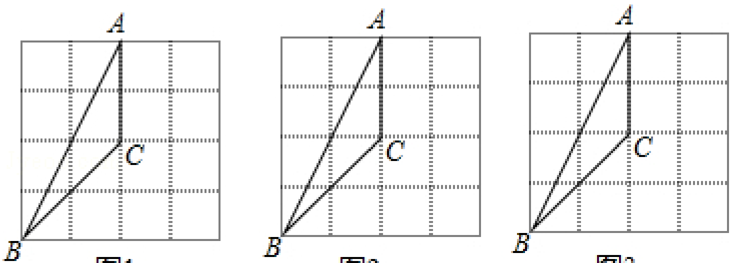
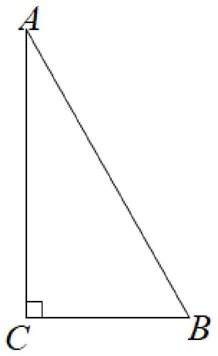


图1　　　图2　　　图3

22．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，将线段 CA 绕点 C 逆时针旋转 60°，得到线段 CD，连接 AD，BD．

（1）依题意补全图形；

（2）若 $BC=1$，求线段 BD 的长．

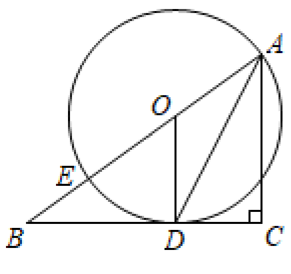


23．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2-m)x+1-m=0$．

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若 $m<0$，方程的两个实数根为 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，若 $x_2-2x_1=3$，求 m 的值．

24．如图，在 △　　中，$\angle C=90°$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，O 是 AB 上一点，以 OA 为半径的⊙　经过点 D，交 AB 于点 E．



（1）求证：　　是⊙　的切线；

（2）若 $BE=2$，$BD=4$，求⊙　的半径．

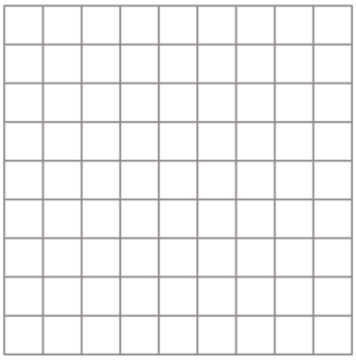
25．某景观公园内人工湖里有一组喷泉，水柱从垂直于湖面的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是抛物线．现测量出如下数据，在距水枪水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面高度为 h 米．

d（米）	0	0.7	2	3	4	…

h（米）	2.0	3.49	5 2	5.6	5.2	…

请解决以下问题：

（1）在下边网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



（2）请结合表中所给数据或所画图象，估出喷泉的落水点距水枪的水平距离为______米（精确到 0.1）；

（3）在（2）的条件下，喷泉落水点刚好在水池内边缘，如果通过改变喷泉的推力大小，使得喷出的水流形成的抛物线为 $h=-0.3(d-3.5)^2+5.675$，请结合图象判断，此时喷泉______（填“会”或“不会”）喷到水池外；

（4）在（2）的条件下，公园增设了新的游玩项目，购置了宽度 4 米，顶棚到水面高度为 4.2 米的平顶游船，游船从喷泉正下方通过，别有一番趣味，请通过计算说明游船是否有被喷泉淋到的危险.

26. 在平面直角坐标系　　中，点 $(1,m)$，$(3,n)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+1(a<0)$ 上，设抛物线的对称轴为 $x=t$.

（1）当 $m=n$ 时，求抛物线与 y 轴交点的坐标及 t 的值；

（2）点 $(x_0,m)(x_0\neq 1)$ 在抛物线上，若 $m>n>1$，求 t　取值范围及 x_0 的取值范围.

27. 知 $\angle MCN=45°$，点 B 在射线 CM 上，点 A 是射线 CN 上的一个动点（不与点 C 重合）. 点 B 关于 CN 的对称点为点 D，连接 AB、AD 和 CD，点 F 在直线　　上，且满足 $AF=AB$. 小明在探究图形运动的过程中发现：$AF\perp AD$ 始终成立.

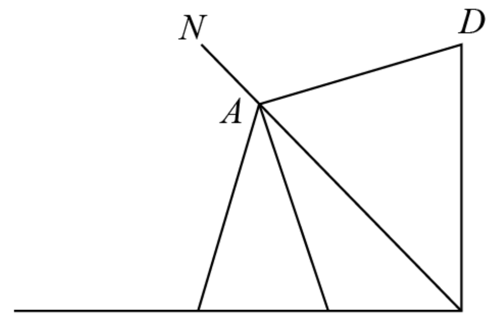
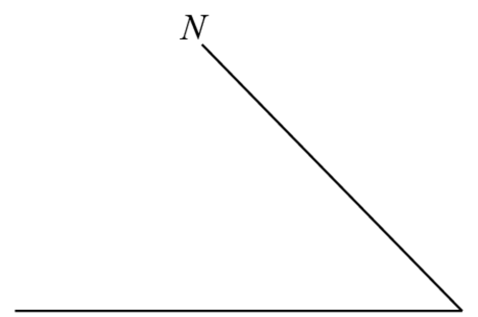


图1



备用用

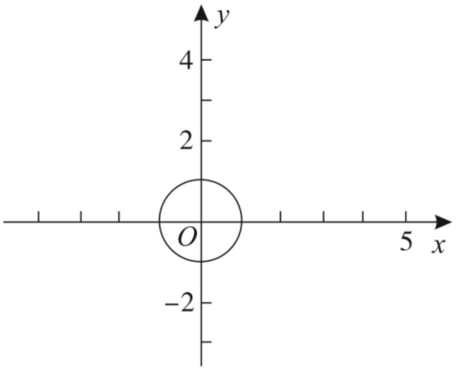
（1）如图 1，当 $0°<\angle BAC<90°$ 时.

