



首都师大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

高一 数学

命题人：高一数学备课组 审核人：高一数学备课组

第 I 卷（共 50 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{-1\}$
- B. $\{1, 2\}$
- C. $\{1, 2, 3\}$
- D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 下列各组函数表示同一函数的是 ()

- A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$
- B. $f(x) = 1$, $g(x) = x^0$
- C. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = |x|$
- D. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(-2)) = (\quad)$.

- A. 8
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{3}{4}$
- D. $-\frac{10}{9}$

4. “ $x < 3$ ”是“ $|x - 1| < 2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分又不必要条件

5. “ $\exists x \in \mathbf{N}, x - 1 < 0$ ”的否定为 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{N}, x - 1 \geq 0$
- B. $\exists x \notin \mathbf{N}, x - 1 \geq 0$
- C. $\forall x \notin \mathbf{N}, x - 1 \geq 0$
- D. $\forall x \in \mathbf{N}, x - 1 \geq 0$

6. 对于实数 a, b, c , 下列说法正确的是 () .



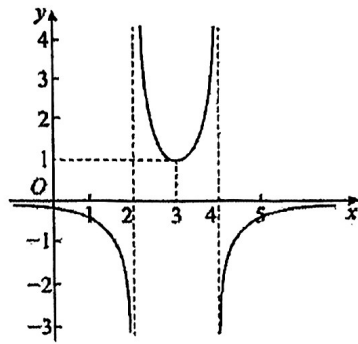
A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > 0 > b$, 则 $ab < a^2$

D. 若 $c > a > b$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ 的部分图象如图所示, 则 $a + b + c =$ ().



A. -6

B. 6

C. -3

D. 3

8. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集是 ().

A. $(-3, 0)$

B. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

D. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

9. 命题“ $\forall x \in [1, 2], 2ax + \frac{11}{x} \geq 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是 ().

A. $a \geq -1$

B. $a \geq -2$

C. $a \geq -3$

D. $a \geq -4$

10. 对实数 a, b , 定义运算“ \odot ”: $a \odot b = \begin{cases} a, & (a - b \leq 1) \\ b, & (a - b > 1) \end{cases}$, 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \odot (x - x^2)$,

$x \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有 3 个公共点, 则实数 c 的取值范围是

().

A. $(-2, -1]$

B. $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{3}{4})$

C. $(-\frac{3}{4}, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

第Ⅱ卷（共70分）

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

11. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ 的定义域是_____.

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = x - x^4$,

$f(1) =$ _____; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) =$ _____.

13. 运货卡车以每小时 x 千米的速度匀速行驶 130 千米, 按交通法规限制 $50 \leq x \leq 100$ (单位: 千米/时). 假设汽油的价格是每升 6 元, 而汽车每小时耗油 $\left(6 + \frac{x^2}{360}\right)$ 升, 司机的工资是每小时 24 元. 则这次行车的总费用最低为_____元.

14. 若关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集为 $\{x | x < 1\}$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$ 的解集为_____.

15. 下列四个命题:

①若 $a > b > 0$, $a > m > 0$, 则 $\frac{b-m}{a-m} < \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$;

②函数 $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值是 3;

③已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 4;

④已知正实数 x, y 满足 $xy + 2x + y = 4$, 则 $x + y$ 的最小值为 $2\sqrt{6} - 3$.

其中所有正确命题的序号是_____.

三、解答题（本大题共5小题，共50分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. (本小题8分) 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+1\}$.

(I) 若 $m=3$ 时, 求 $A \cap B$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$;

(II) 若 $B \subseteq A$, 求 m 的取值范围.



17. (本小题 8 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+b)x + 2a$.

(I) 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$, 求 $a - b$ 的值;

(II) 当 $b = 2$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$.

18. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 且 $f(1) = \frac{2}{3}$.

(I) 求实数 a 和 b 的值;

(II) 判断函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上的单调性, 并用单调性的定义证明你的结论;

(III) 若 $f(t^2 - 1) + f(1 - t) < 0$, 求 t 的取值范围.

19. (本小题 10 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 并且满足下列条件:

① $f(-1) = 1$; ② 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$; ③ 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$.

(I) 求 $f(0), f(2)$ 的值;

(II) 证明: $f(x)$ 为奇函数;

(III) 解关于 x 的不等式 $f(x^2 + 2x) - f(2 - x) > -2$.



20. (本小题 12 分) 对于函数 $f(x)$, 若存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的“不动点”.