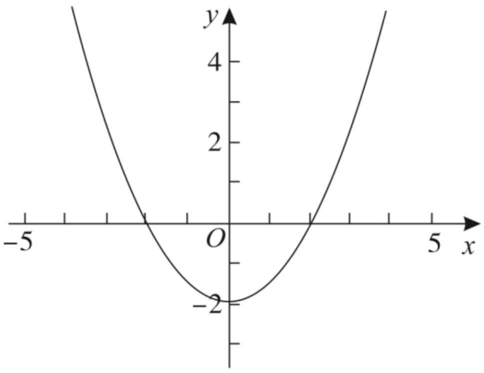
①求证：$AF\perp AD$；

②用等式表示线段 CF、CD 与 CA 之间的数量关系，并证明；

（2）当$90°<\angle BAC<135°$时，直接用等式表示线段CF、CD与CA之间的数量关系是____________.

28. 对于点$P\left(x_P, y_P\right)$与图形W，如果图形W上存在一点$Q\left(x_Q, y_Q\right)$，使得当$x_P = x_Q$时，$\left|y_P - y_Q\right| \leq 1$，则称点$P$为图形$W$的一个“近卫点”.





（1）已知$A\left(-2,2\right)$，$B\left(2,2\right)$，在点$P_1\left(-3,3\right)$，$P_2\left(-1,1\right)$，$P_3\left(1,4\right)$，$P_4\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$中，是线段$AB$的“近卫点”的有____________；

（2）以原点O为圆心，1为半径作⊙ ，直线$y=x+b$与x轴、y轴分别交于C、D两点，若线段CD上任意一点都是⊙ 的“近卫点”，求b的取值范围；

（3）已知点$E\left(m,0\right)$，以点E为中心的正方形s满足以下条件：四条边都平行于坐标轴，且边长为1．若正方形s上存在抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”，直接写出m的取值范围.

参考答案

一、选择题

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据抛物线的平移规律：上加下减，左加右减解答即可．

【详解】解：将抛物线 $y=x^2$ 向上平移 3 个单位长度得到的抛物线是 $y=x^2+3$

故选：A

【点睛】本题考查了二次函数图象的平移，理解平移规律是解题的关键．

2. 【答案】C

【解析】

【分析】中心对称图形的定义：如果把一个图形绕着一个定点旋转$180°$后，与初始图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心；根据定义对四个选项进行判断即可．

【详解】解：A、不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B、是旋转对称图形，但不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、是中心对称图形，故此选项符合题意；

D、不是中心对称图形，故此选项不符合题意．

故选 C．

【点睛】此题考查了中心对称图形的概念，熟练掌握中心对称图形的概念是解决此题的关键．

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程解的定义，将 $x=1$ 代入原方程，然后解关于 m 的一元一次方程即可．

【详解】解：∵关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的一个根是 1，

∴当 $x=1$ 时，由原方程，得

$1-2+m=0$，

解得 $m=1$；

故选：D．

【点睛】本题考查的是一元二次方程的根即方程的解的定义，属于基础题型．

4. 【答案】A

【解析】

【分析】关于原点对称的两点，则其横、纵坐标互为相反数，由点关于原点对称的坐标特征即可求得对称点的坐标．

【详解】点 $A(-1,2)$ 关于原点对称的点的坐标为 $1,-2$ ；

故选：A．

【点睛】本题考查了求关于原点对称的点的坐标，掌握关于原点对称的坐标特征是关键．

5. 【答案】A

【解析】

【分析】方程的两边同时加上一次项系数一半的平方即可，进而即求得答案.

【详解】解：$x^2+4x=1$

$x^2+4x+4=1+4$

即 $(x+2)^2=5$

故选 A

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，掌握配方法是解题的关键.

6. 【答案】C

【解析】

【分析】由 ΔOAB 为等边三角形，得：$\angle AOB$=60°，再根据圆周角定理，即可求解.

【详解】解：∵ ΔOAB 为等边三角形，

∴ $\angle AOB$=60°，

∴ $=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 60°=30°$.

故选 C.

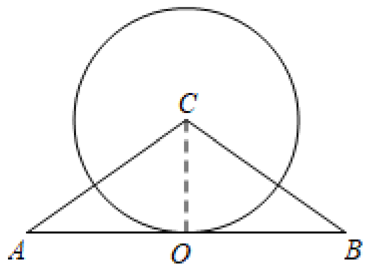
【点睛】本题主要考查圆周角定理，掌握同弧所对的圆周角是圆心角的一半是解题的关键.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质，三线合一即可得 $CO\perp AB$，根据三角形切线的判定即可判断 AB 是 $\odot C$ 的切线，进而可得 $\odot C$ 与 AB 的位置关系

【详解】解：连接 CO，



∵ ，点 O 为 AB 中点.

$\therefore CO\perp AB$

∵ CO 为 $\odot C$ 的半径，

$\therefore AB$ 是 $\odot C$ 的切线，

$\therefore \odot C$ 与 AB 的位置关系是相切

故选 B

【点睛】本题考查了三线合一，切线的判定，直线与圆的位置关系，掌握切线判定定理是解题的关键.

8. 【答案】D

【解析】

【分析】分别求出每个问题的函数关系式，根据函数关系式即可作出判断.

【详解】①的函数关系式为：$y=2\pi x^2+2\pi x\bullet x=4\pi x^2$，其图象是一条开口向上的抛物线；

②的函数关系式为：$y=\frac{1}{2}(x-1)x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$，其图象是一条开口向上的抛物线；

③的函数关系式为：$y=20(1+x)^2$，其图象是一条开口向上的抛物线；

④的函数关系式为：$y=(x-30)(100-x)=-x^2+130x-3000$，其图象是一条开口向下的抛物线；

故满足题意的为①②③；

故选：D.

【点睛】本题考查了列二次函数，根据二次函数确定其图象　开口方向，正确列出二次函数是关键.

二、填空题

9. 【答案】（2，1）.

【解析】

【分析】直接利用顶点式可知顶点坐标.

【详解】因为　　　　　　　　是抛物线的顶点式，根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标为（2，1）.

故答案为（2，1）.

【点睛】本题主要考查了求抛物线顶点坐标的方法.

10. 【答案】$m>-1$

【解析】

【分析】由抛物线与 x 轴有两个交点，可得出关于 m 的一元一次不等式，即判别式大于 0，解之即可得出 m 的取值范围.

【详解】解：抛物线　　　　　　　　与　轴有两个交点

则$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-m)>0$，化简得$4+4m>0$

解得$m>-1$

故答案为$m>-1$

【点睛】本题考查了抛物线与 x 轴的交点，牢记“当$\Delta=b^2-4ac>0$时，抛物线与 x 轴有 2 个交点”是解答本题的关键.

11. 【答案】$y=-x$或$y=1-x^2$或$y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据题意可得这个函数可能是一次函数或二次函数或反比例函数，再由函数的增减性即可得出函数解析式.

【详解】解：某函数当　　　时，y 随 x 的增大而减小，

∵未明确是一次函数、二次函数还是反比例函数，

∴这个函数可能是一次函数或二次函数或反比例函数，

根据其性质可得：这个函数为 $y=-x$ 或 $y=1-x^2$ 或 $y=\frac{1}{x}$，

故答案为：$y=-x$ 或 $y=1-x^2$ 或 $y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）.

【点睛】题目主要考查一次函数和二次函数、反比例函数的基本性质，熟练掌握三个函数的基本性质是解题关键.

12. 【答案】$\frac{180-\alpha}{2}$

【解析】

【分析】由旋转的性质可得∠DAB=　，AD=AB，　　　　∠B，进而即可求解.

【详解】解：∵将△　　绕点　顺时针旋转　　　　　　　得到△　　，

∴∠DAB=　，AD=AB，　　　　∠B，

∵∠B=$\frac{180-\alpha}{2}$，

∴　　　$\frac{180-\alpha}{2}$，

故答案是：$\frac{180-\alpha}{2}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，掌握旋转的性质是本题的关键.

13. 【答案】

【解析】

【分析】利用二次函数图象上点的坐标特征可得出　，　的值，比较后即可得出结论.

【详解】解：∵若点　　　　，　　　　在抛物线　　　　上，

∴ $y_1=(-2+1)^2=1$，$y_2=(2+1)^2=9$，

∵ $1<9$，

∴ $y_1<y_2$.

故答案为：　.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，利用二次函数图象上点的坐标特征求出　，　的值是解题的关键.

14. 【答案】40

【解析】

【分析】根据 AD 是△　　的外接圆⊙　的直径，可得∠ABD=90°，再由圆周角定理，可得

$\angle ADB=\angle BCA=50°$，即可求解．

【详解】解：∵AD是△　　的外接圆⊙　的直径，

∴$\angle ABD=90°$，

∵$\angle ADB=\angle BCA=50°$，

∴$\angle BAD=90°-\angle ADB=40°$．

故答案为：40

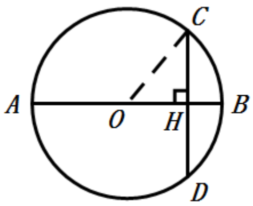
【点睛】本题主要考查了圆周角定理，熟练掌握直径所对的圆周角是直角，圆周角定理是解题的关键．

15．【答案】3

【解析】

【分析】连接OC，由垂径定理可求出CH的长度，在Rt△OCH中，根据CH和⊙O的半径，即可由勾股定理求出OH的长．

【详解】连接OC，



Rt△OCH中，OC=$\frac{1}{2}$AB=5，CH=$\frac{1}{2}$CD=4；

由勾股定理，得：OH=$\sqrt{OC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$；

即线段OH的长为3．

故答案为：3．

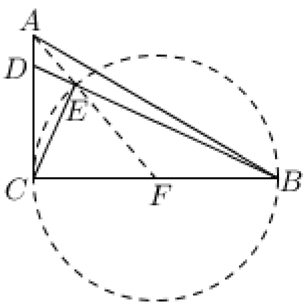
【点睛】本题考查了垂径定理：平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了勾股定理．