(I) 设函数 $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$, 求 $f(x)$ 的不动点;

(II) 设函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 2 (a \neq 0)$. 若对于任意的实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两相异的不动点, 求实数 a 的取值范围;

(III) 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上. 证明: 若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点, 则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

首都师大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

高一 数学 答案

1-5 BCBB 6-10 CCCAA

11. $[-3,0) \cup (0,3]$

12. $-2, -x-x^4$

13. 260

【详解】设所用时间为 $t = \frac{130}{x}$ (h),

则由题意知 $y = \frac{130}{x} \times 6 \times \left(6 + \frac{x^2}{360}\right) + 24 \times \frac{130}{x}$, $x \in [50, 100]$.

所以这次行车总费用 y 关于 x 的表达式是 $y = \frac{7800}{x} + \frac{13x}{6}$, $x \in [50, 100]$

$$y = \frac{7800}{x} + \frac{13x}{6} \geq 2\sqrt{\frac{7800}{x} \cdot \frac{13x}{6}} = 2\sqrt{\frac{7800 \cdot 13x}{x \cdot 6}} = 260,$$

当且仅当 $\frac{7800}{x} = \frac{13x}{6}$, 即 $x = 60$ 时等号成立.

故当 $x = 60$ 千米/时, 这次行车的总费用最低, 最低费用的值为 260 元.

故答案为: 260.

14. $\{x | -1 < x < 2\}$

【详解】因为关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集为 $\{x | x < 1\}$,

所以关于 x 的方程 $ax - b = 0$ 的根为 $x = 1$ 且 $a < 0$, 所以 $a - b = 0$, 即 $b = a$.

故不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$, 即 $\frac{ax+a}{x-2} > 0$, 等价于 $\frac{x+1}{x-2} < 0$, 等价于 $(x+1)(x-2) < 0$, 解得 $-1 < x < 2$,

因此不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$.

故答案为: $\{x | -1 < x < 2\}$

15. ①③④

【详解】解: 对于①, $\because a > b > 0, a > m > 0$.

$$\therefore a - b > 0, a + m > 0, a - m > 0, \therefore (a - b)m > 0,$$

$$\therefore (a - b)m = a(b + m) - b(a + m) > 0, (a - b)m = b(a - m) - a(b - m) > 0$$

$$\therefore a(b + m) > b(a + m) \text{ 同除 } a(a + m) \text{ 得 } \frac{(b + m)}{(a + m)} > \frac{b}{a}$$

$$\therefore b(a - m) > a(b - m) \text{ 同除 } a(a - m) \text{ 得 } \frac{b}{a} > \frac{(b - m)}{(a - m)}$$

综上得 $\frac{b - m}{a - m} < \frac{b}{a} < \frac{b + m}{a + m}$, 故①正确;

对于②, $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ 则 $f(-2) = -2 + \frac{4}{-2+1} = -6$, 故②错误;



对于④, 正实数 x, y 满足 $xy+2x+y=4$, 则 $y=\frac{4-2x}{x+1}, x \in (0, 2)$

所以 $x+y=x+\frac{4-2x}{x+1}=x+\frac{6}{x+1}-2=x+1+\frac{6}{x+1}-3 \geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{6}{x+1}}-3=2\sqrt{6}-3$

当且仅当 $x+1=\frac{6}{x+1}$ 即 $x=\sqrt{6}-1$ 取等号, 故④正确:

故答案为:①③④

16. (I) $A \cap B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$; $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$; (II) $(-\infty, -2) \cup [-1, 2]$

【详解】(I) 当 $m=3$ 时, $B = \{x | 2 \leq x \leq 7\}$,

$A \cap B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$;

(II) 若 $B = \emptyset$, $m-1 > 2m+1$, 则 $m < -2$, 若 $B \neq \emptyset$, $\begin{cases} m-1 \leq 2m+1 \\ m-1 \geq -2 \\ 2m+1 \leq 5 \end{cases}$

解得: $-1 \leq m \leq 2$,

综上可知, $m \in (-\infty, -2) \cup [-1, 2]$

17. (I) $a-b=-1$ (II) 答案见解析

【详解】(I) 由题意可知, 关于 x 的不等式 $x^2-(a+b)x+2a < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$,

所以关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+2a=0$ 的两个根为 1 和 2, 所以 $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a=2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, 则 $a-b=-1$.

(II) 由条件可知, $x^2-(a+2)x+2a > 0$, 即 $(x-a)(x-2) > 0$,

对应的二次函数与 x 轴交点分别为 $x_1=2, x_2=a$

当 $a < 2$ 时, 解得 $x < a$ 或 $x > 2$;

当 $a=2$ 时, 解得 $x \neq 2$;

当 $a > 2$ 时, 解得 $x < 2$ 或 $x > a$.