16．【答案】$\sqrt{7}-\sqrt{3}$##$-\sqrt{3}+\sqrt{7}$

【解析】

【分析】取　　中点F，连接AF、EF．易得点E在以点F为圆心，FC长为半径的圆周上运动，当点　、E、F在同一直线上时，AE最短．据此计算即可．

【详解】解：如图，取　　中点F，连接AF、EF．



$\because CE \perp BD$，

∴ $\angle BEC = 90°$，

∴点 E 在以点 F 为圆心，FC 长为半径的圆周上运动，

∴当点 、E、F 在同一直线上时，AE 最短．

∵ $\angle ACB$＝90°，$\angle BAC$＝60°，

∴ $\angle ABC$＝$\angle ACB$－$\angle BAC$＝30°，

又∵ AB＝4，

$\therefore AC = \dfrac{1}{2}AB = 2$，

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore EF = CF = \dfrac{1}{2}BC = \sqrt{3}$，

$\therefore AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$，

$\therefore AE = AF - EF = \sqrt{7} - \sqrt{3}$，

即 AE 的最小值为 $\sqrt{7} - \sqrt{3}$．

故答案为：$\sqrt{7} - \sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了线段最小值，正确理解圆外一点到圆上的最短距离等于点与圆心连线与圆的交点到点到这点的线段长是解题的关键，也考查了含 30°的直角三角形的性质以及勾股定理的应用．

三、解答题

17. 【答案】$x_1 = 3, x_2 = 1$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程即可求解．

【详解】解： ，

$(x-3)(x-1) = 0$，

解得 $x_1 = 3, x_2 = 1$．

【点睛】本题考查了解一元二次方程，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键．

18. 【答案】见解析

【解析】

【分析】由垂径定理得 AD 垂直平分线段 ，由线段垂直平分线的性质及等腰三角形的性质即可证得结论．

详解】∵ $AD \perp BC$，且 AD 经过圆心 O，

∴ AD 垂直平分线段 ，

∴ $AB = AC$，

∴∠ ∠ ．

【点睛】本题考查了垂径定理，线段垂直平分线的性质及等腰三角形的性质，其中运用垂径定理是关键．

19. 【答案】（1）2， BAC ， BAC

（2）OBA， BAD， $\angle OBA$， $\angle BAD$， BAD， CAD， COD， BOD， CAD， BAD， BAC， BAC

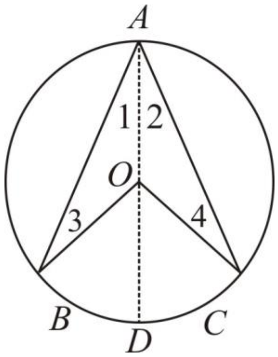
【解析】

【分析】(1)作直径 AD，利用等腰三角形的性质及三角形外角的性质，得 $\angle BOD=2\angle 1$ 及 $\angle COD=2\angle 2$，则由和角关系可得结论；

(2)作直径 AD，利用等腰三角形的性质及三角形外角的性质，得 $\angle BOD=2\angle BAD$ 及 $\angle COD=2\angle CAD$，则由差角关系可得结论；

【小问 1 详解】

情况 2 圆心　圆周角内部



证明：如图，作直径 AD.

∵ ，

∴ .

∴ ，

同理 $\angle COD=2\angle 2$，

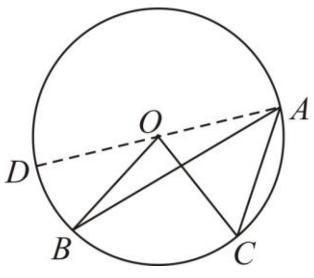
∴ $\angle BOC=\angle BOD+\angle COD=2(\angle 1+\angle 2)=2\angle BAC$

∴ $-$.

故答案为：2， BAC ， BAC

【小问 2 详解】

情况 3 圆心在圆周角外部



证明：如图，作直径 AD.

∵ ，

∴ $\angle OBA=\angle BAD$.

$\therefore \angle BOD = \angle OBA + \angle BAD = 2\angle BAD$，

同理 $\angle COD = 2\angle CAD$，

$\therefore \angle BOC = \angle COD - \angle BOD = 2\angle CAD - 2\angle BAD = 2\angle BAC$，

$\therefore$ $-$.

故答案为：OBA，BAD，$\angle OBA$，$\angle BAD$，BAD，CAD，COD，BOD，CAD，BAD，BAC，BAC

【点睛】本题考查了等腰三角形 性质，三角形外角的性质，角的和差关系，体现了分类讨论思想及转化思想的运用.

20. 【答案】（1）$y=-x^2+2x+3$

（2）见解析 （3）$-5<y<4$

【解析】

【分析】（1）设二次函数解析式为交点式，再配方成顶点式，由最大值为4即可求得二次项系数，从而求得函数解析式；

（2）列表、描点、连线，即可得到函数的图象；

（3）求出当 $x=4$ 时的函数值，结合函数图象即可写出 y 的取值范围.

【小问1详解】

解：设 $y=a(x+1)(x-3)$，

则 $y=a(x-1)^2-4a$，

则 $-4a=4$，解得：$a=-1$；

即 $y=-(x+1)(x-3)$，化 一般式为：$y=-x^2+2x+3$；

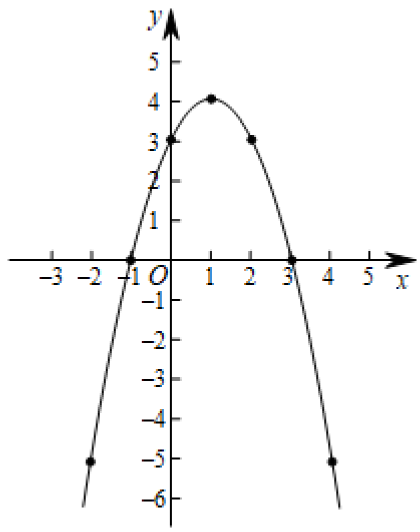
【小问2详解】

解：由（1）知，抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

列表如下：

	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-5	0	3	4	3	0	-5	…

描点并连线，得到的函数图象如下：



【小问 3 详解】

当 $x=4$ 时， $y=-5$，观察图象知，当 $1<x<4$ 时， $-5<y<4$.

【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式，画二次函数的图象，结合函数图象求函数值的取值范围等知识，掌握二次函数的图象与性质是关键，注意数形结合.

21. 【答案】(1）如图所示见解析;（2）如图所示见解析;（3）如图所示见解析.

【解析】

【分析】(1）根据中心对称的定义画图即可.

（2）根据轴对称的定义画出图形，注意与已知三角形有公共边.

（3）明白顺时针的方向，根据要求画图即可.

【详解】(1）如图所示，

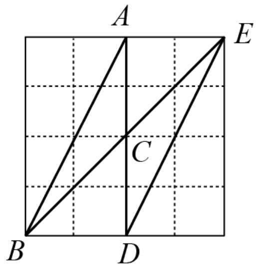


图1

$\triangle DCE$ 为所求作;

（2）如图所示，

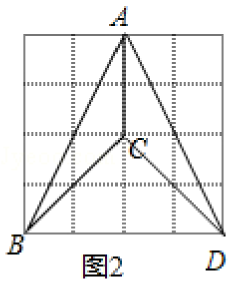


图2

$\triangle ACD$ 为所求作;

（3）如图所示

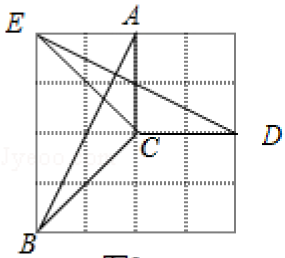


图3

$\triangle ECD$ 为所求作.

【点睛】本题是一道画图题，考查动手能力，解题关键是掌握轴对称，中心对称等定义.

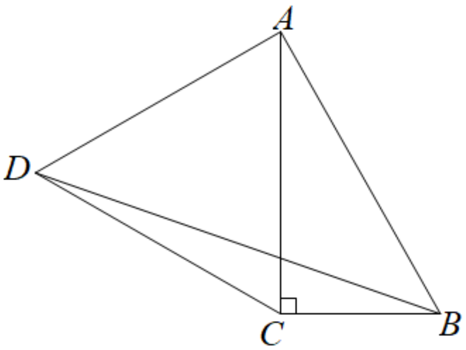
22. 【答案】（1）见解析；（2） $BD=\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）根据线段旋转的方法，得出 $\angle ACD=60°$，然后连接 AD，BD 即可得；

（2）根据 $30°$ 角的直角三角形的性质和勾股定理可得 $AC=\sqrt{3}$，由旋转的性质可得 $\triangle ACD$ 是等边三角形，再利用勾股定理求解即可.

【详解】解：（1）根据线段旋转方法， $\angle ACD=60°$，如图所示即为所求；



（2）∵ $\angle ACB=90°$， $\angle BAC=30°$， $BC=1$，

∴ $AB=2BC=2$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$，

∵ 线段 CA 绕点 C 逆时针旋转 $60°$得到线段 CD，

∴ $CA=CD$ 且 $\angle ACD=60°$，

∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形，

∴ $AD=AC=\sqrt{3}$， $\angle DAC=60°$，

∴ $\angle DAB=\angle DAC+\angle CAB=90°$，

∴ 在 $Rt\triangle ABD$ 中，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{7}$.

【点睛】题目主要考查旋转图形的作法及性质，勾股定理， $30°$ 角的直角三角形的性质，等边三角形的性

质等，理解题意，作出图形，综合运用各个定理性质是解题关键.

23. 【答案】(1) 见解析　　(2) -1

【解析】

【分析】(1) 求出方程的判别式，根据判别式的符号即可作出判断；

(2) 方程左边分解因式后可求得方程的两个根，根据题中的两根的关系可得关于 m 的方程，解方程即可求得 m 的值.