综上可知, 当 $a < 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < a \text{ 或 } x > 2\}$;

当 $a=2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq 2\}$;

当 $a > 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > a\}$

18. (I) $a=2, b=0$; (II) 函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上是增函数; 证明见解析; (III) $0 < t < 1$

【详解】(I) 由函数 $f(x)=\frac{ax+b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 所以 $f(0)=\frac{b}{4}=0$ 得 $b=0$,

又因为 $f(1)=\frac{a}{4-1}=\frac{2}{3}$, 所以 $a=2$,

经检验, 当 $a=2, b=0$ 时, $f(x)$ 是奇函数,

所以 $a=2, b=0$





(II) 由 (I) 可知 $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$, 任取 $-2 < x_1 < x_2 < 2$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2x_1}{4-x_1^2} - \frac{2x_2}{4-x_2^2} = \frac{2x_1(4-x_2^2) - 2x_2(4-x_1^2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \\ &= 2 \cdot \frac{4(x_1-x_2) + (x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} = 2 \cdot \frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+4)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \end{aligned}$$

因为 $-2 < x_1 < x_2 < 2$, 所以, $x_1 - x_2 < 0, 4 - x_1^2 > 0, 4 - x_2^2 > 0, x_1x_2 + 4 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上是增函数.

(III) 由函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数且 $f(t^2-1) + f(1-t) < 0$,

则 $f(t^2-1) < -f(1-t) = f(t-1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -2 < t^2 - 1 < 2 \text{ 且 } -2 < t - 1 < 2 \\ t^2 - 1 < t - 1 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < t < 1,$$

所以 t 的取值范围是 $(0, 1)$

19. (I) $0, -2$; (II) 证明略; (III) $(-4, 1)$

【详解】

(I) 令 $x = y = 0$, 有 $f(0) = 0$;

令 $x = 1, y = -1$, 有 $f(1) = -1$,

令 $x = 1, y = 1$, 有 $f(2) = -2$

(II) 由题意函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 定义域关于原点对称,

令 $x = y = 0$, 则 $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, 故 $f(0) = 0$.

令 $y = -x$, 则 $f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$, 故 $f(-x) = -f(x)$

故 $f(x)$ 为奇函数.

(III) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 > x_2$.

由题意 $x_1 - x_2 > 0$, $f(x_1 - x_2) < 0$,

$f(x_1) = f(x_1 - x_2 + x_2) = f(x_1 - x_2) + f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

又 $x_1 > x_2$, 故 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为减函数.

因为 $f(-1) = 1$, 所以 $f(1) = -1$, $f(2) = f(1+1) = -1-1 = -2$,

故 $f(x^2+2x) - f(2-x) > -2$ 即 $f(x^2+2x) + f(x-2) = f(x^2+2x+x-2) > f(2)$,

即 $x^2+2x+x-2 < 2$, 化简可得 $x^2+3x-4 < 0$,

解得 $x \in (-4, 1)$.

20. (I) -1 和 2; (II) (0, 2); (III) 略

【详解】(I) 由 $f(x) = \frac{3x+2}{x+2} = x$.

得 $x^2 - x - 2 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 2$,

所以 $f(x)$ 的不动点为 -1 和 2.

(II) 由 $f(x) = x$ 得 $ax^2 + bx + b - 2 = 0$, 由已知此方程有两个相异实数根,

$\Delta_x > 0$ 恒成立, 即 $b^2 - 4a(b-2) > 0$ 对任意实数 b 恒成立,

所以 $\Delta_b = 16a^2 - 32a < 0$,

所以 $0 < a < 2$, 即实数 a 的取值范围是 (0, 2).

(III) 首先证明“若函数 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点 x_0 , 则 x_0 也是 $f(x)$ 的不动点”,

假设 $f(x_0) = x_1 \neq x_0$, 则 $f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) = f(x_0) = x_1$, 与 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点矛盾.

所以 x_0 也是 $f(x)$ 的不动点.

再证明“若函数 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点 x_0 , 则 x_0 也是 $f(x)$ 唯一的不动点”,

假设存在实数 a, b , 使得 $f(a) = a, f(b) = b$, 则 $f(f(a)) = f(a) = a, f(f(b)) = f(b) = b$

由 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点知 $a = b$, 即 $f(x)$ 不动点唯一.

综上, 若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点, 则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