【小问 1 详解】

证明：由题意得：$\Delta=(2-m)^2-4\times1\times(1-m)=m^2\geq0$，

所以方程总有两个实数根；

【小问 2 详解】

解：原方程可化为：$(x+1)(x+1-m)=0$，

解得：$x=-1$ 或 $x=m-1$，

$\because m<0$，$x_1<x_2$，

$\therefore -1>m-1$，

$\therefore x_2=-1$，$x_1=m-1$，

$\because x_2-2x_1=3$，

$\therefore -1-2(m-1)=3$，

解得：$m=-1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，因式分解法解一元二次方程等知识，对于含有参数的一元二次方程进行因式分解是本题的难点．当然也可以用公式法求解，但要注意 m 的符号.

24. 【答案】(1) 见解析　　(2) 3

【解析】

【分析】(1) 由 $OA=OD$ 及 AD 平分 $\angle BAC$，则可得 $OD//AC$，再由 $\angle C=90°$ 即得到要证的结论；

(2) 连接 DE，证明 $\triangle BDE\backsim\triangle BAD$，由相似三角形的性质即可求得半径.

【小问 1 详解】

证明：$\because OA=OD$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle ODA=\angle OAD$，$\angle DAC=\angle OAD$，

$\therefore \angle ODA=\angle DAC$，

$\therefore OD//AC$，

$\because \angle C=90°$，

$\therefore \angle ODB=\angle C=90°$，

即　是⊙　的切线；

【小问 2 详解】

连接 DE，如图，

∵ AE 是圆的直径，

∴ $\angle ADE=\angle C=90^\circ$，

∵ $\angle DAC=\angle OAD$，

∴ $\angle AED=\angle ADC$，

∵ $\angle B=\angle B$，

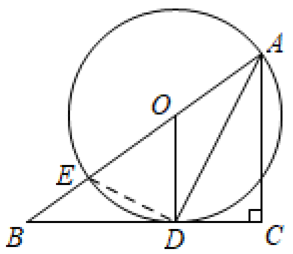
∴ $\triangle BDE \backsim \triangle BAD$，

∴ $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{AB}{BD}$，

∴ $AB=\dfrac{BD^2}{BE}=\dfrac{16}{2}=8$，

∴ $AE=AB-BE=8-2=6$，

则圆的半径为：$\dfrac{1}{2}AE=3$.



【点睛】本题主要考查了切线的判定，相似三角形的判定与性质，掌握这两点知识是关键，其它还涉及平行线的判定与性质，等腰三角形的性质，角平分线的定义，直径所对的圆周角是直角等知识，证明三角形相似是本题的关键.

25. 【答案】（1）见解析　　（2）6.8

（3）会　　（4）有被喷泉淋到的危险

【解析】

【分析】（1）由表格中的数据描出点并画出图象即可；

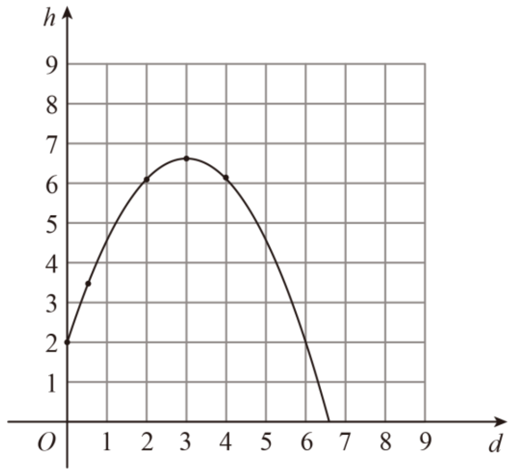
（2）根据所画的图象，根据图象与 x 轴的交点横坐标即可作出估计；

（3）把（2）中的 d 值代入 $h=-0.3(d-3.5)^2+5.675$ 中，求得的值是否等于 0，则可作出判断；

（4）由表中数据可求得函数解析式，计算出当 d=5 时的函数值，与 4.2 进行比较即可.

【小问 1 详解】

解：描点、连线得到下列图象.



【小问 2 详解】

解：由图象知，喷泉落水点的位置约为6.8米；

故答案为：6.8.

【小问 3 详解】

解：由（2）知，当$d=6.8$时，$h=-0.3(d-3.5)^2+5.675=-0.3\times(6.8-3.5)^2+5.675\approx 2.4>0$，

结合图象知，表明喷泉落水点的位置大于6.8米，

故答案为：会.

【小问 4 详解】

解：由表知，抛物线的顶点坐标为$(3,5.6)$，设抛物线的解析式为$h=a(d-3)^2+5.6$，

由表知，抛物线过点$(4,5.2)$，则有$5.2=a\times(4-3)^2+5.6$，解得$a=-0.4$，

即抛物线解析式为：$h=-0.4(d-3)^2+5.6$；

根据抛物线的对称性，当$d=3+4\times\dfrac{1}{2}=5$时，$h=-0.4\times(5-3)^2+5.6=4$，

而游船顶棚到水面高度为 4.2 米，表明游船有被喷泉淋到的危险.

【点睛】本题是二次函数的实际应用问题，考查了画二次函数图象，二次函数的性质，待定系数法求解析式，求函数值等知识，正确理解题意，把实际问题转化为数学问题是关键.

26. 【答案】（1）$(0,1)$，$t=2$

（2）$\dfrac{3}{2}<t<2$，$3<x_0<4$

【解析】

【分析】（1）在抛物线$y=ax^2+bx+1\left(a<0\right)$中，令$x=0$，可求得$y$的值，即可得到抛物线与$y$轴的交点坐标；由抛物线的对称性可求得$t$的值；

（2）由$m>n>1$可得a与b的不等关系，从而可确定出对称轴的范围，进而可确定x_0的取值范围.

【小问 1 详解】

解：在抛物线$y=ax^2+bx+1\left(a<0\right)$中，令$x=0$，得$y=1$，则抛物线与$y$轴交点的坐标为$(0,1)$；

由于抛物线关于对称轴对称，则有：$t-1=3-t$，解得$t=2$；

【小问 2 详解】

解：当$x=1$时，$m=a+b+1$；当$x=3$时，$n=9a+3b+1$；

∵ $m>n>1$,

∴ $a+b+1>9a+3b+1>1$，

则$-3a<b<-4a$，

∵ $a<0$，

∴ $-a>0$，

∴ $\frac{3}{2}<-\frac{b}{2a}<2$

即$\frac{3}{2}<t<2$；

∵ $t-1=x_0-t$，

∴ $t=\frac{x_0+1}{2}$

即$\frac{3}{2}<\frac{x_0+1}{2}<2$，

解得：$3<x_0<4$.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，解不等式及求抛物线与坐标轴的交点等知识，关键是灵活运用这些知识.

27. 【答案】（1）①见解析；②$CD+CF=\sqrt{2}AC$

（2）$CD-CF=\sqrt{2}AC$

【解析】

【分析】（1）①易证$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，则有$\angle ABC=\angle ADC$，再由$AF=AB$，得$\angle ABC=\angle AFB$，则可得$\angle ADC=\angle AFB$，则由四边形内角和易得结论正确；

②延长CD到E，使$DE=CF$，连接AE，则可证明$\triangle ADE\cong\triangle AFC$，从而易得$\triangle ACE$是等腰直角三角形，由勾股定理得$CF$、$CD$与$CA$之间的数量关系；

（2）在线段CD上取$DE=CF$，连接AE，则可证明$\triangle ADE\cong\triangle AFC$，从而易得$\triangle ACE$是等腰直角三角形，由勾股定理得$CF$、$CD$与$CA$之间的数量关系；

【小问 1 详解】

①证明：∵B、D关于CN对称，

∴ $CB=CD$，$\angle BCA=\angle DCA=45°$，

∵ CA公共，

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$，

∴ $\angle ABC=\angle ADC$，

$\because AB = AF$，

$\therefore \angle ABC = \angle AFB$，

$\therefore \angle ADC = \angle AFB$，

$\because \angle AFB + \angle AFC = 180°$，

$\therefore \angle ADC + \angle AFC = 180°$，

$\because \angle BCA = \angle DCA = 45°$，

$\therefore \angle DCF = 90°$，

$\therefore \angle DAF = 180° - \angle DCF = 90°$，

$\therefore AF \perp AD$；

②$CD + CF = \sqrt{2}AC$，证明如下：

如图，延长CD到E，使$DE = CF$，连接AE，

$\because \angle ADC + \angle AFC = 180°$，$\angle ADC + \angle ADE = 180°$，

$\therefore \angle AFC = \angle ADE$，

$\because \triangle ABC \cong \triangle ADC$，$AB = AF$，

$\therefore AD = AB = AF$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFC(\text{SAS})$，

$\therefore AC = AE$，$\angle E = \angle BCA = 45°$，

即$\triangle ACE$是等腰直角三角形，

由勾股定理得$CE^2 = AC^2 + AE^2 = 2AC^2$，

即$CE = \sqrt{2}AC$，

$\because CE = CD + DE = CD + CF$，

$\therefore CD + CF = \sqrt{2}AC$，

即CF、CD与CA之间的数量关系为$CD + CF = \sqrt{2}AC$；

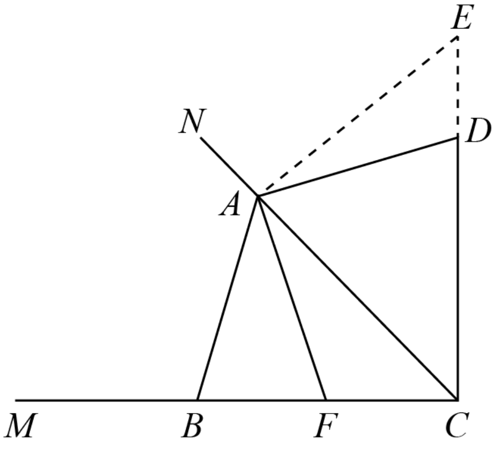


图1

；

【小问2详解】

如图，在线段CD上取$DE=CF$，连接AE，

$\because \triangle ABC \cong \triangle ADC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ADC$， $AB=AD$，

$\because AB=AF$，

$\therefore AD=AF$， $\angle ABC=\angle AFC$，

$\therefore \angle AFC=\angle ADE$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AC=AE$，

$\therefore \angle AEC=\angle DCA=45^{\circ}$，

$\therefore AC \perp AE$，

即$\triangle ACE$是等腰直角三角形，

由勾股定理得$CE^{2}=AC^{2}+AE^{2}=2AC^{2}$，

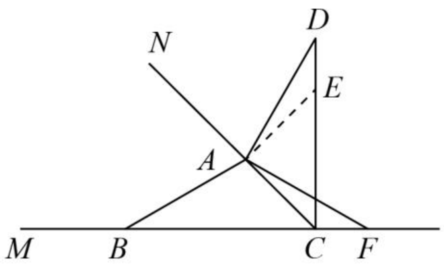
即$CE=\sqrt{2}AC$，

$\because CE=CD-DE=CD-CF$，

$\therefore CD-CF=\sqrt{2}AC$，

即CF、CD与CA之间的数量关系为$CD-CF=\sqrt{2}AC$；

故答案为：$CD-CF=\sqrt{2}AC$



；

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，对称的性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理等知识，作辅助线构造全等三角形是本题的关键．

28. 【答案】（1）$P_{2}(-1,1)$，$P_{4}\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$

（2）$-1 \le b \le 1$

（3）$-\dfrac{1}{2}-\sqrt{7} \le m \le -\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}+\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）根据“近卫点”的含义即可作出判断；

（2）由题意知，线段CD应是圆内的弦或位于圆内，根据此即可确定b的范围；

（3）考虑当函数值为$\pm\frac{3}{2}$时对应的自变量的值，当正方形在 y 轴右边时，根据正方形的位置及已知求得 m 的取值范围，再利用对称性可求得正方形在 y 轴左边时的 m 的取值范围，从而可得 m 的范围.

【小问 1 详解】

解：当点 $P(x_P, y_P)$ 在线段 AB 上时，则 $-2 \le x_P \le 2$，

对于 $P_1(-3,3)$，在线段 AB 上不存在点 $Q(x_Q, y_Q)$，使得当 $x_P = x_Q$ 时，$|y_P - y_Q| \le 1$，

则点 $P_1(-3,3)$ 为图形 W 的一个“近卫点”；

对于 $P_3(1,4)$，在线段 AB 上存在点 $Q(1,2)$，使得当 $x_P = x_Q$ 时，但$|y_P - y_Q| = 2 > 1$，

则点 $P_3(1,4)$ 不为图形 W 的一个“近卫点”；

对于 $P_2(-1,1)$，在线段 AB 上存在点 $Q(-1,2)$，使得当 $x_P = x_Q$ 时，$|y_P - y_Q| = |1-2| = 1$，

则点 $P_2(-1,1)$ 为图形 W 的一个“近卫点”；

对于 $P_4\left(0,\frac{5}{2}\right)$，在线段 AB 上存在点 $Q(0,2)$，使得当 $x_P = x_Q$ 时，$|y_P - y_Q| = \left|\frac{5}{2} - 2\right| = \frac{1}{2} < 1$，

则点 $P_4\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 为图形 W 的一个“近卫点”；

综上，满足条件的点为 $P_2(-1,1)$，$P_4\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

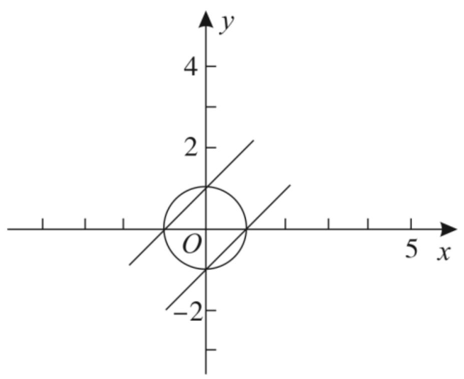
故答案为：$P_2(-1,1)$，$P_4\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

【小问 2 详解】

解：由题意知，根据圆的特性，线段 CD 应是圆内的弦或位于圆内，如图，

当 D 点坐标为$(0,1)$时，$b=1$；当 D 点坐标为$(0,-1)$时，$b=-1$；

则 b 的范围为$-1 \le b \le 1$.



【小问 3 详解】

解：当 $y=\frac{3}{2}$ 时，$\frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{3}{2}$，

解得：$x=\pm\sqrt{7}$；

当$y=-\frac{3}{2}$时，$\frac{1}{2}x^2-2=-\frac{3}{2}$，

解得：$x=\pm 1$；

当正方形在y轴右边时，若正方形左上顶点恰为抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”时，此时$m=\frac{1}{2}+\sqrt{7}$；

若正方形右下顶点恰为抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”时，此时$m+\frac{1}{2}=1$，

则$m=\frac{1}{2}$；

因此当正方形在y轴右边时，正方形s上存在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”，m的取值范围为

$\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}+\sqrt{7}$；

由抛物线的对称性，当正方形在y轴左边时，正方形s上存在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”，m的取

值范围为$-\frac{1}{2}-\sqrt{7}\le m\le-\frac{1}{2}$；

综上，正方形s上存在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2$的“近卫点”，m的取值范围为$-\frac{1}{2}-\sqrt{7}\le m\le-\frac{1}{2}$或

$\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}+\sqrt{7}$.

【点睛】本题是新定义问题，具有一定的综合性，考查了一次函数的图象与性质，二次函数的图象与性质等知识，理解题中的新定义并数形结合是解答本题的关键.